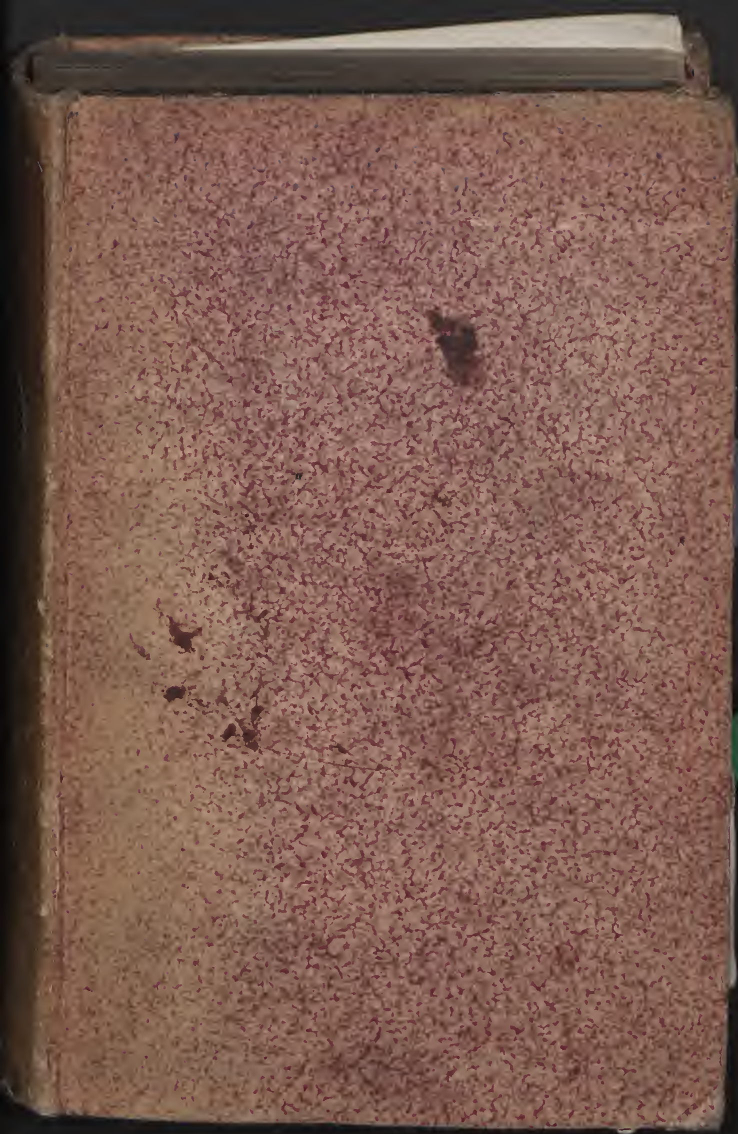



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
2F2 IV 187

LEZIONI ELEMENTARI DI MATEMATICHE

DEL SIG. AB.

MARIE

TRADOTTE E ILLUSTRATE

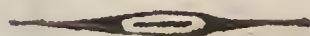
DA STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO

DELLE SCUOLE PIE

Pubblici Professori di Matematica

Ed accresciute di nuovi metodi molto importanti in questa

QUINTA EDIZIONE



FIRENZE MDCCCIII.

A spese di Guglielmo Piatti Mercante di Libri
Presso Pietro Allegrini alla Croce Rossa
Con Licenza de' Superiori

AVVISO

DELL' EDITORE.

Non vi è stato sicuramente alcun Libro di *Matematiche*, che abbia avuto un esito così rapido come le *Lezioni Elementari* dell' Ab. *Marie* tradotte ed illustrate dai celebri Professori *Canovai* e *Del-Ricco*. Quattro successive e ben copiose Edizioni son già esaurite; e le incessanti ricerche che se ne fanno tuttora, autenticando il sommo pregio del Libro, assicurano il pubblico gradimento del mio pensiero di riprodurlo.

Ma poichè i dotti Illustratori che con i loro travagli hanno contribuito al miglioramento d' ogni Edizione, a segno di potersi mettere in dubbio se abbiano pareggiato o forse ancor superato il merito dell' Autore, non potevan forse lasciare che nuovamente uscisse senza qualche ulterior perfezione questo sì celebre Corso di Matematiche, non volli omettere d' implorar la loro assistenza, e con mia piena soddisfazione ottenni cortesemente e abbondantemente di che distinguere questa quinta Edizione:

Molte erano già le ragguardevoli Aggiunte da Essi fatte: e i loro Trattati originali delle *Variazioni*, dell' *Equazioni a Differenze finite e a Differenze parziali* parea che nulla lasciassero da desiderare. Pure il loro genio e l'appassionato trasporto per il vantaggio della Gioventù, gli ha determinati a dare alle Lezioni suddette un ordine più metodico, che in minor volume contenga senza confusione e senza oscurità maggior numero di utili cognizioni, a rifondere totalmente i Trattati delle *Potenze e Radici*, dell' *Infinito*, delle *Ragioni e Proporzioni*, dell'*Equazioni dei Gradi superiori*, le due *Trigonometrie piana e sferica*, e il Trattato delle *Sezioni Coniche;* togliendo intanto alcune inutili ripetizioni, come l' articolo separato della quadratura di queste, incluso nel Calcolo infinitesimale.

Ho conservato in questa Edizione il sistema dei due caratteri, il cui uso la stessa esperienza ha bastantemente raccomandato, contenendo il *piccol carattere* ciò che è riservato a un secondo studio di chi, essendosi impossessato già dei precetti esposti in *carattere maggiore*, brama avanzarsi più oltre: sistema pregiabilissimo che risparmia non poca mole del Libro, conserva l'ordine con maggior rigore, e facilita anche il corso notabilmente; laddove il trascurarlo o il non

avvertirlo farebbe incontrare ai Principianti la confusione e le difficoltà dove tutto è diligentemente spianato, ed esattamente metodico.

Si comprenderà senza pena, che i Numeri da cui son distinti i paragrafi di quest' Edizione non potevano corrispondere a quelli della passata, di cui pur s' incontrano frequenti le citazioni nella seconda edizione e della Fisica-Matematica, e dei preliminarj alle Tavole Logaritmiche, pubblicate dai citati due Professori. Per provvedere al bisogno di chi vorrà prevalersi di questa mia Edizione, è stata fatta una nota dei confronti dei numeri tra essa e la precedente, che io farò stampare immediatamente per darla *gratis* a chiunque avrà l' accennate Tavole e Fisica.

INDICE

Pag.	ver.	ERRORI	CORREZIONI
22	*ult.*	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
56	8	$\frac{m-4}{2}$	$\frac{m-6}{2}$
57	10	$\frac{q}{p^n}$	$\frac{q}{np^n}$
63	11	(337)	(318)
78	18	$\frac{r^3}{3}$	$\frac{r^3}{2.3}$
	22	(193)	(198)
81	18	dividergli per l' unità	dividerne l' unità
87	21	$\left(\frac{\omega-a}{2}\right)$	$\left(\frac{\omega+a}{2}\right)$
143	21	da x	dà x
	29	(163 . 3°.)	(368 . 3°)
148	13	$ex-dx^2$	$ex+dx^2$
200	6	$r^2\pi$	$(r^2\pi)^2$
214	21	$\frac{4}{3}r^2\pi$	$\frac{4}{3}r^3\pi$
215	23	$rz^2\pi$	$r^2z\pi$
231	14	(25)	(630)
242	5	AMN	AMA′
243	13	(677.5)	(680.5)
246	26	$tang\frac{1}{2}g$	$tang\frac{1}{2}g'$
251	3	32° ec.	*cos* 32° ec.
260	27	del cono, l'equazione	del cono (essendo allora A + B > 180°), l'equazione
266	1	PN	PN^2
268	5	FR×FQ	FR×*f*Q
	8	TF	T*f*
	15	(746)	(755)
272	8	*f*M — MA	*f*M — MF
	23	MF	MT
278	21	costituisca FF	sostituisca EF
289	13	(614)	(615)
293	2	$+a^2c^2$	$-a^2c^2$
315	4	$-2a^2z^{\frac{3}{2}}$	$-2a^2z^{\frac{2}{3}}$
321	7	(368)	(868)
322	4	$\mp\frac{px^2}{2a}$	$\pm\frac{px^2}{2a}$
	9	(739)	(759)
326	27	$a:b$	$b:a$

Pag.	ver.	ERRORI	CORREZIONI
337	19	$=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{12}x^9$ ec.	$=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{12}x^9$ ec.
344	10	$\sqrt{(x^2-a)}$	$\sqrt{(x^2-a^2)}$
353	3	(850)	(849)
356	7	$3zp^{-4}dz$	$3zp^{-4}dp$
357	23	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x^2$
365	18	$\frac{9y}{4a})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}}$
371	*ult.*	$2C)-lC']$	$2C)]-lC'$
387	16	seno	senso
389	21	$y=c^m$	$y=c$
393	*ult.*	$u''=\frac{C(g^n \text{ ec.}}{-2\omega(a^n-\text{ec.}}$	$u''=\frac{C(g^n \text{ ec.}}{a^n-\text{ec.}}$

LEZIONI
ELEMENTARI
DI MATEMATICHE.



1. Ciò che può crescere o scemare si chiama *Quantità:* i numeri, il moto ec. son quantità.

2. Le *Matematiche* comprendon tutte le Scienze che trattano delle proprietà e rapporti di queste quantità: ma ciascuna Scienza ha un nome particolare secondo l'oggetto che contempla. Si chiama *Aritmetica* la Scienza dei numeri; *Geometrìa* la Scienza delle misure in lunghezza, larghezza e profondità: *Meccanica* la Scienza del moto e dell' equilibrio ec.

3. L' Aritmetica è il fondamento di tutte le Matematiche: bisogna dunque cominciar questo studio da lei che è inoltre di tanto uso nella Società.

4. Si distinguono due sorte d' Aritmetica: l' *ordinaria* che ha per oggetto il calcolo de' numeri, e la *Speciosa* o l' *Algebra* che abbraccia il calcolo e i rapporti d' ogni specie di quantità.

ELEMENTI DI ARITMETICA.

5. È inutile definir l' *Unità* e la *Pluralità :* tutti ne hanno un' idea distinta. Ma poichè la pluralità risulta da unità particolari, per distinguere una pluralità dall' altra s' immaginò il *Numero*, che è la riunione di molte unità. Quindi tre, sei, venti uomini riuniti, doveano essere espressi con numeri o segni differenti; e potendo concepirsi infiniti uomini, parea necessaria per esprimerli un' infinità di segni, la cui moltitudine avrebbe op-

pressa la memoria, e scoraggiti i più intrepidi Calcolatori. Perciò tutti i numeri si espressero ingegnosamente con la combinazione delle dieci *Cifre* sì note:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
zero,	uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove.

6. Le ultime nove diconsi *cifre significative*, mentre la prima nulla significa se è sola: ma a destra d'un'altra, le dà per convenzione un valore dieci volte più grande; così per esprimer *dieci*, o *l'unità di diecina*, si scrive 10; per esprimer *venti* si scrive 20; *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta* si scrivono 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. *Ogni cifra a destra d'un'altra, la rende* come lo zero *dieci volte più grande*. Un 5, un 4 e un 6 scritti così „ 546 „ son dunque l'espressione del numero *cinquecento quaranta sei* ec.

7. Le tre cifre 546 forman la *classe* delle *unità*: tre altre poste in diritto alla sinistra così „ 921546 „ forman la classe delle *migliaja*, e si pronunziano „ *novecento vent'un mila*, *cinquecento quaranta sei* „: quindi seguon pure a sinistra le classi dei *milioni* e delle *migliaja di milioni*, dei *bilioni* e delle *migliaja di bilioni*, dei *trilioni* e delle *migliaja di trilioni* ec.; e si vede che delle tre cifre d'ogni classe l'una a destra contiene *unità*, l'altra *diecine*, l'ultima *centinaja* tutte le quali son *semplici* nella prima classe, son *di migliaja* nella seconda, *di milioni* nella terza ec. Onde il numero 1 030 010 000 125 812 600 003 diviso in classi, si leggerà: *mille trenta trilioni*, *diecimila bilioni*, *cento venti cinque mila ottocento dodici milioni*, *seicento mila*, *tre*; e il numero *sei trilioni*, *due mila milioni*, *sette* dividendolo in classi, si scriverà: 6 000 000 002 000 000 007; ed è facile dopo ciò di *pronunziar qualunque numero scritto in cifre*, *e di scrivere in cifre qualunque numero pronunziato*.

8. Con queste nozioni e col Binomio di Newton si trova 1°. che l'espression generale d'un numero intero è $10^m a + 10^{m-1} b + 10^{m-2} c +$ ec. . . . $+ z$, ove a, b, c ec. sono una delle dieci cifre primitive, ed m un

numero intero positivo: 2°. che la potenza m^{sima} di 10 diminuita d' 1, è un multiplo di 9: 3°. che le potenze pari di 10 diminuite, e le impari accresciute d' 1, sono un multiplo d' 11: 4°. che il minimo numero di n cifre è 10^{n-1}, il massimo $10^n - 1$, e la potenza m^{sima} di quello ha un numero $m(n-1)+1$ di cifre, di questo ne ha un numero mn: 5°. che un numero di mn cifre ha una radice m^{sima} di n cifre: ec.

9. I numeri sono *interi* o *rotti*. Nei primi ogni unità è un tutto; come due uomini, sette, mille ec. negli altri ogni unità è parte d' un tutto; come due terzi di lega, sette ventesimi ec.

10. I numeri e tutte l'altre quantità sono anche *razionali* o *irrazionali*, *reali* o *immaginarie* già definite (145); *algebriche*, le quali derivano dalle volgari operazioni dell' Algebra, somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione ec., o *trascendenti*, che nascon da operazioni più sublimi, e son composte di logaritmi, di seni, d'archi, d' esponenti variabili, di differenziali, d' integrali ec. Osserveremo a tal proposito 1°. che tra due numeri p, q razionali e comunque contigui, vi è un' infinità d' altri numeri razionali evidentemente espressi da $p + \frac{q-p}{m^r}$ o da $q - \frac{q+p}{m^r}$, ove m, r son numeri interi: 2°. che perciò può sempre aversi una quantità razionale inassegnabilmente diversa da una data irrazionale o trascendente che sarà dunque un limite della razionale (512).

11. Del resto l' Aritmetica o aumenta i numeri, il che si chiama *somma*, o gli diminuisce, il che dicesi *sottrazione*: da queste due dipendono tutte l' operazioni sui numeri. Cominciamo dagl' interi.

Somma.

12. Non vi è difficoltà per *sommare* o raccogliere insieme dei numeri *semplici* o che non passan 10: così 5, 7, 4 sommati fanno 16, e per abbreviare il discorso, si scrive $5+7+4=16$. Il segno $+$, destinato alla somma, si pronunzia *più*; il segno $=$ significa egualità e si pronunzia *eguale*.

13. Se i numeri da sommarsi son *composti*, per esempio, se si cerchi la somma di 432 e di 363, ecco la regola: 1°. *scrivo questi numeri l'un sotto l'altro, onde le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine, le centinaja sotto le centinaja ec.* 2°. *tiro una linea al di sotto, e andando da destra a sinistra, prendo la somma delle unità; se ella non passa 9, la scrivo sotto la colonna delle unità: se passa 9, scrivo le unità e serbo le diecine per aggiungerle alla colonna seguente:* 3°. *prendo nel modo stesso la somma delle diecine, delle centinaja ec., e la scrivo sotto alle colonne corrispondenti*. Così nella prima colonna dico $2 + 3 = 5$; scrivo 5 al di sotto: nella seconda, $3 + 6 = 9$; pongo 9: nella terza, $4 + 3 = 7$; scrivo 7: la somma cercata è 795. Ma se debbo sommar tre numeri, 6078, 9198, 483, gli scrivo l'un sotto l'altro secondo la regola, e dico: $8 + 8 + 3 = 19$ o sia una diecina e 9 unità; scrivo 9 sotto la colonna dell'unità, e tengo la diecina per la seguente. Dico poi: $1, + 7 + 9 + 8 = 25$; scrivo 5 sotto la seconda colonna e tenute le due diecine per la seguente, dico: $2, + 0 + 1 + 4 = 7$, e pongo 7; finalmente dico: $6 + 9 = 15$, e perchè questa è l'ultima colonna, scrivo 15 tutto di seguito: la somma è 15759. Per assicurarsene si rifaccia l'operazione prendendo la somma delle colonne di basso in alto; se si operò bene, deve tornar la stessa. Ma bisogna abituarsi a ben separar le colonne, a ben formar le cifre, e a non dimenticar di aggiungere alla colonna seguente ciò che si ritenne nella precedente.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 363 \\ \hline 795 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6078 \\ 9198 \\ 483 \\ \hline 15759 \end{array}$$

Sottrazione.

14. La sottrazione fa trovar la *differenza* di due quantità date, cioè il resto di una di esse quando se ne è tolta l'altra. Nei numeri semplici si trova senza calcolo. Per esempio, togliendo 2 da 5 riman 3, differenza fra 2 e 5. Questa operazione si esprime così: $5 - 2 = 3$ (il segno − significa *meno*).

15. Ecco la regola dei numeri composti. *Metto il più piccolo sotto al più grande, come nel sommare, e tiro una linea; scrivo poi sotto ciascuna colonna gli eccessi dell' unità, diecine, centinaja ec. del maggiore, sull' unità, diecine, centinaja ec. del minore, e ho la differenza fra i due numeri.* Così per sottrarre 243 da 695, gli scrivo come vedete, e dico: $5-3=2$ che pongo sotto la colonna delle unità: $9-4=5$ che scrivo tra le diecine: $6-2=4$, che pongo tra le centinaja: la differenza cercata è dunque 452.

$$\begin{array}{r} 695 \\ \underline{243} \\ 452 \end{array}$$

16. *Allorchè la cifra inferiore è più grande della superiore, aggiungo a questa una diecina presa dalla prossima cifra a sinistra: e dalla cifra così aumentata sottraggo l' inferiore e scrivo l' eccesso: manca perciò un' unità alla cifra superiore che segue.* Così per sottrar 38 da 64, dico: $4-8$ non si può: stacco un' unità dal 6 e la trasporto alla colonna delle unità dove ella val 10, e aggiungendo queste 10 unità alle 4, dico $14-8=6$: poi $5-3=2$: la differenza è 26.

17. Se la cifra che segue a sinistra sia zero, o s' egli stesso sia seguito da altri zeri, si anderà indietro fino alla cifra da cui può staccarsi un' unità. La decomposizione di quest' unità *cangia in tanti 9 gli zeri precedenti*, e resta una diecina per la cifra che è più piccola dell' inferiore. Per sottrar 18 da 200 dico: $0-8$ non si può; l' unità staccata dal 2 si decompone in dieci diecine, se ne lascian 9 in luogo del secondo zero, e posta la deciina in luogo del primo, dico: $10-8=2$; $9-1=8$; $1-0=1$, e resta 182. Così per sottrar 1296 da 3000, dirò: $0-6$ non si può; dunque: $10-6=4$; $9-9=0$; $9-2=7$; $2-1=1$, e resta 1704.

$$\begin{array}{r} 200 \\ \underline{18} \\ 182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3000 \\ \underline{1296} \\ 1704 \end{array}$$

18. La sottrazione si fa anche in altro modo. Per sottrar 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perchè sono andato a 11: pa-

$$\begin{array}{r} 4571 \\ \underline{2964} \\ 1607 \end{array}$$

rimente da 6, + 1 (= 7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, ma andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, + 1 (= 3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto è 1607.

19. Per verificare la sottrazione, *sommo il resto col minor numero, e se la somma eguaglia il maggiore, l'operazione è ben fatta*; poichè un tutto deve eguagliar le sue parti prese insieme.

Moltiplicazione.

20. La moltiplicazione fa trovar senza gran calcolo la somma di un numero che si vuol prender più volte. Così per trovar la somma di 12 preso 9 volte, invece di sommar 9 volte il 12, il che sarebbe assai lungo, si moltiplica, e si trova in un tratto che la somma è 108.

21. Pur talvolta il sommare è preferibile. Vogliasi un numero k' tale che $101k' + 52$ formi un quadrato. Poichè $101 + 52$ non può esserlo (167), ripeto 101 finchè la somma non ripugni al quadrato: ma 456 non essendo quadrato, continuo l'operazione finchè trovo il quadrato 961. Conto allora i 101 che ho scritti, ed ho $k' = 9$, che non sarebbe venuto sì comodamente moltiplicando 101 per 1, 2, 3 ec. e aggiungendo 52 a ciascun prodotto

101
52
101
101
101
456
101
101
101
101
101
961

22. In quell' esempio, 12 si chiama *il Moltiplicando*, 9 *il Moltiplicatore* e 108 *il Prodotto*: in generale, il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano le *radici* o i *fattori* del prodotto.

23. Se in luogo di sommar nove 12 si sommino dodici 9, verrà la stessa somma 108; onde *preso ad arbitrio l' un de' due numeri per moltiplicando, l' altro sarà il moltiplicatore, e il prodotto non varierà.*

24. Se i numeri son semplici, si vede facilmen-

te che, per esempio, il prodotto di 2 moltiplicato per 3 è 6, il che si esprime così: $2\times3=2\cdot3=6$ (il segno $\times$ o il punto messo tra due numeri, significa *moltiplicato per*); così $3\times4=12$; $7\cdot5=35$ ec. Imparati perciò i prodotti di tutte le combinazioni dei numeri semplici da $2\times2=4$ fino a $9\times9=81$, per moltiplicare i composti, come 32 per 24, 1°. *pongo il moltiplicatore* (questo è per lo più il minore) *sotto il moltiplicando, e tiro una linea*: 2°. *scrivo da destra a sinistra il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicando per ciascuna del moltiplicatore*; così dico: $2\times4=8$, scrivo 8; $3\times4=12$, scrivo 12; poi *scrivo pur da destra a sinistra* (*sotto la colonna delle diecine*) *il prodotto del moltiplicando per le diecine del moltiplicatore*, e dico: $2\times2=4$, scrivo 4 sotto le diecine; $3\times2=6$, scrivo 6 a sinistra; 3°. *sommo questi due prodotti parziali*, e il prodotto totale è 768.

```
 32
 24
---
128
64
---
768
```

25. Infatti moltiplicar 32 per 24 significa sommare il 32 quattro volte e due diecine di volte (20): ma sommandolo quattro volte, vengono 8 unità, 2 diecine, 1 centinajo; e sommandolo due diecine di volte, vengono 4 diecine e 6 centinaja; dunque poichè l' unità, le diecine ec. debbon collocarsi nelle loro respettive colonne (13), scrivendo i prodotti parziali con la regola data, si otterrà il vero prodotto totale.

Debba moltiplicarsi 564 per 249. Scritti i due numeri l' un sotto l'altro, moltiplico tutto il 564 per le 9 unità del moltiplicatore, e dico: $4\times9=36$, scrivo 6 e porto 3; $6\times9=54$, $+3=57$; scrivo 7 e porto 5; $5\times9=45$, $+5=50$, scrivo tutto il 50, perchè la moltiplicazione per la prima cifra è finita. Moltiplico per le 4 diecine del moltiplicatore il 564 dicendo: $4\times4=16$; scrivo 6 tra le diecine e porto 1; $6\times4=24$, $+1=25$; scrivo 5 e porto 2; $5\times4=20$, $+2=22$; scrivo 22. Infine moltiplico 564 per le 2 centinaja del moltiplicatore dicendo: $4\times2=8$; scrivo 8 tra le centinaja; $6\times2=12$; scrivo 2 e porto

```
   564
   249
------
  5076
 2256
1128
------
140436
```

1; 5 × 2 = 10, + 1 = 11; scrivo 11. Il prodotto totale è 140436.

26. Quando vi son degli zeri al fin dell' uno o dei due fattori, si moltiplican l' altre cifre, e si uniscono al prodotto gli zeri tralasciati: così per moltiplicar 120 per 120, preso 12 × 12 = 144, si ha 14400.

27. Per riprova, tolgo dai fattori 564, 249 (25) una cifra qualunque, per esempio il 5, quante volte si può, e noto i due avanzi 4, 4: gli moltiplico tra loro, e dal prodotto 16 tolgo il 5 quante volte si può, notando l' avanzo 1: infine anche dal prodotto 140436 tolgo il 5 quante volte si può, e se l' avanzo sia parimente 1, la moltiplicazione è ben fatta.

4	1
4	1

Poichè sieno F ($= qB + m$) ed F′ ($= qC + n$) i due fattori che contengono B, C volte la cifra qualunque q con gli avanzi m, n; e supposto $qD + r$ ($= mn$) il prodotto di questi avanzi, si avrà $q^2BC + qnB + qmC + qD + r = P$ per prodotto dei due fattori F, F′: ora è chiaro che tolto q quante volte si può 1°. da F, resta m; 2°. da F′, resta n; 3°. da mn, resta r; 4°. da P, resta parimente r.

m	r
n	r

28. Gli Aritmetici preferiscono a tutte la cifra 9, e però questa operazione si chiama *la prova del* 9. Attesa la natura della nostra Aritmetica (6), tolto il 9 quante volte si può da 10, da 100, da 1000 ec., da 20, da 200, da 2000 ec., da 30, da 300, da 3000 ec., resta sempre 1, 2, 3 ec.; dunque per togliere il 9 da un numero 564 = 500 + 60 + 4, basta toglierlo da 5 + 6 + 4, o sommar le cifre del dato numero come se fossero unità, e toglierne il 9 a misura che si forma sommando. Ciò rende la prova più facile, e perciò il 9 fu preferito.

29. La prova del 9 può fallire: se traspongo le cifre d' un prodotto, o metto in esso degli zeri in luogo di 9, o tralascio i 9 e non metto in vece altre cifre ec., torna la prova, e il prodotto è falso. Ma errori ben difficili a commettersi non debbono impedir l'uso d' una regola sì spedita. Del resto, la divisione direttamente verifica la moltiplicazione (42).

Divisione

Divisione.

30. La divisione fa trovar quante volte un numero è contenuto in un altro; e come non vi può esser contenuto se non quante volte ne può esser sottratto, la divisione è una compendiosa sottrazione. Così per saper quante volte il 120 contiene il 4, in vece di sottrarre il 4 da 120 quante volte si può, il che sarebbe assai lungo, divido, e trovo subito che lo contiene 30 volte.

31. In questo esempio, 120 si chiama il *Dividendo*, 4 il *Divisore*, e 30 che mostra *quante volte* il 4 entra in 120, dìcesi il *Quoziente*.

32. Perciò 1°. *il prodotto del divisore per il quoziente è eguale al dividendo:* onde *un quoziente è esatto, se moltiplicato per il divisore, riproduce il dividendo;* e poichè il dividendo è un prodotto i cui fattori sono il divisore ed il quoziente, *dato un prodotto ed un fattore, se quello si divida per questo, si avrà l' altro fattore:* 2°. *per far d' una quantità un dato numero di parti eguali, la divido per questo numero, e il quoziente darà la grandezza di ciascuna parte:* così nell' esempio precedente (30) il 120 è diviso in 4 parti eguali, ciascuna delle quali è 30.

33. Or se i numeri da dividersi son semplici, facilmente si vede che per esempio, 8 contien 4 appunto 2 volte, o che il quoziente di 8 diviso per 4 è 2; ciò si esprime così: $\frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$ (la linea o i due punti messi in questo modo tra il dividendo e il divisore, significano *diviso per*): così $\frac{16}{2} = 8$; $15 : 3 = 5$.

Quando il quoziente non è esatto (come se si divida 9 per 4, dove il 9 contiene il 4 più di 2 volte ma meno di 3, e perciò il quoziente vero è fra 2 e 3) *scrivo per quoziente il più piccolo dei due numeri fra cui è il vero quoziente, e allato ad esso il resto diviso per*

il numero divisore. Per esempio, dico: 9 contien 4 due volte e più, ma non 3 volte: scrivo dunque 2 per quoziente, e resta 1: onde $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, cioè 9 diviso per 4 ha 2 per quoziente, ma resta ancora un' unità del 9 da dividersi in quattro parti. Così $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

34. Osservazioni. I. Se il divisore è più grande del dividendo, come se debba dividersi 4 per 7, si scrive $\frac{4}{7}$, e questo è il quoziente. Tali quozienti, e generalmente tutte le espressioni indicanti divisione per mezzo di una linea o di due punti (33), si chiamano *Rotti* o *Frazioni* (9).

35. II. Una quantità che può dividersi senza resto per un' altra, è *multipla* di questa; cioè *dupla*, *tripla* ec. se il quoziente è 2, 3 ec.: e questa è *summultipla* o *aliquota* della prima, cioè *suddupla*, *suttripla* ec. se entra nella prima 2, 3 ec. volte. Così 10 è duplo di 5; 18 è triplo di 6; 8 è multiplo di 4 e di 2; ogni numero è multiplo d' 1 ec.: all' incontro 2 è summultiplo di tutti i numeri pari; 5 lo è di tutti i numeri terminati in 5 o in 0 ec. Ma la quantità che divisa per un' altra, lascia un *resto*, dicesi *prima* a quest' altra, e ambedue si chiaman *prime tra loro*: così 8 e 5, 14 e 3 son primi tra loro. Per *resto* s' intende in generale ogni numero che tolto dal dividendo, rende esatta la divisione; onde il resto può aumentarsi a piacere o diminuirsi d' un multiplo qualunque del divisore: così il resto di $\frac{8}{3}$ è 2, ed è anche 2 ± 3, 2 ± 6, 2 ± 9 ec.

36. III. La formula dei multipli d' un numero n è mn, preso successivamente $m = 1, 2, 3$ ec.: così se $n = 2$, i multipli di 2 o i numeri pari si esprimeranno con $2m$, onde la formula degli impari sarà $2m \pm 1$. Se $n = 3, 4, 5$ ec., i multipli di 3, di 4, di 5 ec. saranno $3m, 4m, 5m$ ec. Quindi ogni numero intero è compreso da' una delle due formule $2m, 2m + 1$ o $2m, 2m - 1$; e secondo l' occorrenze, si espri-

me pur con $3m, 3m \pm 1$; con $4m, 4m \pm 1, 4m \pm 2$; con $5m$, $5m \pm 1, 5m \pm 2$; con $6m, 6m \pm 2$ per i pari, e $6m \pm 1$, $6m \pm 3$ per gl' impari, d' onde si ha che $6m \pm 3$ essendo multiplo di 3, *tutti i numeri primi, fuorchè 2, 3 son della forma $6m \pm 1$*: così possono aversi altre formule. Ma ecco alcuni utili teoremi, da dimostrarsi in parte con questi princìpj, ed in parte con la formula del Binomio: 1°. la somma, la differenza e il prodotto di due numeri pari, son pari: 2°. la somma e la differenza d'un pari e d'un impari, sono impari: 3°. il prodotto d'un pari per un impari, è pari: 4°. perciò $a(a-1)$ è sempre pari: 5°. la somma e la differenza di due impari, son pari: 6°. il prodotto di due impari, è impari: 7°. se a non sia multiplo di 3, lo sarà $2a^2+1$: 8°. perciò $a(2a^2+1)$ è sempre multiplo di 3: 9°. se $a \pm b$ sia multiplo di p, i resti di a e di b, divisi per p, saranno zero; onde *non curati i multipli di* p, *sarà* a $\pm$ b $=$ o *ed* a $= \mp$ b: 10°. se p sia numero primo, $(a+b)^p - a^p - b^p$ sarà multiplo di p: 11°. perciò lo sarà anche $c^p - c$: 12°. e lo sarà pur $c^{p-1} - 1$ se c non lo sia, ed anche $c^{p-1} - d^{p-1}$ se c, d non lo sieno: 13°. se supposti a, b, c ec. numeri interi dati, il polinomio $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + z$ sia multiplo di D quando $x = \mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{F}''$ ec., lo sarà anche quando $x = \mathrm{F} \pm m\mathrm{D}, \mathrm{F}' \pm n\mathrm{D}, \mathrm{F}'' \pm p\mathrm{D}$ ec., supposti m, n, p ec. numeri interi: 14°. onde i valori di x indipendenti tra loro ed atti a rendere il polinomio ax^n ec. multiplo di D, son tutti compresi tra $-\frac{\mathrm{D}}{2}$ e $+\frac{\mathrm{D}}{2}$.

37. IV. Ogni numero intero non multiplo di altro intero maggior dell' unità, si chiama *numero primo*. Onde un numero primo non potendo finire in 0, 2, 4, 5, 6, 8 perchè i numeri così terminati son divisibili per 2 o per 5 (35), finirà in 1, 3, 7, 9. Su questo principio è costruita la *Tavola dei numeri primi fino a* 100000, che è al fin di quest' Opera. I numeri vi son disposti sotto la lettera N purchè l' ultime due cifre si cerchino nella prima o ultima fila orizzontale: così per sapere se 85577 è numero primo, cerco 855 sotto N, e 77 in alto o in basso, e poichè dirimpetto a 855 e sotto 77 trovo un punto, il numero è primo. Se nel modo stesso cerco 97983, troverò 3, il che

significa che 3 è il minimo divisore o *elemento* di 97983: divido infatti per 3, ed ho 32661 che cerco parimente nella Tavola; trovo 3, per cui pur divido, ed ottengo 10887 sotto cui trovo 3; divido, e viene 3629 sotto cui trovo 19; divido, e viene 191, sotto cui trovo un punto, onde 191 è numero primo: perciò gli elementi di 97983 sono $3\times3\times3\times19\times191$, dai quali poi si ricavano i *divisori* del numero, sol che disposti gli elementi come quì di faccia nella colonna A, si moltiplichi ciascun elemento inferiore per tutti i numeri superiori, lasciando i già scritti una volta. Quindi i divisori di 97983 sono come quì si vede, dei quali prendendo il primo e l' ultimo, il secondo e il penultimo ec. ordinatamente, si hanno a 2 a 2 i *fattori* di 97983, cioè 1×97983, 3×32661, 9×10887, 19×5157, 27×3629, 57×1719, 171×573, 191×513.

A	*Divisori di 97983*
1.	
3.	
3.	9.
3.	27.
19.	57. 171. 513.
191.	573. 1719. 5157. 3629. 10887. 32661. 97983.

38. Il metodo stesso vale anche per le quantità algebriche, e si hanno quì di faccia gli elementi e i divisori di $2ab^2 - 6a^2c$.

	Divisori di $2ab^2 - 6a^2c$
1;	
2;	
a; $2a$;	
$b^2 - 3ac$; $2b^2 - 6ac$;	
$ab^2 - 3a^2c$; $2ab^2 - 6a^2c$.	

39. Sia ora il dividendo un numero composto e il divisore un numero semplice: 1°. *cerco quante volte il divisore sta nella prima cifra sinistra del dividendo* (poichè così si fa sempre la divisione): 2°. *scrivo il quoziente sotto alla corrispondente cifra del dividendo*: 3°. *cangio in diecine l' avanzo, se vi è, l' unisco alla cifra seguente, e replico l' operazioni finchè sian divise tutte le cifre del dividendo*. Così per dividere 7953 per 3, scrivo il divisore a sinistra e poi dico: in 7 quante volte entra il

$$3 \,\underline{)\,7953}$$
$$\quad 2651$$

3? 2 volte; scrivo 2 sotto il 7: unisco l' avanzo 1 cangiato in 10, al 9 seguente, onde ho 19, e dico: in 19 quante volte il 3? 6 volte; scrivo 6 sotto il 9, e il resto 1 unito al 5 seguente fa 15: quindi trovo 5 e poi 1 per quozienti senza resto; onde 3 entra 2651 volte in 7953

40. Osservazioni. I. Si comincia la divisione a sinistra affinchè i resti delle prime cifre possano unirsi alle seguenti; cominciando a destra, bisognerebbe spesso tornare indietro. II. Se la prima cifra del dividendo è più piccola del divisore, si dividon subito le prime due. III. Quando fatta una divisione non vi è resto e la cifra seguente è più piccola del divisore, si mette zero nel quoziente e la cifra avanzata si unisce al solito con la seguente se vi è; lo zero nel quoziente conserva il valor respettivo dell' altre cifre. IV. Bisogna ricominciar la divisione e farla meglio, quando il resto che sempre dee esser più piccolo del divisore, lo eguaglia o lo supera. V. Non si può mai metter più di 9 nel quoziente, perchè la nostra Aritmetica è decimale (6).

41. Infine se il dividendo e il divisore son numeri composti, se per esempio ho da dividere 147475 per 362, scrivo questi due numeri come sopra; poi dico: le tre prime cifre 147 del dividendo non contengono le tre del divisore, astraendo dal valor relativo di 147 (7); dunque prendo le prime quattro 1474, e dico: il 3 in 14 entra 4 volte e resta 2, che col seguente 7 dà 27, e il 6 (seconda cifra del divisore) entra pur 4 volte in 27 e resta 3, che col seguente 4 dà 34, in cui l' ultima cifra 2 del divisore entra pur 4 volte; scrivo dunque 4 nel quoziente, che si pone lungo una linea condotta sul dividendo. Moltiplico il divisore 362 per il quoziente trovato 4, e *sottraggo a mente* il prodotto dal dividendo 1474 dicendo: $4 \times 2 = 8$, e andando a 14 (18) resta 6 che scrivo sotto, e porto 1; $4 \times 6 = 24$, +

$$\begin{array}{r} 407\,\frac{141}{362} \\ \hline 362 - 147475 \\ 2675 \\ 141 \end{array}$$

1 = 25, e andando a 27 resta 2, che scrivo accanto a 6, e porto 2; 3×4 = 12, + 2 = 14, e andando a 14 resta 0.

Accanto al resto 26 abbasso la quinta cifra 7 che segno con un punto per riconoscere di mano in mano ove io sono, e ho da dividere 267 per 362, il che non essendo possibile, scrivo 0 nel quoziente (40), ed abbassata l' ultima cifra 5, ho da dividere 2675 per 362. Dico dunque: il 3 in 26 entra 8 volte e resta 2, che col seguente 7 dà 27: ma il 6 in 27 non entra 8 volte; torno dunque daccapo e dico: il 3 in 26 entra 7 volte e resta 5, che col seguente 7 dà 57, e il 6 in 57 entra pur 7 volte e avanza 15, che col seguente 5 dà 155, in cui entra pur 7 volte l' ultima cifra 2 del divisore; scrivo dunque 7 nel quoziente, e per 7 moltiplico il divisore 362 dicendo: 2×7 = 14, e andando a 15 (18) resta 1 che scrivo sotto e porto 1; 6×7 = 42, + 1 = 43 e andando a 47, resta 4 che scrivo accanto a 1 e porto 4; 3×7 = 21, + 4 = 25 e andando a 26, resta 1 che scrivo accanto a 41, e il quoziente completo è 407 $\frac{141}{362}$.

42. *La riprova si fa aggiungendo il resto al prodotto del divisore per il quoziente:* la lor somma dee uguagliare il dividendo. Poichè se 362 è contenuto 407 volte in 147475 col resto 141 (41), bisogna che 362× 407 + 141 = 147475 (32). Quindi *la divisione è l' operazione inversa della moltiplicazione, e queste due regole si servono scambievolmente di riprova.*

43. Si fa anche la riprova sopprimendo i 9 contenuti 1°. nel divisore, 2°. nel quoziente, 3°. nel prodotto dei loro resti, 4°. nel dividendo, e i due ultimi resti debbono essere eguali come nella moltiplicazione (27). Ma se la divisione ha un resto, bisogna sommarlo col prodotto dei resti del divisore e del quoziente, e toglier dalla somma i 9: così il resto del divisor 362 e del quoziente 407 è 2; il loro prodotto è 4, che col

resto 141 dà 145; tolto il 9, resta 1 che restando anche dal dividendo 147475, mostra esatta l' operazione.

2	1
2	1

44. Osservazioni. I. Se il dividendo e il divisore finiscono in zeri, ne tolgo ad ambedue lo stesso numero: così $\frac{417000}{2500}=\frac{4170}{25}$ (49) $=166\frac{4}{5}$. II. Se il solo divisore finisce in zeri, separo alla fine del dividendo un egual numero di cifre, divido le rimanenti di questo per le rimanenti di quello, congiungo il resto, se vi è, alle cifre separate, e ne fo un rotto: così $\frac{238873}{3600}=\frac{2388}{36}+\frac{73}{3600}$ (49) $=66\frac{1273}{3600}$ (52). III. Il quoziente ha tante cifre quanti sono i punti sotto il dividendo: onde fin dal principio della divisione si sa quante cifre avrà il quoziente. IV. Preso a caso un dividendo D ed un divisore d, si può scommettere $d-1$ contro 1 che la divisione non sarà senza resto. V. Se diviso un numero n per d e per d', si abbiano i quozienti q, q', sarà $\frac{n}{dd'}=\ldots\frac{q\pm q'}{d'\pm d}$.

DEI ROTTI

Natura dei Rotti in generale; loro valore e loro paragone.

45. L' intero diviso in parti eguali, si riproduce dalla lor riunione; se dunque se ne lasci qualche parte, egli sarà un *Rotto* o una *Frazione*.

46. L' idea di frazione comprende perciò il *numero* e la *specie* delle parti eguali in cui fu diviso l' intero: così $\frac{4}{5}$ (che si pronunzia 4 *diviso per* 5 o *quattro quinti*) esprimono 4 parti delle 5 eguali, in cui l' intero fu diviso: il numero superiore 4 le numera e si chiama *Numeratore*, l' inferiore 5 le nomina e dicesi *Denominatore*: ambedue sono i *Termini del rotto*.

47. Un rotto è *proprio*, *apparente* o *improprio* se-

condo che il numeratore è minore, eguale o maggiore del denominatore: così $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$ ec. son proprj, perchè son meno di tutte le parti dell' intero o dell' unità; $\frac{4}{4} = 1 = \frac{11}{11}$ ec. (33) sono apparenti, perchè son tutte le parti dell' unità; $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{103}{20} = 5 + \frac{3}{20}$ ec. sono improprj, perchè son più di tutte le parti dell' unità.

48. *Di due rotti con lo stesso numeratore, quello che ha un minor denominatore è più grande*; così $\frac{1}{2}$ e più d' $\frac{1}{4}$: *con lo stesso denominatore, quello è più grande che ha un maggior numeratore*; così $\frac{2}{3}$ son più d' $\frac{1}{3}$.

49. Il valor di un rotto non si altera o si moltiplichino o si dividano i suoi termini per un medesimo numero. Infatti dividendo 2.3 per 2, e $2.3.5$ per 2.5, si ha sempre il quoziente 3 (32); dunque $\frac{2.3}{2} = \frac{2.3.5}{2.5}$, moltiplicando o dividendo i due termini per 5.

50. Onde *vi è un' infinità di rotti dello stesso valore benchè espressi in termini differenti*; così $\frac{36}{72} = \frac{18}{36} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ove i due termini del primo son divisi per 2, quei del secondo per 3, e quei del terzo per 6, che han dato $\frac{1}{2}$, visibilmente eguale ai precedenti, e che si ha subito, dividendo i termini del primo per 36.

Operazioni preliminari sui Rotti.

51. *Trasformar gli interi in rotti*. Si dà a un intero la forma di rotto 1°. col dargli 1 per denominatore: così

così 6 è $\frac{6}{1}$, $8=\frac{8}{1}$ ec.: 2°. col moltiplicarlo per un dato denominatore: così per ridur 6 al denominatore 7, si scrive $\frac{6.7}{7}=\frac{42}{7}=6$ (49). Per ridurre a un sol rotto un *intero con rotto*, si moltiplica l'intero per il denominatore del rotto, si aggiunge il numeratore al prodotto, e della somma si fa il numerator del rotto cercato; così $6\,\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$, e $3\,\frac{1}{22}=\frac{67}{22}$.

52. *Ridur più rotti allo stesso denominatore*. Moltiplico i termini di ciascun rotto per i denominatori di tutti gli altri, e i nuovi rotti hanno il valor di prima e un denominator comune (49): così per ridurre $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ allo stesso denominatore, moltiplico per 4 tutto il rotto $\frac{1}{5}$, e per 5 tutto il rotto $\frac{3}{4}$, ed ho $\frac{4}{20}$ e $\frac{15}{20}$. Del pari per ridurre i rotti $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, moltiplico per 7.4 il rotto $\frac{2}{3}$, per 3.4 il rotto $\frac{5}{7}$, per 3.7 il rotto $\frac{3}{4}$, ed ho $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$.

53. Moltiplicando i termini di ciascun rotto per ciascun numerator degli altri, si ridurrebbero allo stesso numeratore: così $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ si riducono a $\frac{30}{45}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$.

54. *Ridurre un rotto alla più semplice espressione*. Se il numeratore è più grande del denominatore, si divida quello per questo (33); così $\frac{12}{4}=3$; $\frac{8}{3}$ si riduce a $2\,\frac{2}{3}$. Quindi se posson dividersi senza resto per uno stesso numero i termini del rotto, egli diverrà più semplice senza cangiar valore (49). Serve a questo la Tavola dei numeri primi (37); poichè dato un rotto $\frac{91}{294}$,

cerco in essa gli elementi di $91 = 7 \cdot 13$, e di $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, onde $\frac{91}{294} = \frac{7 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{13}{42}$, rotto più semplice del dato.

55. Si fa anche uso di certe proprietà de' numeri di cui ecco le principali. I. Ogni numero pari è divisibile per 2: così $\frac{128}{432} = \frac{8}{27}$, dividendo quattro volte per 2. II. Ogni numero che finisce in 0 è divisibile per 2 e per 5 (8); così $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. III. Ogni numero che finisce in 5 è divisibile per 5 (8); così $\frac{15}{85} = \frac{3}{17}$. IV. Ogni numero tale che la somma delle sue cifre sia un multiplo di 3, è divisibile per 3 (8); così $\frac{288}{351} = \frac{96}{117} = \frac{32}{39}$: se di più il numero divisibile per 3 è pari, può dividersi per 6: e può dividersi per 9 se la somma delle sue cifre è multipla di 9 (28). V. Ogni numero è divisibile per 2^n se lo sono le sue n ultime cifre: così $\frac{684}{984} = \frac{171}{246}$, e $\frac{120}{784} = \frac{15}{98}$ (8). VI. Ogni numero è divisibile per 11 se le somme delle sue cifre alternative sieno eguali: così $\frac{3256}{467687} = \frac{296}{42517}$ (8).

56. Ma in generale *si riduce un rotto alla più semplice espressione col dividerne i termini per il loro massimo comun divisore*. Per averlo, divido il maggior termine per il minore, e se nulla avanza, il minore è il divisor cercato: se vi è un resto, divido per esso il minor termine, e se nulla avanza, il resto è il divisor cercato: con un nuovo resto, ripeto la divisione, e proseguo finchè avanzi zero; *il resto che precede zero, è il massimo comun divisore:* perciò se l'ultimo resto è 1, il rotto è *irriducibile* o i suoi termini son primi tra loro. Così per ridurre $\frac{91}{294}$, 1°. divido 294 per 91 ed ho 3 di quoziente e 21 di primo resto: 2°. divido 91 per 21, e vien 4 di quoziente e 7 di secondo resto: 3°.

$$\begin{aligned} A &= 294 \\ B &= 91 \ldots 3 = p \\ R' &= 21 \ldots 4 = p' \\ R'' &= 7 \ldots 3 = p'' \\ R''' &= 0 \end{aligned}$$

divido 21 per 7, e ho 3 di quoziente e zero di resto: perciò 7 è il massimo comun divisore, e $\frac{91}{294}=\frac{13}{42}$ (54).

57. Infatti se il rotto è $\frac{B}{A}$, l'operazione prescritta dà l'equazioni quì poste di faccia, ove k, benchè senza le parentesi, sarà in avvenire un numero d'apici (111). Perciò se divisa A per B, si abbia p senza resto, sarà $R'=0$, $A=pB$ e B il comun divisore di B, A: se siavi un resto R', e diviso B per R', venga p' senza resto, sarà $R''=0$, $B=p'R'$, onde $A=(pp'+1)R'$, ed R' il comun divisore: trovandosi un nuovo resto R'', se divisa R' per R'' si abbia p'' senza resto, sarà $R'''=0$, $R'=p''R''$, $B=(p'p''+1)R''$, perciò $A=(p''(pp'+1)+p)R''$, ed R'' il comun divisore ec.

$$\begin{aligned} A &= pB + R' \\ B &= p'R' + R'' \\ R' &= p''R'' + R''' \\ &\vdots \\ R^k &= (pR)^{k+1} + R^{k+2} \end{aligned}$$

58. Onde se nel dato rotto sia $B=0$, verrà $\frac{B}{A}=\frac{0}{A}=\frac{0}{1}$ e potrà farsi $B=0$, $A=1$; e se divisa A per B, venga p senza resto, sarà $A=pB$, $\frac{B}{A}=\frac{1}{p}$ e potrà farsi $B=1$, $A=p$. Unendo questi valori di B, A a quelli trovati di sopra quando $R''=0=R'''$ ec., si avranno le successive equazioni $B=0$, $A=1$; $B=1$, $A=p$; $B=p'R'$, $A=(pp'+1)R'$ ec., in cui se l'ultima R sia 1 e quindi il rotto $\frac{B}{A}$ irriducibile (56), chiamati $M', M'' \ldots M^{k+1}$ i valori di B, ed $N', N'' \ldots N^{k+1}$ quelli di A, si avranno le seguenti equazioni:

$$B=\begin{cases} M=0 \\ M'=1 \\ M''=p'M'+M \\ \vdots \\ M^{k+1}=(pM)^k+M^{k-1} \end{cases} \qquad A=\begin{cases} N=1 \\ N'=p \\ N''=p'N'+N \\ \vdots \\ N^{k+1}=(pN)^k+N^{k-1} \end{cases}$$

59. Quindi l'equazione $A=pB+R'$ (57), postivi successivamente i valori o di $R'=\frac{B-R''}{p'}$, $R''=\ldots\ldots\frac{A-pB-R'''}{p''}$ ec., o di $B=p'R'+R''$, $R'=p''R''+R'''$ ec

e sostituiti M ed N, diviene in generale I^a. A $= \ldots\ldots \frac{BN^k \pm R^k}{M^k}$, preso il + se gli apici k sono impari: II^a. A $= N^{k+1} R^k + N^k R^{k+1}$.

60. Perciò 1°. eguagliati i valori di A, e col metodo della II^a. fatto $B = M^{k+1} R^k + M^k R^{k+1}$, viene $M^k N^{k+1} - M^{k+1} N^k = \pm 1$, cioè i rotti consecutivi $\frac{M^k}{N^k}, \frac{M^{k+1}}{N^{k+1}}$ ec. moltiplicati in croce, differiscono di ± 1, e son tutti irriducibili, non avendo $\frac{M^k}{N^k}$ comun divisore, quando non lo ha $M^k N^{k+1} - M^{k+1} N^k$: 2°. poichè la I^a. ci dà $\frac{M^k}{N^k} = \frac{B}{A} \pm \frac{R^k}{AN^k}$, i rotti $\frac{M^k}{N^k}$ che differiscon dal dato $\frac{B}{A}$ ora in + ed ora in −, sono a vicenda minori e maggiori del dato, e sempre più vi si accostano, attese le differenze sempre minori $\mp \frac{R^k}{AN^k}$ tra $\frac{B}{A}$ ed $\frac{M^k}{N^k}$, nelle quali N o cresce o non scema, ed R scema sempre fino all'ultimo resto $\pm R^{(z)} = \pm 1$: 3°. con questo resto si ha dalla I^a. $BN^{(z)} = AM^{(z)} \mp 1$, cioè *il prodotto di* B *per l'ultima* N *o per* $N^{(z)}$ *è un multiplo* $M^{(z)}$ *di* A, — *ovvero* + 1, *secondo che* z *o il numero dei quozienti* p, p′ ec. *è impari o pari.*

61. Anche il radicale quadratico $\sqrt{l}$, ove l non è quadrato, si tratta come il rotto $\frac{B}{A}$: se ne veda un esempio quì di faccia in $\frac{1}{\sqrt{34}}$. Divido A per B, e poichè A = 5 + un rotto, ho $p = 5$, e (57) $R' = A - pB = \sqrt{34} - 5$. Ora per dividere secondo la regola B = 1 per $R' = \sqrt{34} - 5$, moltiplico i due

$$A \quad \sqrt{34}$$
$$B \quad 1 \; \ldots\ldots\ldots \; 5 = p$$
$$\frac{R' \; \sqrt{34} - 5}{B \; 1(\sqrt{3}, +5)}$$
$$R' \; (\sqrt{34} - 5)(\sqrt{34} + 5) = 9 \ldots 1 = p'$$
$$\frac{R'' \; \sqrt{34} - 4}{R' \; 9(\sqrt{34} + 4)}$$
$$R'' (\sqrt{34} - 4)(\sqrt{34} + 4) = 18 \ldots 4 = p''$$
$$\frac{R''' \; \sqrt{34} - 4}{R'' \; 2(\sqrt{34} + 4)}$$
$$R''' (\sqrt{34} - 4)(\sqrt{34} + 4) = 18 \ldots 1 = p'''$$
$$\frac{R^{\prime v} \; \sqrt{34} - 5}{R''' \; 9(\sqrt{34} + 5)}$$
$$R^{\prime v} (\sqrt{34} - 5)(\sqrt{34} + 5) = 9 \ldots 10 = p^{\prime v}$$
$$R^{v} \; \sqrt{34} - 5$$

ec. ec. ec.

termini per $\sqrt{34}+5$, con che B diviene $\sqrt{34}+5$ ed R' diventa 9: fatta la divisione, ho $p'=1$ ed $R''=\sqrt{34}-4$. Così può proseguirsi ad arbitrio; e con questa operazione si forma la Tavola che daremo altrove (364), e si dimostrano le singolari proprietà dei numeri che la compongono, quella specialmente, di procedere in periodo simmetrico: ma basti averlo accennato.

Somma e Sottrazione dei Rotti.

62. Per sommare o sottrarre i rotti *gli riduco allo stesso denominatore* (52), *che scrivo sotto la somma o differenza dei numeratori*: così riduco $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}$ (il + è per la somma, il − per la sottrazione) a $\frac{3}{6}\pm\frac{2}{6}$, ed ho la somma $\frac{5}{6}$ o la differenza $\frac{1}{6}$. Se vi sono interi con rotti, riduco tutto a rotto (51): così $4\frac{1}{2}\pm 2\frac{1}{3}=\frac{9}{2}\pm\frac{7}{3}=\frac{27\pm 14}{6}$, e la somma è $6\frac{5}{6}$, la differenza $2\frac{1}{6}$.

Moltiplicazione dei Rotti.

63. Se un rotto $\frac{2}{13}$ debba moltiplicarsi per un intero 5, dovrà prendersi cinque volte (20), il che dà $\frac{2.5}{13}$; dunque se l'intero 5 si riduca ad un rotto qualunque $\frac{15}{3}$ (51), si avrà sempre $\frac{2}{13}\times\frac{15}{3}=\frac{2.5}{13}=\frac{2.5.3}{13.3}$ (49) $=\frac{2.15}{13.3}$, cioè *per moltiplicare i rotti, sotto il prodotto dei numeratori scrivo quello dei denominatori*.

64. Onde 1°. *il prodotto di due rotti proprj*, come $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$, *è minore di ciascun fattore*; poichè moltiplican-

do $\frac{5}{7}$ per 1, si avrebbe appunto $\frac{5}{7}$; dunque moltiplicando per $\frac{3}{4}$, cioè per meno di 1, dee aversi meno di $\frac{5}{7}$: 2°. per avere un *rotto d' interi*, basta moltiplicar tra loro al solito il rotto e gl' interi; così volendo $\frac{3}{7}$ di 10 si fa $\frac{3}{7} \cdot 10 = \frac{30}{7}$, perchè una settima parte di 10 è $\frac{10}{7}$ (32), onde tre settime son $\frac{30}{7}$: 3°. per avere un *rotto di rotto*, come $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7}$, il rotto $\frac{2}{7}$ fa figura d' un intero A: ma $\frac{4}{5}$ di $A = \frac{4}{5} \times A$; dunque $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{8}{35}$. Perciò $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ di $\frac{4}{5}$.

65. Se i fattori sieno interi con rotti, gli riduco ad un sol rotto (51): così $3\frac{2}{9} \cdot 7\frac{1}{3} = \frac{29}{9} \cdot \frac{22}{3} = \frac{638}{27}$.

Osservazioni. I. Se un rotto dee moltiplicarsi per un multiplo o summultiplo del denominatore, si riduce prima di moltiplicare: così $\frac{5}{12} \cdot 2 = \frac{5}{6}$ (50). II. Se debban moltiplicarsi più rotti, si cancellin prima, se vi sono, i numeri comuni ai termini del prodotto: così $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Divisione dei Rotti.

66. Se i due termini d' un dividendo $\frac{8}{15}$ sieno respettivamente multipli dei due d' un divisore $\frac{2}{3}$, divisi i numeratori 8, 2 e i denominatori 15, 3, si avrà il quoziente $\frac{4}{5}$ (32).

67. Ora i due termini di qualunque dividendo $\frac{2}{5}$ posson sempre rendersi multipli dei due di qualunque divisor $\frac{3}{7}$; poichè (49) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} : \frac{3}{7}$, onde (66) il quoziente sarà $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$, cioè *per dividere i rotti, rovescio i termini del divisore, e moltiplico tra loro i due rotti al solito* (63).

68. *Il quoziente di* $\frac{2}{5}$ *divisi per un rotto proprio* $\frac{3}{7}$, *è maggiore del dividendo*: poichè divisi $\frac{2}{5}$ per 1, si ha $\frac{2}{5}$; dunque divisi per $\frac{3}{7}$ cioè per meno di 1, dee aversi più di $\frac{2}{5}$ (48).

69. Se i numeri sieno interi con rotti, gli riduco in un sol rotto; così $5\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3} = \frac{11}{2} : \frac{8}{3} = \frac{33}{16}$.

70. Osservazioni. I. Se i rotti hanno lo stesso denominatore, il quoziente sono i due numeratori; così $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$. II. Se i termini del dividendo son multipli o summultipli di quelli del divisore, si riduce prima di dividere; così $\frac{9}{19} : \frac{3}{7} = \frac{21}{19}$.

Frazioni o Rotti Decimali.

71. I *Rotti decimali* hanno per denominator l'unità con uno o più zeri: tali sono i rotti $\frac{3}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{541}{1000}$ ec., e in questa forma son soggetti al calcolo degli altri rotti. Ma alcune regole particolari ci danno per questi un compendio.

72. Ogni cifra alla destra d'un'altra, le dà un va-

lor decuplo (6): così per scriver 3 diecine, si pone o alla destra di 3 e si scrive 30; dunque per scriver 3 decimi, basta por 3 alla destra di o, e scrivere 03. Si è però convenuto di separar gl'interi dai decimi con una virgola, e in vece di scriver $\frac{3}{10}$, si scrive 0,3; così

$0,2 = \frac{2}{10}$; $0,7 = \frac{7}{10}$, ec.

73. Dunque del pari come per scrivere cinquecento si fa 500, così per scrivere cinque centesimi si fa 0,05 ec. In generale si scrive il numeratore come gli interi, e il denominator sott' inteso è l' unità con tanti zeri quante son cifre a destra della virgola.

74. Da ciò si rileva che 2,9654 è un' espression compendiosa di $2 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{4}{10000}$ che può ridursi a $2 + \frac{9654}{10000}$ (52), o a $\frac{29654}{10000}$ (51).

Somma, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione dei Rotti Decimali.

75. Per sommare o sottrarre i decimali, scrivo i numeri l'un sotto l' altro, osservando che le virgole sieno nella stessa colonna: poi gli sommo o gli sottraggo al solito, e scrivo la virgola sotto l' altre.

	4852,791		
	4,00745		6,00435
	0,0049		0,17
Som.	4856,80335	Diff.	5,83435

76. La moltiplicazione dei decimali si fa al solito senza curar le virgole: ma *quanti decimali sono nei fattori, tante cifre a destra si separano nel prodotto*, in cui se non ne sieno abbastanza, si supplisce a sinistra con degli zeri, come nel quarto esempio seguente. La riprova si fa al solito.

43,7	2,4542	4,12	21,32
13	0,053	3,7	0,000103
1311	73626	2884	6396
437	122710	1236	2132
568,1	0,1300726	15,244	0,00219596

Infatti $4,12 \times 3,7 = \frac{412}{100} \times \frac{37}{10}$ (74) dà un prodotto di millesimi (63) che si esprimono con tre decimali (73), quanti ne hanno i fattori.

77. Si moltiplica un decimale per 10, 100, 1000 ec. con tirar la virgola a destra per tante cifre quanti sono zeri nel moltiplicatore: così $45,3289 \times 100 = \ldots\ldots$ 4532,89 .... $0,007854 \times 10000 = 78,54$.

78. Se i fattori hanno molti decimali e non bisogna un risultato esatto (come se dovendo moltiplicar 45,625957 per 28,635, mi basti un prodotto con tre decimali) rovescio l'ordine dell'uno e lo scrivo sotto l'altro facendo risponder la cifra delle sue unità sotto il decimale inferior di due gradi a quello a cui voglio limitare il prodotto. Quindi moltiplico, e trascuro nel moltiplicando tutte le cifre a destra di quella per cui moltiplico, e a misura che muto cifra nel moltiplicatore, scrivo la prima del nuovo prodotto sotto la prima del passato. Fatta la somma di questi prodotti, sopprimo le due ultime cifre, osservando d'aumentar d'un'unità l'ultima che resta se le due soppresse passan 50: dopo ciò, separo i decimali che mi proposi d'avere, e trovo 1306,499.

45,625957
53682
91251914
36500760
2737554
136875
22810
130649913

79. Se nel moltiplicando non fossero tanti decimali quanti dalla regola è prescritto, si supplirebbe con degli zeri. E' facile di rendersi ragione delle differenti parti del metodo, che però non ha luogo in due casi assai rari: 1°. se gli interi uniti ai decimali son numeri molto grandi: 2°. se i decimali son molti ed espressi con le cifre massime 8, 9.

80. La divisione dei decimali si fa al solito, ma *si separano nel quoziente tante cifre a destra quanti decimali ha il dividendo più del divisore.*

3	2,6	2,44
2,3115 / 6,9345	3,22 / 8,445	20,074 / 49,10000
	2005	89520
	73	92240
		11944

Infatti $8,445 : 3,22 = \frac{8445}{1000} : \frac{322}{100}$ dà un quoziente di decimi (67), che si esprimono con un decimale, come il dividendo ne ha uno più del divisore.

81. Se il divisore ha più decimali del dividendo (3°. esemp.) gli si aggiungono degli zeri che non ne alterano il valore (73): e volendo considerare i resti delle divisioni, si aggiungono nuovi zeri; così (2° esemp.) aggiunti tre zeri al resto 73, si ha il quoziente 2,6226 con un resto 228 ec.

82. Si divide un decimale per 10, per 100 ec. con avanzar la virgola di uno, di due gradi ec. verso la sinistra: così 124,65 : 100 = 1,2465.

83. Se i decimali del dividendo 32,2273481 son troppi, gliene lascio tanti più uno quanti ne voglio nel quoziente (quì ne voglio tre); divido al solito, e distinguo nel quoziente gl' interi (80). Se vi è un resto (come quì 4339) continuo a dividere (soppressa nel divisore l' ultima cifra a destra) per 9,35: poi divido il nuovo resto, soppressa un' altra cifra, per 9,3: e così continuo finchè ho tanti decimali più uno, quanti ne volli; sopprimo quest' uno, e se sia maggior di 5, aggiungo un' unità al precedente. Quì si ha 3,446.

	3,4464
9,351	32,2273
	41743
	4339
	599
	41
	5

Trasformazione e utilità dei Decimali.

84. I rotti decimali si trasformano in un' infinità d' altri dello stesso valore col solo aggiungere uno, due, tre zeri ec. alla destra del rotto (73); e però 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = ec.

85. Quindi posson sopprimersi gli zeri finali di un rotto decimale senza alterarne il valore: ma sopprimendo altre cifre, il valore scemerebbe: così 0,683 e 0,68 differiscono di $\frac{3}{1000}$.

86. Per altro la differenza è tanto minore quante più son le cifre del rotto: così 0,680003 scema solo di $\frac{3}{1000000}$ soppressa l' ultima cifra 3; onde posson trascurarsi dei decimali senza diminuirne molto il valore.

87. Si corregge però almeno in parte l' errore, aggiungendo un' unità all' ultima cifra restante, se la soppressa supera 5. Poichè 5 è una mezza unità dell' ordine contiguo a sinistra; onde se la cifra soppressa è minor di 5, l' errore sarà men d' una mezza unità; se è 5, sarà d' una mezza unità aggiungendo o non aggiungendo 1; e se supera 5, l' errore sarà più d' una mezza unità non aggiungendolo.

88. Nei calcoli ordinarj spesso bastano sei decimali, e anche due o tre se le circostanze non esigono grande esattezza; così prenderò senza error sensibile 15,3 per 15,3049: ma se 15,3 debba poi moltiplicarsi per numeri grandi, come 8476, i decimali soppressi produrranno un errore di circa 42 interi.

89. Di due decimali con le stesse prime cifre quello è maggiore che ha qualche cifra significativa di più: così 0,763 è maggiore di 0,76.

90. E se le prime cifre non son le stesse, il più grande è quello che le ha maggiori: così 0,54 supera 0,53999, benchè a questo secondo si aggiungessero infinite cifre: onde 0,5399 è minor di 0,54 e maggior di 0,539 (89); e 0,53992 si accosta più a 0,54 che 0,5399.

91. Di quì la principale utilità dei decimali per accostarsi sempre più al valor rigoroso che spesso non può aversi. Tutte le Matematiche offrono esempj di queste *approssimazioni*; eccone alcuni cavati dall' Aritmetica.

92. Dividendo 147475 per 362, il quoziente è $407 \frac{141}{362}$; ma la forma di questo rotto è incomoda se si tratti di valutarlo. Lo trasformo dunque in un altro del valore stesso o che vi si accosti quanto si vuole.

93. Aggiungo degli zeri al resto di divisione, onde continuarla; e poichè quest' aggiunta ingrandisce di 10, 100, 1000 volte ec. il dividendo, correggo l' errore e colloco i quozienti tra i decimi, centesimi, millesimi ec. Aggiunti trè zeri al resto 141, divido 141000 per 362; scrivo il quoziente 389 tra i decimali, e se tre mi bastino, trascuro il resto 182. Perciò $407 \frac{141}{362} = 407,389$ che differisce dal vero men d' un millesimo.

94. Così i rotti ordinarj si trasformano in decimali o eguali o approssimati quanto piace: per esempio, $\frac{1}{2}$ si trasforma in 0,5 esattamente; poichè aggiunto uno zero al numeratore 1, si ha 5, onde $\frac{1}{2} = 0,5$. Ma $\frac{1}{3}$ dà solo un' approssimazione; perchè aggiunti gli zeri, il quoziente è 3 in infinito; quindi $\frac{1}{3} = 0,333$ ec. Il rotto $\frac{1}{7}$ è nello stesso caso; messo in decimali, dà il *periodo* 0,142857 142857 142857 ec., onde ripetendolo, si ha l' approssimazion che si vuole, senza bisogno di calcolo. In generale, non può esattamente ridursi in decimali un rotto ordinario se le stesse cifre tornino con lo stess' ordine. Il denominatore dà il limite più lontano del loro ritorno; per esempio, il denominator 7 indica che riducendo $\frac{1}{7}$ in decimali, le cifre non posson ricomparir nello stess' ordine più tardi del settimo luogo, e se ne troverà facilmente la ragione: ma ritornano spesso prima del

luogo segnato dal denominatore, come si vede nel rotto $\frac{1}{3}$.

Altri Rotti.

La specie dei rotti è relativa all' unità di cui son parte; è poichè le Scienze, l' Arti e la Società usano diverse sorte d' unità, ecco i nomi dei loro rotti più comuni.

95. La *Circonferenza del Circolo* fu divisa in 360 parti eguali chiamate *Gradi* (si preferì il numero 360 ad ogn' altro inferiore e superiore, perchè ha più divisori esatti con minor quantità di cifre); onde il grado è $\frac{1}{360}$ della sua circonferenza: ma bisognando spesso diverse parti del grado, si considerò anche lui come un' unità divisa in 60 parti eguali o *Minuti;* onde ogni minuto è $\frac{1}{60}$ di grado ed $\frac{1}{21600}$ di circonferenza: per aver una misura ancor più precisa, si suddivise il minuto *Primo* in 60 *Secondi*, il secondo in 60 *Terzi* ec.; onde la circonferenza ha 1296000 secondi e 77760000 terzi, ed il grado è 3600 secondi e 216000 terzi. Si son dati dei segni a queste diverse parti, ed in vece di scrivere 18 *gradi*, 34 *minuti*, 53 *secondi*, 26 *terzi*, si scrive $18^{\circ}\ 34'\ 53''\ 26'''$.

96. La divisione del tempo in *Giorni* è antica quanto il Mondo, e si divise arbitrariamente il giorno in 24 parti eguali che formarono l' *ore;* l' ora è dunque $\frac{1}{24}$ di giorno e si suddivide come il grado in 60 minuti, il minuto in 60 secondi ec. Il giorno è dunque $= 1440' = 86400'' = 5184000'''$, e il minuto $= 3600'''$.

97. Per misurare le *Distanze* si prese un' unità di nota lunghezza e si portò successivamente sulla distanza da misurarsi. Quest' unità tra noi si chiama *Braccio*, tra i Francesi *Tesa*, misure però diverse fra

loro. La tesa ha 6 parti eguali chiamate *Piedi*, il piede ha 12 *Pollici*, il pollice 12 *Linee* e la linea 12 *Punti*; onde il piede è $\frac{1}{6}$ della tesa, il pollice $\frac{1}{72}$ ec. Il braccio ha 20 parti chiamate *Soldi* ec.

98. I bisogni della Società introdussero i *Pesi* e le *Monete*. L' unità del peso si chiamò *Libbra*, e quella della moneta *Lira*. La prima si divide tra noi in 12, tra i Francesi in 16 parti eguali dette *Oncie*; l' oncia è tra noi 24 *Denari* e tra i Francesi 8 *Grossi*; il denaro è 24 *Grani*, ed il grosso 72. Una libbra pesa dunque tra Francesi 128 grossi o 9216 grani, fra noi 288 denari o 6912 grani: i Francesi hanno anche il *Marco*, metà della libbra o oncie 8. La lira si divide in 20 *Soldi* e il soldo in 12 *Denari*: l' altre monete si rapportano ordinariamente a lire, soldi e danari.

99. Or per sommar queste specie, scrivo l' une sotto l' altre le parti del nome stesso; poi sommo le colonne al solito, e scrivo il resto, tolte se si può, le specie maggiori, che porto alla colonna seguente. Esempj.

36°	25′	47″
49	33	28
55	31	49
141	31	4

tese	piedi	poll.	lin.	pun.
9.	3.	11.	2.	7
100.	0.	0.	0.	0
47.	5.	3.	8.	0
11.	0.	10.	8.	4
168.	4.	1.	6.	11

lire	soldi	den.
325.	17.	4
15.	11.	6
25.	1.	8
4.	10.	0
371.	–.	6

100. Così le stesse specie si sottraggono; e se l' inferiore è più grande, si toglie un' unità dalla colonna che segue nel numero superiore, per decomporla in tante unità del genere di quelle da sottrarsi. Esempj.

48°	16′	17″
24	23	12
23°	53′	5″

tese	pi.	po.	l.	p.
100.	0.	0.	0.	0
17.	4.	5.	11.	8
82.	1.	6.	0.	4

lire	sol.	den.
655.	3.	4
30.	6.	8
624.	16.	8

101. La moltiplicazione si fa nella maniera seguente. Si cerchi per esempio, il prezzo di Braccia 246 di Stoffa a $6^{l}.\ 15^{s}.\ 9^{d}$ il Braccio. Moltiplico le date lire ec. per 10 e scrivo il prodotto di sopra; moltiplico nuovamente per 10 questo prodotto, e ciò tante volte quante bisogna per distribuir le cifre del moltiplicatore come nell'esempio. E' chiaro che moltiplicando la quantità superiore (centupla della data) per 2, avrò il valor di 200 braccia; moltiplicando la quantità che segue (decupla della data) per 4, avrò il valor di 40 braccia; e finalmente moltiplicando per 6 la data, avrò il valor di 6 braccia; i quali valori raccolti mi danno il prezzo di braccia 246.

	678.	15.	–	× 2
	67.	17.	6	× 4
B. 246 a ℨ	6.	15.	9	× 6
	1357.	10.	–	
	271.	10.	–	
	40.	14.	6	
Som. ℨ	1669.	14.	6	

Se anche il moltiplicatore contenga diverse specie, e si cerchi, per esempio, il prezzo di 42.^{tese} 5.$^{pie.}$ 4$^{pol.}$ a lire 18. 6. 8. la tesa, moltiplico le lire come sopra per 10 ec., e poichè i piedi sono $\frac{1}{6}$ della tesa, divido le lire date per 6, e il quoziente per 12, perchè i pollici sono $\frac{1}{12}$ del piede. Fatto ciò, distribuisco il moltiplicatore come nell'esempio; il primo e secondo prodotto danno il valor degl'interi: il terzo e quarto danno i sesti ed i dodicesimi di un sesto; onde la somma di tutto è il prezzo cercato.

tese pie. pol.		183.	6.	8	× 4
42. 5. 4 a ℨ		18.	6.	8	× 2
	6	3.	1.	1 $\frac{1}{3}$	× 5
	12	–.	5.	1 $\frac{1}{9}$	× 4
		733.	6.	8	
		36.	13.	4	
		15.	5.	6 $\frac{2}{3}$	
		1.	0.	4 $\frac{4}{9}$	
Som. ℨ		786.	5.	11 $\frac{1}{9}$	

Se in vece di moltiplicar le lire moltiplicassi le tese, avrei il prodotto in tese e non già in lire (come talvolta può bisognare); e questo prodotto sarebbe 786^{t}. 1^{pi}. 9^{pol} $\frac{1}{3}$, un poco diverso da quel di sopra

nelle frazioni; per altro $5^{s}.\ 11^{d}\ \frac{1}{9}$ rispetto alle lire, son precisamente lo stesso che $1^{Pi}.\ 9^{Pol}\ \frac{1}{3}$ riguardo alle tese, cioè $\frac{8}{27}$.

Osservate 1°. che il rotto di specie superiore si riduce all' inferiori col moltiplicarlo per il loro numero caratteristico; così per aver $\frac{7}{12}$ di lira in soldi e denari, si dirà: $\frac{7}{12} \times 20 = 11\frac{2}{3}$ soldi, e poi $\frac{2}{3} \times 12 = 8$ denari; onde $\frac{7}{12} =$ ℨ –. 11. 8: 2°. che all' opposto le specie inferiori si riducono alla superiore col dividerle per il loro numero caratteristico; così ℨ 2. 3. 4. $= 2 \cdot 3\,\frac{4}{12} \cdot - = 2 \cdot 3\,\frac{1}{3} \cdot - = 2\,\frac{10}{3 \times 20} = 2\,\frac{1}{6}$. Ecco altri esempj.

I. Una libbra di tabacco costa lire 3. 4. —; quanto costeranno 19 libbre e 13 once? (presa la libbra Francese). *Risp.* lir. 63. 8. —. II. La tesa di un muro, di cui son date la grossezza e l' altezza, costa lire 37. 10. —: che costeranno $9^{t}.\ 5^{Pi}.\ 11^{Po}$ di questo muro? *Risp.* lir. 374. 9. 7. III. Dee pagarsi un cerchio diviso in gradi, minuti e secondi a ragione di lire 7. 8. — per grado: l' artefice ha già divisi 258° 48′ 12″: di qual somma sarà egli creditore al presente? *Risp.* di lir. 1915. 2. 10 $\frac{18}{25}$.

102. In vece del metodo già spiegato (101), si può trasformare il moltiplicando e il moltiplicatore in parti dell' ultima specie, e moltiplicare insieme i rotti che ne risultano, e che poi si riducono. Così nell' esempio di sopra, le $42^{tese}\ 5^{Pi}\ 4^{Pol}$ (che sono $42 + \frac{5}{6} + \frac{4}{72}$ di tesa) si ridurranno a $\frac{386}{9}$ di tesa, e le lire 18. 6. 8. (che sono $18 + \frac{6}{20} + \frac{8}{240}$ di lira) a $\frac{55}{3}$; moltiplicati questi due rotti, si avranno $\frac{21230}{27} = 786\,\frac{8}{27}$, cioè lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$, o tese 786. $1^{Pie}.\ 9^{Pol}\ \frac{1}{3}$ come sopra.

103. Quanto alla divisione, voglia verificarsi il primo esempio di sopra, cioè si debban dividere lire 1669. 14. 6 per 246. Divido le lire, ed ho il quoziente 6 col resto 193 che riduco a soldi, moltiplicandolo per 20, ed aggiungendo al prodotto i soldi della quantità proposta. Proseguo al solito la divisione ed ho 15 di quoziente col resto 184 che moltiplico per 12, e coll' aggiunta de' 6^{d} ho per prodotto 2214

e per

e per quoziente 9 senza resto, come doveva essere. Se l'avanzo moltiplicato per il numero respettivo, fosse più piccolo del divisore, passerei a moltiplicarlo per il numero caratteristico della specie seguente, scrivendo zero al quoziente: così dividendo lire 526. –. 5 per 35, ho lire 15. –. 7.

```
              | 6.    15. 9
per 246 – ₤ 1669.   14. 6
              193   ×20
              ----
              3874
              1414
               184  ×12
              ----
              2214
                00
```

Quando il divisore contiene anch'esso diverse specie, ecco la regola. Si vuol dividere ₤ 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ per 42 tese. 5 pie. 4 pol in riprova del calcolo del secondo esempio (101).

Riduco il divisore alla specie ultima, come quì le tese a pollici; cioè moltiplico 42 × 6, aggiungendo al prodotto (che son le tese ridotte in piedi) i 5 piedi del divisore, ed ho 257; moltiplico 257 × 12, e al prodotto (che son le tese e i piedi ridotti in pollici) aggiungo 4 ed ho 3088 pollici o sia $\frac{3088}{72}$ di tesa. Dipoi moltiplico per 72 le lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$. (E' chiaro in fatti che per dividere questa quantità per un rotto, dee cominciarsi dal moltiplicarla per il suo denominatore (67)). Finalmente divido il prodotto, che è 56613. 6. 8

```
tese pie.pol.   | 18.     6. 8
 42. 5. 4 – ₤ 786.    5. 11 1/9 ×72
 42 ×6          56613.   6. 8
 ----
 257×12         25733
 --------        1029×20
 3 0 8 8         -------
                20586
                 2058×12
                 -------
                24704
                   00
```

per 3088 come nell esempio, e trovo il quoziente 18 6 8

Dovendo divider ℨ 786 5 11 $\frac{1}{9}$ per ℨ 18 6 8 prezzo della tesa, per avere il quoziente in tese, riduco le specie inferiori alla superiore, ed ho ℨ 18. 6 8 $= 18\frac{1}{3} = \frac{55}{3}$, ℨ 786 5 11 $\frac{1}{9} = 786\frac{8}{27}$, onde 786 $\frac{8}{27} \cdot \frac{55}{3} = 2358\frac{8}{9}$ 55 = tes 42 5 4

104 Per ridurre un numero m di monete d'una specie ad un numero m' di monete d'un'altra, e reciprocamente, osservo che una moneta d'ambedue le specie essendo un numero q, q' di monete omogenee di specie infima come di Quattrini, dovrà aversi $qm = q'm'$, formula della riduzione quando son dati q, q', ed m o m'. Così se m siano Lire Toscane ed m' siano 1° Paoli, ho $q = 60$, $q' = 40$ e $60m = 40m'$ o $3m = 2m'$, 2° Papetti, ho $q' = 76$ e $60m = 76m'$ o $15m = 19m'$; 3° Pezze, ho $q' = 345$ e $60m = 345m'$ o $4m = 23m'$ ec.

Queste son le regole principali dell'Aritmetica. Per insegnare in un modo più generale la Formazione delle Potenze, l'Estrazion delle Radici, la Regola del Tre ec, premetteremo alcuni capi del Calcolo Algebrico.

ELEMENTI D' ALGEBRA

L' ALGEBRA è una specie d' Aritmetica universale, i cui principali vantaggi sono 1°. di far vedere in un modo generale ciò che l' Aritmetica dimostra per casi particolari: 2°. di condur prontamente a risultati che rare volte l' Aritmetica ottiene senza lunghe ed incerte operazioni: 3°. di esprimere con singolar laconismo questi stessi risultati che l' Aritmetica esprime con molte parole: 4°. di risolvere un' infinità di Problemi che l' Aritmetica non potrebbe: 5°. di dare all' Aritmetica stessa in operazioni complicate molti metodi che diminuiscon la fatica.

NOZIONI PRELIMINARI.

Ogni Scienza ha il suo linguaggio; l' Algebra lo ha più singolare dell' altre, e convien cominciare dal rendersi familiari le sue espressioni.

105. Tutte le cifre hanno un valor determinato: così la cifra 3 che può significare egualmente 3 pollici, 3 tese, 3 leghe ec., non può significar cento o mille; onde le cifre non son segni sì generali da rappresentar tutte le quantità possibili; perciò si pensò ad altri *segni* il cui valor non fissato, potesse variare ad arbitrio. Questi segni son le lettere dell' Alfabeto volgare e greco, le quali di più hanno talora un piccolo *apice* come a', b'' che si legge *a prima*, *b seconda* ec.; ciascun le conosce e son suscettibili di qualunque valore, che dato loro in principio si conserva poi per tutta l' operazione.

106. Si chiama dunque *Espressione Algebrica* tutto ciò che è notato con lettere, e si rappresentano con certi altri *segni* le diverse operazioni che posson

farsi su queste espressioni; così per sommare a, b, si scrive $a + b$ (12); per sottrarre c da d, si scrive $d - c$ (14); per esprimere b maggiore di a, si scrive $b > a$, e per esprimerlo minore, si fa $b < a$. La moltiplicazione di x per y si indica con $x \times y$ o con $x \cdot y$ (24), anzi si stima fatta quando una lettera è seguita da una o più altre senza interruzione di segni: così $xy = x \times y$, $abc = a \times b \times c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o con $a : b$ (33).

107. Si chiama *Monomio* o *Termine* ogni quantità che non è unita ad altre coi segni $+$, $-$. Dalle lettere del monomio risultano le sue *dimensioni*, ed ogni lettera forma una dimensione: così a è un monomio d'una dimensione, mn lo è di due, bcd di tre, $\frac{zz}{\varphi}$ di una, $\frac{\omega}{\beta}$ di niuna, nel qual caso il monomio si riduce a *semplice numero*: tutto ciò si intenderà meglio nella Geometria. Si chiama *Binomio*, *Trinomio* ec. la riunione di due, tre ec. termini; e in generale, più termini riuniti diconsi *Polinomio*, che sarà *omogeneo* se tutti i suoi termini abbiano lo stesso numero di dimensioni.

108. I termini sono o *Positivi* o *Negativi*; quelli son preceduti dal $+$, questi dal $-$, con che si indica che gli uni sono opposti agli altri nel loro modo di esistere: così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$; se una linea che da un punto va a destra o all'insù, si esprime col $+$, un' altra che dal punto stesso vada a sinistra o all'ingiù, dovrà esprimersi col $-$. Or poichè un credito si annulla da un egual debito, lo *zero* sta in mezzo tra i termini positivi e i negativi; ed *un termine si dirà positivo o negativo se sarà maggiore o minor di zero*. Del resto quando il primo termine d'un polinomio non ha segno, si ha per positivo.

109. Spesso occorrono i termini stessi in un polinomio, come $a + a + a - b - b + d$: allora si scrivono una

sóla volta, segnando con una cifra a sinistra quante volte debbon ripetersi. Quindi $a+a+a-b-b+d$ diventa $3a-2b+d$, e la cifra 3, 2 che precede i termini, si chiama *Coefficiente*; se ella manchi, il coefficiente è 1; così la lettera d è un' espression compendiosa di $1d$, ed $fh-pq = 1fh-1pq$ ec.

110. Una quantità moltiplicata per se stessa o si scrive due, tre ec. volte di seguito senza segno (106) come aa, prodotto di a per a, aaa prodotto di aa per a ec., o con una cifra a destra ed in alto si accenna quante volte ella dovrebbe scriversi: così a^2 è un compendio di aa, $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$ ec. Queste cifre in alto diconsi *Esponenti*, nè bisogna confonderle coi coefficienti; i coefficienti indican somma, e gli esponenti moltiplicazione: così $3a = a+a+a$, mentre $a^3 = aaa$, e se $a=5$, viene $3a=15$ ed $a^3=125$.

111. Se l' esponente manchi, egli è l' unità: così bc è lo stesso che b^1c^1, $xxxyyz = x^3y^2z^1$. Per distinguer poi l' esponente numerico n dal numero n d' apici (105), questo si scrive (n): così a^n esprime a moltiplicata $n-1$ volte per se stessa, ma $a^{(n)}$ significa a con gli apici n.

112. Si riuniscono allo stesso coefficiente i soli *termini simili* cioè *formati con le stesse lettere ognuna con uno stesso esponente*: così $a+3a+4a$ son termini simili, poichè la stessa a è presa una, tre, quattro volte; posson dunque riunirsi allo stesso coefficiente e scrivere $8a$.

113. Se $+3a$ fosse $-3a$, la stessa quantità a sarebbe sottratta tre volte, onde da $a+4a$ tolto $3a$, resterebbe $2a$; che se si abbia $a+3a-4a$, i positivi distruggeranno i negativi. Queste *Riduzioni* son frequentissime; eccone la regola:

114. *Bisogna ridurre ad un sol termine o scancellare i termini simili*. Si scancellano se con coefficienti eguali hanno segni contrarj: così $2a+b-2a-b$ va a 0. Si riducono ad un sol termine se hanno lo stesso o con-

trario segno; allora la somma o la differenza dei loro coefficienti è il coefficiente del nuovo termine; così $f^2 - 3x + 4f^2 - 8x = 5f^2 - 11x$, $\frac{3}{4}\pi + 2\varphi - \frac{1}{4}\pi - 15\varphi = \frac{2}{4}\pi - 13\varphi$.

115. E' uso di seguir l' alfabeto nelle lettere di ciascun termine: così si scrive piuttosto *abc* che *cba*, piuttosto $\gamma\pi$ che $\pi\gamma$: ciò contribuisce a far meglio conoscere i termini simili.

Somma Algebrica.

116. Per sommar le quantità algebriche basta scriverle l' une dopo l' altre coi segni che hanno, e farne la riduzione se ha luogo: così la somma di cdn, $4m^2$ è $cdn + 4m^2$; quella di $xy + z^3$, $u - t - z^3$ è $xy + u - t$; quella di $2m + 3n - q$, $q - 2m - 3n$ è zero; e di $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ è $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Sottrazione Algebrica.

117. Per sottrarre una quantità algebrica da un' altra, le cangio i segni e la scrivo allato all' altra, fatta la riduzione se ha luogo: così sottraggo p da r scrivendo $r - p$; sottraggo $m^3 - n^4 - g$ da $x^3 z - u^2$, scrivendo $x^3 z - u^2 - m^3 + n^4 + g$, e per sottrarre $\frac{c}{d}$ da $\frac{a}{b}$ scrivo $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

118. Questa mutazione di segni nella quantità da sottrarsi è chiara quando si muta + in −, poichè per indicar la sottrazione d' una quantità positiva p bisogna darle la forma negativa $-p$ (108): ma non par sì chiaro che per sottrarre una quantità negativa $-p$, bisogni scriver $+p$.

119. Rammentiamoci però che la quantità sottratta dee col resto della sottrazione render la quantità da

cui si sottrasse (19): or questa non si riavrebbe senza mutare i segni alla quantità da sottrarsi; per esempio, se $-g$ fu sottratto da c, il resto sarà $c+g$, perchè sommando $c+g$ con $-g$, torna c.

120. Si osservi che per indicar la differenza positiva di due quantità a, b, qualunque di esse sia la maggiore, si adopra il particolar segno $\backsim$ e si scrive $a \backsim b$, il che vuol dire nel tempo stesso $a-b$ se $a>b$, e $b-a$ se $a<b$.

Moltiplicazione Algebrica.

Ogni termine algebrico è composto di quattro parti: del Segno che lo precede, del Coefficiente a cui è unito, delle Lettere che contiene, e degli Esponenti di esse. Ora la moltiplicazione di due termini algebrici esige delle regole per tutte queste parti.

121. Regola per i Segni. *I fattori con segni simili danno il prodotto col* $+$, *con segni diversi lo danno col* $-$: così $a\times b=ab$, $-a\times-b=ab$, $a\times-b=-ab$, $-a\times b=-ab$. Infatti moltiplicar per esempio -4×6, significa sommar sei volte il numero -4, ciò che dà -24 (116); e moltiplicar -5×-6 significa negare o sottrar sei volte da zero il numero -5, ciò che dà $+30$ (117). E' però assurdo il dire che $+\times+$ dà $+$, che $+\times-$ dà $-$ ec., perchè si moltiplicano le quantità, non i segni: ma l'uso autorizza tali locuzioni.

La regola dei segni, supposto $+\times+=+$, si dimostra anche così. Voglia moltiplicarsi $(a-b)(c-d)$; pongo $a-b=m$, $c-d=n$, e moltiplicate le due equazioni $a=m+b$, $c=n+d$, verrà $ac=mn+bn+dm+bd=mn+bn+dm+bd+bd-bd=(b+m)d+(d+n)b+mn-bd=ad+bc+mn-bd$; dunque $mn=(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$, come prescrive la regola.

122. Regola per i Coefficienti. *I coefficienti si moltiplicano insieme come nell' Aritmetica, e il loro prodotto è il coefficiente del prodotto algebrico:* così $3a\times9b=27ab$ ..... $\frac{1}{2}c\times\frac{1}{2}p=\frac{1}{4}cp=\frac{cp}{4}$.

123. Regola per le Lettere. *Le lettere, come si è detto (106), intendonsi moltiplicate quando sono scritte di seguito senza segno intermedio:* così $12x \times 5y = 60\,xy$; $60\,xy \times 3\,az = 180\,axyz$.

124. Regola per gli Esponenti. *Quando una lettera con esponente dee moltiplicarsi per la lettera stessa pur con esponente, bisogna scriverla con un esponente eguale alla somma dei due primitivi:* così $8a^2 b^3 \times 4a^5 b = 32a^7 b^4$. Questa regola viene dalla passata; poichè $8a^2b^3 \times 4a^5 b = 8\,aabbb \times 4\,aaaaab = 32\,aaaaaaabbbb = 32\,a^7 b^4$ (110). Ciò supposto

125. La moltiplicazione dei polinomj si fa moltiplicando ciascun termine d' un fattore per ciascun termine dell' altro, e in fine si riduce se occorra. Debba moltiplicarsi $a + 3c - d$ per $2a - d$; moltiplico primieramente a per $2a$ (il prodotto è $2a^2$); quindi $+ 3c$ per $2a$, ($+ 6ac$); poi $- d$ per $2a$, ($- 2ad$). Passo al secondo termine del moltiplicatore, e moltiplico a per $- d$, ($- ad$); poi $+ 3c$ per $- d$, ($- 3cd$); infine $- d$ per $- d$, ($+ d^2$). Sommo tutti questi prodotti e fatta la riduzione, ho per prodotto totale $2a^2 + 6ac - 3ad - 3cd + d^2$. Ecco degli altri esempj

$$\begin{array}{lr} & a + 3c - d \\ & 2a - d \\ \hline & 2a^2 + 6ac - 2ad \\ & - ad - 3dc + d^2 \\ \hline \textit{Somma ridotta} & 2a^2 + 6ac - 3ad - 3cd + d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + x \\ a - x \\ \hline a^2 + ax \\ \quad - ax - x^2 \\ \hline a^2 \qquad - x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ \qquad a - b \\ \hline a^3 + 2a^2 c - abc \\ - a^2 b - 2abc + b^2 c \\ \hline a^3 - a^2 b + 2a^2 c - 3abc + b^2 c \end{array}$$

126. I rotti algebrici si moltiplicano come i numerici: così $\frac{x}{y} \times \frac{u}{z} = \frac{ux}{yz} \ldots\ldots \frac{c}{d} \times \frac{m+n}{p+q} = \frac{cm+cn}{dp+dq} \ldots\ldots$ $\frac{a+b}{1-x} \times \frac{a-b}{1+x} = \frac{a^2-b^2}{1-x^2}$.

127. Talvolta la moltiplicazione s' indica solamente, e si cuoprono i fattori con una linea o si chiudon tra parentesi: così il prodotto di $a+3d-d^2$ per b^2-6d^2 si scrive $\overline{a+3d-d^2}\times\overline{b^2-6d^2}$ ovvero $(a+3d-d^2)(b^2-6d^2)$. Quando i fattori son molti, come $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, ed occorra effettuar l' operazione, moltiplico i primi due, poi il lor prodotto per il terzo, e così di seguito.

Divisione Algebrica.

128. Anche nella divisione si osservano alcune regole per i Segni, per i Coefficienti, per le Lettere e per gli Esponenti.

Regola per i Segni. Si è dimostrato (121) che $-4\times6=-24$; dunque (32) $\frac{-24}{-4}=6$, e $\frac{-24}{6}=-4$, cioè anche nella divisione *le quantità con segni simili danno il quoziente col* $+$, *e con segni diversi lo danno col* $-$.

Regola per i Coefficienti. *I Coefficienti si dividono come nell' Aritmetica scrivendone il quoziente esatto se son divisibili senza resto, o formandone un rotto.*

Regola per le Lettere. Poichè $a\times b=ab$ (121), sarà (32) $\frac{ab}{b}=a$ ovvero $\frac{ab}{a}=b$, cioè *dalle Lettere del dividendo si scancellan quelle del divisore, e ciò che resta è il quoziente*; così se si chieda *quante volte* m *entri in* mpr? si risponderà che *vi entra* pr *volte*, poichè scancellando m da mpr, resta pr per quoziente. *Non trovandosi nel dividendo le lettere stesse del divisore, se ne forma un rotto come nei numeri.*

Regola per gli Esponenti. *Quando una lettera con esponente dee dividersi per la stessa lettera pur con esponente, bisogna scriverla nel quoziente con un esponente eguale alla differenza dei due primitivi:* così divi-

dendo $6a^4 b^3$ per ab^2, il quoziente sarà $6a^{4-1} b^{3-2} = 6a^3 b$. Questa regola vien dalla passata; poichè se dal dividendo $6aaaabbb$ si scancelli il divisore abb, resta il quoziente stesso $6a^3b$.

129. Or per dividere $4ac^3de^3$ per $-2bd^3e^3f$, io dico: $+4$ diviso per $-2 = -2$: passo alle lettere, e scancello nel dividendo quelle del divisore formando un rotto dell' altre: quindi il quoziente cercato è $-\frac{2ac^3}{bd^2f}$. Così $\frac{3abc}{3abc} = 1$ .... $\frac{-4bd}{2bd} = -2$ .... $\frac{3a^2b}{5ac} = \frac{3ab}{5c}$ .... $-\frac{12abd}{3a} = -4bd$ .... $\frac{4a^3b^2d}{4abd} = a^2b$ ec.

130. Queste regole si applicano ai rotti de' polinomj se una stessa quantità è in tutti i termini del dividendo e del divisore: così $\frac{ax - 2abx}{ax + ax^2} = \frac{1 - 2b}{1 + x}$, tolta ax a tutti i termini e messo 1 in suo luogo ove è sola (109). Del pari $\frac{3x^2}{3ax^2 + 3b^2x^2} = \frac{1}{a + b^2}$; . . . . . $\frac{4a^2x^2 + 3a^3b^2x}{a^2x - a^2bx} = \frac{4x + 3ab^2}{1 - b}$.

131. I polinomj si dividono come nell' Aritmetica, e per minor fatica si *ordinano* i termini, onde il primo abbia una lettera (comune al dividendo e al divisore) col massimo esponente; il secondo abbia la lettera stessa coll' esponente prossimamente minore ec. Ecco un dividendo e un divisore *ordinati* per a:

$a^2 + 2ab + b^2 \qquad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Potevano anche ordinarsi per b: si preferisce però la lettera che non ha lo stesso esponente in più termini; per esempio, si è preferita x a b e c nella divisione seguente

$$\begin{array}{r|l} & -3x^3+cx \\ \hline -3b^2x^2+b^2cx & 9b^2x^5-3b^2cx^4-3b^2cx^3+b^2c^2x^2 \\ & -9b^2x^5+3b^2cx^4+3b^2cx^3-b^2c^2x^2 \\ \hline & \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

dico dunque: $\frac{9b^2x^5}{-3b^2x^2}=-3x^3$, che pongo al quoziente: moltiplico per esso il divisore e sottraggo il prodotto $9b^2x^5-3b^2cx^4$ dal dividendo. Continuo e dico: $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2}=+cx$, quoziente; per lui moltiplico il divisore, e sottratto il prodotto $-3b^2cx^3+b^2c^2x^2$, nulla resta; dunque il quoziente è $-3x^3+cx$. Moltiplicandolo per il divisore, trovo il dividendo; dunque l' operazione è buona.

132. Serviranno d' esercizio espressioni simili a questa $\frac{a^3+m^3}{a+m}$ che fanno nascere dei nuovi termini nel dividendo, mentre si prosegue la divisione. Il quoziente è quì a^2-am+m^2. Dividendo $1-x^{12}$ per $1-x$, il quoziente è $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$. Così $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+$ ec. all' infinito; ed $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-$ ec. $+$ ec. in infinito.

$$\begin{array}{rl} & |\,a^2-am+m^2 \\ a+m & a^3+m^3 \\ & -a^3 \quad -a^2m \\ 1^\circ.\text{Resto} & 0+m^3-a^2m \\ & \qquad +a^2m+am^2 \\ 2^\circ.\text{Resto} & +m^3 \quad 0 \quad +am^2 \\ & -m^3 \qquad\quad -am^2 \\ & \quad 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

133. La divisione dei rotti algebrici per interi o per altri rotti, o d' un intero per un rotto, non ha difficoltà (67): così si divide $\frac{m}{n}$ per $\frac{s}{t}$ scrivendo $\frac{mt}{ns}$: si

divide $\frac{b}{c}$ per $4m$ scrivendo $\frac{b}{c.4m}=\frac{b}{4cm}$; si divide x per $\frac{p}{q}$ scrivendo $\frac{qx}{p}$.

134. Questi rotti si riducono poi all' espression più semplice con ordinarne i termini (131), e o risolverli nei loro fattori (125) o cercarne il comun divisore (56): così poichè $x^2+px=x(x+p)$, e $bmx+bmp=bm(x+p)$, sarà $\frac{px+x^2}{bmx+bmp}=\frac{x(x+p)}{bm(x+p)}=\frac{x}{bm}$; parimente giacchè dividendo a^2-x^2 per $a+x$ si trova un quoziente esatto, sarà $a+x$ il massimo comun divisor di $\frac{a+x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a-x}$. Ma non sempre si conoscon sì presto i fattori delle quantità algebriche, nè sempre è loro applicabile il nudo metodo del comun divisore.

135. In generale (315) per avere i fattori delle quantità x^4-z^4 ed $x^5-z^2x^3$, 1°. pongo $x^4-z^4=0$, onde $x^4=z^4$ ed $x^2=\pm z^2$: dunque i fattori di x^4-z^4 sono x^2+z^2 ed $x^2-z^2=(x+z)(x-z)$: 2°. pongo $x^5-z^2x^3=0$, cioè riducendo, $x^2-z^2=0=(x+z)(x-z)$. Dal che si ha $\frac{x^4-z^4}{x^5-z^2x^3}=\frac{(x^2+z^2)(x+z)(x-z)}{x^3(x+z)(x-z)}=\frac{x^2+z^2}{x^3}$. Lo stesso metodo darà $\frac{12x^2-15xy+3y^2}{6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}=\frac{12x-3y}{6x^2+2y^2}$.

136. Parimente per aver (56) il massimo comun divisore, avverto che delle due quantità proposte posso dividere o moltiplicar l' una per qualunque quantità che non abbia alcun divisor comune coll' altra: ciò non altera il divisor cercato, che per ipotesi deve esser comune ad ambedue. Ripiglio il rotto $\frac{(A)\ 12x^2-15xy+3y^2}{(B)\ 6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}$ ed osservo 1°. che A può dividersi per 3 ma non B, e B per 2 ma non A; divido dunque, e viene $\frac{(C)\ 4x^2-5xy+y^2}{(D)\ 3x^3-3x^2y+xy^2-y^3}$: 2°. che per poter dividere D per C giusta il metodo (56), bisogne-

rebbe moltiplicar D per 4, e ciò può farsi giacchè 4 non ha alcun divisor comune con C; moltiplico dunque, e poi dividendo D per C, resta (E) $19xy^2 - 19y^3$: 3°. che E può dividersi per $19y^2$ ma non C; divido dunque, ed E diventa (F) $x - y$ per cui dividendo C, nulla avanza; dunque F è il massimo comun divisore di A, B da cui si ha $\frac{12x - 3y}{6x^2 + 2y^2}$.

Potenze e Radici.

137. Se una quantità a si moltiplichi per se stessa un numero qualunque n di volte (o questo *numero n di volte* può essere intero o rotto, positivo o negativo), il prodotto si dice *Potenza* di a, ed a si chiama *Radice* di questa potenza. Ma si noti che *moltiplicar* più n volte *una quantità* a *per se stessa*, significa moltiplicar realmente a in $a \times a \ldots \times a$: laddove *moltiplicar* meno n volte *la quantità* a *per se stessa* vuol dir dividere a per $a \times a \,.\,.\times a$, tale essendo l' effetto del *meno* che indica sempre nelle quantità un' opposta maniera d' esistere (108) e perciò un' operazione contraria a quella che si farebbe col *più*.

138. Quindi se a si moltiplichi una volta per se stessa, avremo $a \times a = a^2$, *potenza seconda* di a: se due volte, se tre ec., verrà $a.a.a = a^3$, $a.a.a.a = a^4$ ec., *potenze terza, quarta* ec. di a: ed a sarà *la radice seconda* di a^2, *la terza* di a^3, *la quarta* di a^4 ec. Sicchè *una quantità si alza ad una data potenza col moltiplicarla per se stessa tante volte meno una, quante sono unità nell' esponente della potenza:* così 9, $\frac{3}{4}$, $5b$ si alzano alla 2ª moltiplicandoli per se stessi una volta, il che dà $9.9 = 9^2 = 81$, $\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = (\frac{3}{4})^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$, $5b.5b = 5^2b^2 = 25b^2$; e in generale a si alza alla

potenza m^{sima} moltiplicandola $m - 1$ volte per se stessa, d' onde viene $a \cdot a^{m-1} = a^m$ (110).

139. Dunque 1°. se $m = 0$, sarà $a^m = a^\circ$, $m - 1 = -1$, ed a si alza alla *potenza zero* moltiplicandola *meno una volta* per se stessa, cioè dividendola per a (137): onde $a^\circ = \frac{a}{a} = 1$. Perciò la quantità alzata alla potenza *zero* eguaglia l' unità; così $(cd)^\circ = \left(\frac{r}{s}\right)^\circ = (g \pm h)^\circ = 0^\circ = 1$.

140. Dunque 2°. se $m = 1$, sarà $a^m = a$, $m - 1 = 0$, ed a si alza alla *prima potenza* col moltiplicarla *zero volte* per se stessa, cioè lasciandola qual' è, poichè $a \cdot a^\circ = a$ (139). La prima potenza a di a dicesi anche *potenza lineare*, la seconda a^2 si chiama anche *Quadrato*, e la sua radice a dicesi *Radice Quadra*; la terza a^3 si chiama *Cubo*, e la sua radice a, *Radice Cuba*; nomi che vengono dalla Geometrìa.

141. Dunque 3°. se $m = -1$, $= -2$ ec., sarà $a^m = a^{-1}$, $= a^{-2}$ ec., $m - 1 = -2$, $= -3$ ec., ed a si alza alla potenza -1^{sima}, -2^{sima} ec. col moltiplicarla *meno due*, *tre* ec. *volte* per se stessa, cioè dividendola per a^2, a^3 ec.; onde $a^{-1} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$ ec. Onde *una quantità con esponente negativo equivale all' unità divisa per la quantità stessa col suo stesso esponente ma positivo*. Mutati dunque i segni agli esponenti, posson portarsi i varj fattori d' un rotto dal denominatore nel numeratore e reciprocamente, salvo il valor del rotto: così $\frac{rs}{f^2 g^3} = rsf^{-2} g^{-3} =$

$\frac{f^{-2}}{g^3(rs)^{-1}}$ ec.

142. Dunque 4°. se $m = \frac{1}{r}$, sarà $a^m = a^{\frac{1}{r}}$, $m - 1 = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-r}{r}$, ed a si alza alla potenza $\left(\frac{1}{r}\right)^{sima}$ col moltiplicarla per se stessa $\frac{1-r}{r}$ volte, onde $a^{\frac{1}{r}} = a \cdot a^{\frac{1-r}{r}}$: se $r = 2$, sarà $a^{\frac{1}{2}} = a \cdot a^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}}$. Del resto la potenza $\left(\frac{1}{r}\right)^{sima}$ chiaramente significa un' estrazion di radice; poichè come moltiplicando per r l'esponente 1 di a, viene a^r e si alza a alla potenza r^{sima}, così dividendolo per r, viene $a^{\frac{1}{r}}$ e si deprime a alla radice r^{sima}.

143. Di quì le regole per calcolar le potenze di quantità che hanno la stessa lettera. Il calcolo comincia dalla moltiplicazione: la somma e la sottrazione si fanno al solito. I. Esse si moltiplicano col dar per esponente alla lettera comune la somma degli esponenti (124): così $b^3 . b^5 = b^{3+5} = b^8$, $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$. II. Si dividono col dar per esponente alla lettera comune la differenza tra gli esponenti del dividendo e del divisore (128): così $c^5 : c^2 = c^{5-2} = c^3$; $p^{\frac{1}{2}} : p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{6}}$; $4 : 4^3 = 4^{1-3} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$. III. Si alzano alla data potenza, moltiplicando il loro esponente per il dato (138): così c^2 alla

3ª diviene $c^{2.3} = c^{6}$; a^{m} all' n^{sima} diviene a^{mn}. IV. Se ne estrae una data radice, dividendo il loro esponente per il dato (142): la radice 3ª di c^{6} è $c^{\frac{6}{3}} = c^{2}$, l' n^{sima} di a^{mn} è $a^{\frac{mn}{n}} = a^{m}$.

144. Questa estrazion di radici si accenna col *segno radicale* $\surd$: se egli non ha indice, come $\sqrt{b}$, esprime la radice seconda o quadra di b: ma con gl' indici 3, 4 ... n, come $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b^{3}}$, $\sqrt[n]{c^{2}}$, esprime la radice terza di a, la quarta di b^{3}, e l' n^{sima} di c^{2}. Quindi $\sqrt[3]{a^{2}} = a^{\frac{2}{3}}$, e in generale $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$.

145. I radicali son tutti compresi nella formula $\sqrt[m]{p^{m+n}}$ supposto $m > 1$: e potendo essi ridursi a quantità d' esponente rotto (144), sono o proprj o apparenti o improprj, come il rotto che gli determina. Se $n < 0$, il radicale $\sqrt[m]{p^{m-n}} = p^{\frac{m-n}{m}}$ è proprio come il rotto $\frac{m-n}{m}$; in tal caso si chiama quantità *sorda*, *irrazionale*, *incommensurabile* e anche *potenza rotta o imperfetta*. Se $n = 0$, il radicale $\sqrt[m]{p^{m}} = p^{\frac{m}{m}} = p$ è apparente, come il rotto $\frac{m}{m}$, e significa la *quantità razionale* p. Se $n > 0$, il radicale $\sqrt[m]{p^{m+n}} = p^{\frac{m+n}{m}} = p \cdot p^{\frac{n}{m}}$ è improprio come il rotto $\frac{m+n}{m}$, e si riduce a

$p\sqrt[m]{p^n}$ cioè a quantità sorda con coefficiente razionale. Che se p sia negativo ed m un numero pari, il radicale $\sqrt[m]{-p^{m+n}}$ dicesi *immaginario* o impossibile, non potendo esservi quantità che moltiplicata un numero impari di volte per se stessa, risulti negativa (121). Tutte l'altre quantità o razionali o sorde diconsi *reali* per opposizione all'immaginarie.

146. Ora 1°. i radicali si riducono al grado stesso, come i rotti allo stesso denominatore; così giacchè $a\sqrt{b}=a.b^{\frac{1}{2}}$ e $c\sqrt[3]{n^2}=c.n^{\frac{2}{3}}$, come $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ divengon $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$, così verrà $a\sqrt{b}=a.b^{\frac{3}{6}}=a\sqrt[6]{b^3}$ e $c\sqrt[3]{n^2}=c.n^{\frac{4}{6}}=c\sqrt[6]{n^4}$: 2°. i radicali si riducono a minore espressione, come i rotti improprj ad interi e rotti; così $3\sqrt{a^3}=3a^{\frac{3}{2}}=3a^{1+\frac{1}{2}}=3a\sqrt{a}$, e $2\sqrt[3]{2500}=\ldots$, $2\sqrt[3]{4\cdot5^4}=2\cdot4^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{4}{3}}=2\cdot4^{\frac{1}{3}}\cdot5^{1+\frac{1}{3}}=10(4\cdot5)^{\frac{1}{3}}=10\sqrt[3]{20}$: 3°. le quantità razionali si riducono a radicali d'un dato indice o esponente, come gl' interi si riducono a rotto; così per cangiare ab^2 in radicale quadratico, cubico ec., si fa $ab^2=a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}=\sqrt{a^2b^4}=a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}=\sqrt[3]{a^3b^6}$ ec.

147. I radicali (ridotti a minore espressione (146) se si può) si sommano e si sottraggono al solito (116. 117), e se hanno l'esponente stesso e la stessa quantità sotto il segno, si riducon pure al solito (114): così $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}=3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}$; $\sqrt{27a^7b}-\sqrt{3a^3b^5}$ $(=3a^3\sqrt{3ab}-ab^2\times\sqrt{3ab})=(3a^3-ab^2)\sqrt{3ab}$. Si moltiplicano anche e si di-

vidono o coi soliti segni (24.33) o effettivamente dopo averli ridotti al grado stesso (146): così $\sqrt{3}.\sqrt{7}=(3.7)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{21}$; $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{21}{3}}=\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{b^2}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{5}{15}}.b^{\frac{6}{15}}=...$; $\sqrt[15]{a^5b^6}$, $\frac{\sqrt[6]{a^r}}{\sqrt[4]{b^m}}=a^{\frac{2r}{12}}:b^{\frac{3m}{12}}=\sqrt[12]{\frac{a^{2r}}{b^{3m}}}$. Infine si alzano a potenza intera o rotta moltiplicandone l'esponente per quello della potenza data: così $(\sqrt{2})^3=2^{\frac{1}{2}.3}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$; $(\sqrt{a^n}\times b^x)^2=a^{\frac{2n}{2}}\,b^{\frac{2x}{2}}=a^nb^x$: e in generale *se il radicale e la data potenza hanno lo stesso esponente, si toglie il radicale*: del pari $\sqrt{(\sqrt[4]{b})}=b^{\frac{1}{4}.\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{b}$; $\sqrt[3]{(\sqrt[7]{b^3})}=b^{\frac{3}{7}.\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{b}$.

148. Anche le quantità immaginarie si riducono, si sommano e si sottraggono al solito. Quanto alla loro moltiplicazione, è chiaro che come $\sqrt{a}.\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$, così $\sqrt{(-1)}.\sqrt{(-1)}=\sqrt{(-1)^2}=-1$; onde in generale $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=(\sqrt{a}.\sqrt{-1})(\sqrt{a}.\sqrt{-1})=-1.\sqrt{a^2}=-a$; $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}=(\sqrt{a}.\sqrt{-1})(\sqrt{b}.\sqrt{-1})=-1.\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$. Dal che si ha $(\sqrt{-1})^{2n}=\pm 1$ e $(\sqrt{-1})^{2n+1}=(\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}$, preso il segno $+$ se n è pari: perciò anche $(\sqrt{-1})^n=\pm\sqrt{\pm 1}$ (143.IV), presi i segni $+$, $+$ se $n=4m$; i $+$, $-$ se $n=4m+1$; i $-$, $+$ se $n=4m+2$; e i $-$, $-$ se $n=4m+3$, essendo m un intero.

149. Si noti infine 1°. che supposto $a+b\sqrt{\pm c}=A+B\sqrt{\pm c}$ (A, a, B, b son quantità reali e razionali), sarà $A=a$, $B=b$; poichè fatto $a=A\pm m$, verrebbe $A\pm m+b\sqrt{\pm c}=A+B\sqrt{\pm c}$, ed $m=(B-b)\sqrt{\pm c}$, cioè il razionale eguaglierebbe il sordo e l'immaginario, il che è assurdo; onde *se una quantità di razionali e radicali o reali o immaginarj sia zero, i razionali da se, i radicali reali da se, e gl'immaginarj da se saranno zero*: 2°. che un prodotto o un quoziente di radicali reali può divenir razionale; così dividendo $a\pm b$ per $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[m]{b}$, si ha $(\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}}-\sqrt[m]{a^{m-2}}b+\sqrt[m]{a^{m-3}}b^2-...\pm\sqrt[m]{b^{m-1}})=a+b$, preso $+$

se m è impari; e $(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a}^{m-1}+\sqrt[m]{a}^{m-2}b+\ldots+\sqrt[m]{b}^{m-1})=a-b$: 3°. che anche un prodotto o quoziente d' immaginarj può divenir reale e razionale, come

$$p^2\left(=\left(\frac{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\right)^2\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q^2\left(=\left(\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2\right)=1$$: 4°. che un immaginario $a+b\sqrt{-1}\pm c\pm g\sqrt{-1}$ si riduce sempre alla forma $A+B\sqrt{-1}$, facendo $a\pm c=A$, e $b\pm g=B$; onde quanto è vero della somma e sottrazione, dee pur verificarsi della moltiplicazione, divisione ec., che son combinazioni di queste due operazioni fondamentali (11): 5°. che perciò anche le radici immaginarie dell' equazioni si riducono alla forma $A\pm B\sqrt{-1}$.

150. Volendo ora alzare il binomio $a\pm b$ alla potenza m^{sima}, o basta indicarla e scrivo al solito $(a\pm b)^m$ (143. III.), o deve effettuarsi e pongo $(a\pm b)(a\pm b)^{m-1}$ (138). Dunque 1°. se $m=2$, verrà $(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$; onde *la potenza seconda o il quadrato d' un binomio* a $\pm$ b *contiene i quadrati* a^2, b^2 *dei due termini e il doppio prodotto* $\pm$ 2ab *dell' un nell' altro*. I segni son tutti positivi se i termini del binomio hanno il segno stesso; se lo hanno diverso, il doppio prodotto è negativo: generalmente (per dirlo una volta per sempre) in ogni potenza son negativi quei termini ove si trovano potenze impari di un numero impari di termini negativi.

151. Osservazioni. I. Il quadrato d' un polinomio qualunque $2b-3c+d-2m$ risulta dal quadrato di ciascun termine e dai doppj prodotti dei termini a 2 a 2, ed è $4b^2-12bc+9c^2+4bd-6cd+d^2-8bm+12cm-4dm+4m^2$. II. Il quadrato di $a\pm b$ non perde la sua qualità di quadrato unendogli il quadruplo prodotto di

ab con segno contrario; infatti tanto è quadrato $(a \pm b)^2$ quanto $(a \pm b)^2 \mp 4ab = (a \mp b)^2$. III. *Un quadrato incompleto* $x^2 \pm \frac{b^2x}{p}$ *si compie coll' aggiungergli il quadrato della metà del coefficiente totale di* x: quì il total coefficiente di x è $\pm \frac{b^2}{p}$, la sua metà è $\frac{\pm b^2}{2p}$, il suo quadrato è $\frac{b^4}{4p^2}$, e il quadrato completo è $x^2 \pm \frac{b^2x}{p} + \frac{b^4}{4p^2}$.

152. In generale sieno $m, m + n$ ec. i termini ignoti della radice binomia, trinomia ec. del quadrato da compirsi, e si debba compire $x^2 \pm \frac{b^2x}{p}$: fatta $x \pm m$ la sua radice, sarà $2xm = \frac{b^2x}{p}$ ed $m = \frac{b^2}{2p}$, onde l' intero quadrato è $(x \pm \frac{b^2}{2p})^2$, come sopra. Debba anche compirsi $\frac{f^2}{x^2} + \frac{b}{x} + c$; posta $\frac{f}{x} + m + n$ la sua radice, sarà $\frac{2fm}{x} = \frac{b}{x}$ e $\frac{2fn}{x} = c$; onde $m = \frac{b}{2f}$, $n = \frac{cx}{2f}$, e l' intero quadrato $(\frac{f}{x} + \frac{b + cx}{2f})^2$.

153. Con questo metodo può anche eliminarsi un dato termine d' un quadrato, salva la qualità di quadrato. Aggiungo $\pm r$ (preso il segno contrario a quello del termine da eliminarsi) alla radice di sopra $\frac{f}{x} + \frac{b + cx}{2f}$, e pongo $\frac{2fr}{x} =$ al termine che dee sparire, come $\frac{b^2}{4f^2}$: dunque $r = \frac{b^2x}{8f^3}$, e il quadrato senza $\frac{b^2}{4f^2}$ sarà $\left(\frac{f}{x} + \frac{b + cx}{2f} - \frac{b^2x}{8f^3}\right)^2$. Col metodo stesso si avrà un quadrato indeterminato Q in modo che $Q \mp d$ sia quadrato; poichè eliminato $\mp d$, verrebbe $\sqrt{Q} \pm \frac{d}{2\sqrt{Q}}$, e quindi (151. II.) $Q = \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \pm \frac{d}{2\sqrt{Q}}\right)^2$.

154. Dunque 1°. se $m = 3$, sarà $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)^2 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; onde la *terza potenza o il cubo d' un binomio contiene i cubi de' suoi*

due termini; e i tripli prodotti del quadrato di ciascun termine nell' altro.

155. Se bisogni compire un cubo $y^3 \pm py$, posta $y \pm m$ la sua radice, sarà $3y^2m = py, m = \frac{p}{3y}$, e il cubo completo $(y \pm \frac{p}{3y})^3$.

156. Dunque 3°. se $m = 4$, verrà $(a \pm b)^4 = (a \pm b)(a \pm b)^3 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$: se $m = 5$, si avrà $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$ ec. Ma ecco la formula generale che trovò Newton per formar le potenze, e che si chiama perciò la *Formula del Binomio di Newton*: $(a \pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} \times a^{m-3}b^3 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4 \pm$ ec., ove la legge dei termini è manifesta, e l' ultimo di essi è $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}....\frac{3}{m-2}.\frac{2}{m-1}.\frac{1}{m}a^0 b^m = b^m$. Così se $m = 3$, viene $a^3 \pm 3a^2b + \frac{3.2}{2}ab^2 (= 3ab^2) \pm \frac{3.2.1}{2.3} \times a^0b^3 (= \pm b^3)$: quì la formula finisce, essendo in tutti i termini seguenti $m - 3 = 0$; e dalla formazione stessa delle potenze, cioè dal moltiplicare $a \pm b$ per se medesimo, si rileva, che se m è numero intero, debbono esserlo i coefficienti $m.\frac{m-1}{2}, m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ ec.: ma se m è numero rotto, i coefficienti son rotti, e la formula non ha mai fine.

157. Ella si dimostra osservando che la potenza m^{sima} di $a \pm b$ è il prodotto d' un numero m di fattori eguali, onde se sia $a \pm b = 0$, ella avrà le proprietà tutte d' un'equazione del grado m (317). Quindi il primo termine sarà a^m (313); il secondo sarà a^{m-1} nella somma delle radici $\mp b$ prese m volte con segni contrarj (317), cioè sarà $\pm ma^{m-1}b$

il terzo sarà a^{m-2} nella somma dei prodotti delle radici $=$ b prese a 2 a 2 (317), cioè sarà $m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2$ (285) ec.: e ben si vede che tutto si avvera quando pur l'esponente m fosse irrazionale, trascendente ec. (10).

158. Risulta dalla formula che i termini competenti ad una potenza m^{sima} sono $m+1$, giacchè gli esponenti di a, b vanno da o fino ad m: 2°. che si ha il coefficiente d'un termine col moltiplicar quello del termine che precede per l' esponente ivi dato ad a, e col dividere il prodotto per il numero dei termini precedenti: così se $m = 7$, il primo termine di $(a+b)^7$ sarà $a^m = a^7$; il secondo $ma^{m-1}b = \frac{1.7}{1}a^6b =$ $7a^6b$; il terzo $m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 = \frac{7.6}{2}a^5b^2 = 21a^5b^2$; il quarto $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 = \frac{21.5}{3}a^4b^3 = 35a^4b^3$, dopo il qual coefficiente, che è l' $\frac{m+1}{2}^{simo}$ e perciò uno dei due *medj* o *massimi* della potenza (se ella fosse pari, il *massimo* sarebbe il solo $\frac{m+2}{2}^{simo}$) tornano con ordine inverso i coefficienti dei termini già trovati, e sono $+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$; perciò riunendo a 2 a 2 i termini dello stesso coefficiente, primo ed ultimo, secondo e penultimo ec., come si fa talora per comodo, viene $(a+b)^7 = a^7+b^7+7ab(a^5+b^5)+21a^2b^2(a^3+b^3)+35a^3b^3(a+b)$.

159. Voglia anche alzarsi alla potenza m^{sima} l'equazione $x = \sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}$: si avrà $x^m = (\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b})^m$, e sviluppando il binomio con riunire a 2 a 2 i termini, si troverà

$$x^m = a + b + m \sqrt[m]{ab}(\sqrt[m]{a}^{m-2} + \sqrt[m]{b}^{m-2}) +$$
$$m.\frac{m-1}{2} \sqrt[m]{a^2b^2}(\sqrt[m]{a}^{m-4} + \sqrt[m]{b}^{m-4}) +$$
$$m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} \sqrt[m]{a^3b^3}(\sqrt[m]{a}^{m-6} + \sqrt[m]{b}^{m-6}) +$$
$$m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4} \sqrt[m]{a^4b^4}(\sqrt[m]{a}^{m-8} + \sqrt[m]{b}^{m-8}) +$$
$$m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5} \sqrt[m]{a^5b^5}(\sqrt[m]{a}^{m-10} + \sqrt[m]{b}^{m-10}) + \text{ec.}$$

Limitando dunque il calcolo all' esponente $m - 10$, si ha

$$\left(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}\right)^{m-10} = x^{m-10} = \sqrt[m]{a}^{m-10} + \ldots\ldots\ldots$$
$$(m-10)\sqrt[m]{a}^{m-11}b + \text{ec., e perciò}$$
$$\sqrt[m]{a}^{m-10} + \sqrt[m]{b}^{m-10} = x^{m-10}$$
$$\left(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}\right)^{m-8} = x^{m-8} = \sqrt[m]{a}^{m-8} + (m-8)\sqrt[m]{a}^{m-9}b +$$
$$\frac{(m-8)(m-9)}{2}\sqrt[m]{a}^{m-10}b^2 + \text{ec., onde}$$
$$\sqrt[m]{a}^{m-8} + \sqrt[m]{b}^{m-8} = x^{m-8} - (m-8)x^{m-10}\sqrt[m]{ab}; \text{ così proseguendo, viene}$$
$$\sqrt[m]{a}^{m-6} + \sqrt[m]{b}^{m-6} = x^{m-6} - (m-6)x^{m-8}\sqrt[m]{ab} + \ldots\ldots$$
$$\frac{m-6}{2}(m-9)x^{m-10}\sqrt[m]{a^2b^2}$$
$$\sqrt[m]{a}^{m-4} + \sqrt[m]{b}^{m-4} = x^{m-4} - (m-4)x^{m-6}\sqrt[m]{ab} + \ldots\ldots$$
$$\frac{m-4}{2}(m-7)x^{m-8}\sqrt[m]{a^2b^2} - \frac{m-4}{2}.\frac{m-8}{3}.(m-9) \times$$
$$x^{m-10}\sqrt[m]{a^3b^3}$$

$$\sqrt[m]{a^{m-2}}+\sqrt[m]{b^{m-2}}=x^{m-2}-(m-2)x^{m-4}\sqrt[m]{ab}+\ldots\frac{m-2}{2}(m-5)x^{m-6}\sqrt[m]{a^2b^2}-\frac{m-2}{2}.\frac{m-6}{3}(m-7)\times x^{m-8}\sqrt[m]{a^3b^3}+\frac{m-2}{2}.\frac{m-7}{3}.\frac{m-8}{4}(m-9)\times\ldots x^{m-10}\sqrt[m]{a^4b^4}.$$

Dunque sostituendo e riducendo,

$$x^m=a+b+mx^{m-2}\sqrt[m]{ab}-m.\frac{m-3}{2}x^{m-4}\sqrt[m]{a^2b^2}+\ldots m.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}x^{m-6}\sqrt[m]{a^3b^3}-m.\frac{m-5}{2}.\frac{m-6}{3}\times\frac{m-7}{4}x^{m-8}\sqrt[m]{a^4b^4}+m.\frac{m-6}{2}.\frac{m-7}{3}.\frac{m-8}{4}.\frac{m-9}{5}\times x^{m-10}\sqrt[m]{a^5b^5}-\text{ec.}$$

160. Se in vece d'un binomio debba farsi la potenza d'un trinomio, d'un quadrinomio ec., come di $p+q+r-s$, si porrà $p+q=a$, $r-s=b$, e si sostituirà poi il valor di a, di b, e delle loro potenze.

Potrà vedersi altrove (nel Calcolo Differenziale) che dato un polinomio qualunque $f+gx+hx^2+kx^3+lx^4+$ ec. da alzarsi a qualunque potenza m^{sima}, se essa si supponga $F+Gx+Hx^2+Kx^3+Lx^4+$ ec., i coefficienti F, G, H ec. saranno con legge manifestissima

$F=f^m$,

$G=\frac{mgF}{f}$,

$H=\frac{2mhF+(m-1)gG}{2f}$,

$K=\frac{3mkF+(2m-1)hG+(m-2)gH}{3f}$,

$L=\frac{4mlF+(3m-1)kG+(2m-2)hH+(m-3)gK}{4f}$ ec. ec.

161. La

161. La formula Newtoniana può anche esprimersi più generalmente; poichè essendo $(P \pm PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{m}{n} \left(\frac{m}{2n} - \frac{1}{2} \right) P^{\frac{m}{n}} Q^2 \pm$ ec., se A rappresenti il primo termine, B il secondo ec. coi loro segni, si avrà $(P \pm PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} QA + \frac{m-n}{2n} \times QB \pm \frac{m-2n}{3n} QC +$ ec., con che si passa all'estrazion delle radici che son potenze rotte (145). Vogliasi $\sqrt[n]{(p^n \pm q)} = (p^n \pm q)^{\frac{1}{n}}$: sarà $P = p^n$, $PQ = q$, $Q = \frac{q}{p^n}$ ed $m = 1$; perciò sostituendo verrà $\sqrt[n]{(p^n \pm q)} = p + \frac{q}{np^{n-1}} \left(\pm 1 - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{q}{np^n} \pm \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{q^2}{n^2 p^{2n}} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{3n-1}{4} \cdot \frac{q^3}{n^3 p^{3n}} \pm \text{ec.} \right)$, ove la legge dei termini è manifesta.

Così volendo $\sqrt[3]{6}$, divido 6 in due parti tali che la prima e più grande sia un cubo, e pongo $6 = 8 - 2$, onde $p^3 = 8$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 3$, e presi nella formula i segni di sotto, si ha $\sqrt[3]{6} = 2 - \frac{2}{3 \cdot 2^2} - \frac{2 . 2^2}{2 . 3^2 . 2^5} - \frac{2 . 5 . 2^3}{2 . 3 . 3^3 . 2^8} -$ ec. $= 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - \frac{5}{2592} -$ ec. Il primo termine dà $\sqrt[3]{6} = 2$, ove il cubo 8 supera 6 di 2, e l' approssimazione è poco giusta; i primi due termini danno $\sqrt[3]{6} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$, ove il cubo $6 \frac{35}{216}$ dà un' approssimazione più esatta: dai primi tre ter-

mini ho $\sqrt[3]{6}=\frac{131}{72}$, e il cubo $6\frac{8603}{373248}$ si accosta al vero anche più: ma perchè 6 non è cubo, non si giunge mai al valor vero di $\sqrt[3]{6}$, benchè l' approssimazione sia sempre maggiore.

162. Se pongasi la serie $\frac{q}{np^{n-1}}$ ($\pm$ 1 — ec.) $=d$, essendo d decimali, verrà $\sqrt[n]{(p^n \pm q)}=p+d$, e alzando tutto alla potenza n^{sima}, trascurati d^3, d^4 ec. come piccolissimi, si avrà un' equazion del secondo grado, da cui ottenuto il valor di d, si dedurrà $\sqrt[n]{(p^n \pm q)}=p+d=\frac{n-2}{n-1}p+\sqrt{\left(\frac{p^2}{(n-1)^2} \pm \frac{2q}{n(n-1)p^{n-2}}\right)}$, e nei casi particolari di $n=3$, $n=4$ ec., sarà $\sqrt[3]{(p^3 \pm q)}=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} \pm \frac{q}{3p}\right)}$, $\sqrt[4]{(p^4 \pm q)}=\frac{2p}{3}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{9} \pm \frac{q}{6p^2}\right)}$ ec., formule che danno una facile approssimazione se si tratti di basse potenze; in altro caso la lunghezza del calcolo è insopportabile.

163. Dalla formula data (161) potrebbe aversi la radice esatta d' una potenza polinomia perfetta, se vi fosse un modo di riunire in termini finiti gl' infiniti suoi termini. Vi si supplisce col disfar la potenza per mezzo d' operazioni contrarie: così per estrar la radice quadra da $a^2-2ax+x^2$, 1°. ordino la quantità come quì si è fatto: 2°. se dai segni, dai coefficienti, dagli esponenti rilevo che non vi son termini ripugnanti al quadrato (150), estraggo la radice quadra dal primo termine a^2, ed essendo $\sqrt{a^2}=a$ (147), scrivo a in radice, sottraggo il suo quadrato dalla quantità data, e mi resta $-2ax+x^2$: 3°. poichè in questo resto dee trovarsi il doppio prodotto di a nell' altro termine e il quadrato di questo (150),

raddoppio a, divido il resto per $2a$ pongo il quoziente $-x$ tanto in radice quanto nel divisor $2a$, e sottratto dal resto il prodotto di $-x$ per $2a-x$, viene o, il che indica che la quantità data è un quadrato perfetto della radice $a-x$ o $x-a$, giacchè ambedue soddisfanno. Ed ecco

$$\begin{array}{lll} & \text{Rad.} & \pm(a-x) \\ \text{Qu}^\circ. & & a^2 - 2ax + x^2 \\ & & -a^2 \\ & & 0 - 2ax + x^2 \\ 2a+x & & +2ax - x^2 \\ & & 0 \quad\quad 0 \end{array}$$

(per dirlo di passaggio) donde nasce l' *ambiguità del radicale quadratico*, suscettibile di + e di —, o di $\pm$, che si pronunzia *più o meno*, e che sempre è sottiuteso se non sia scritto: così $\sqrt{(a-x)^2}$ vale $\pm\sqrt{(a-x)^2} = \pm(a-x)$, nè può prendersi l' un segno piuttosto che l' altro, se lo stato della questione non escluda l' un dei due. Del resto, l' operazione di estrar la radice si continua finchè vi son termini, e ne ponghiamo quì per disteso un altro esempio.

$$\begin{array}{ll} & \text{Rad.} \pm\left(\frac{c^2}{4} - ab + \frac{b^3}{a}\right) \\ \text{Qu}^\circ. & \frac{c^4}{16} - \frac{abc^2}{2} + a^2b^2 + \frac{b^3c^2}{2a} - 2b^4 + \frac{b^6}{a^2} \\ & -\frac{c^4}{16} \\ & 0 - \frac{abc^2}{2} + a^2b^2 \\ \frac{c^2}{2} - ab & + \frac{abc^2}{2} - a^2b^2 \\ & 0 \\ & + \frac{b^3c^2}{2a} - 2b^4 + \frac{b^6}{a^2} \\ \frac{c^2}{2} - 2ab + \frac{b^3}{a} & - \frac{b^3c^2}{2a} + 2b^4 - \frac{b^6}{a^2} \\ & 0 \end{array}$$

164. I numeri son soggetti alle stesse regole d'estrazione, giacchè hanno le parti stesse del quadrato letterale: così $26^2 = 676 = (20+6)^2 = 20^2 + 2.20.6 + 6^2 = (7+9+10)^2 = 7^2 + 2.7.9 + 9^2 + 2.7.10 + 2.9.10 + 10^2$. Ma confondendosi queste parti nel riunirsi in un sol numero 676, *si dividerà il numero da*

destra a sinistra in membra di due cifre, cominciando l'estrazione a sinistra come la divisione.

Infatti ogni membro di due cifre dà una cifra in radice (10. 5°.), ed un'altra ne dà il primo membro a sinistra, giacchè o abbia due cifre o una, conterrà sempre una potenza seconda: si avranno perciò tante cifre quante son le membra.

Esempio. Vogliasi la radice quadra di 7873636. Diviso il numero in membra, 1°. prendo la radice del massimo quadrato 4, contenuto nel primo membro 7 a sinistra; ella è 2 che pongo in radice, e sottratto il suo quadrato da 7, resta 3: 2°. al resto 3 unisco il secondo membro 87, e fatto un punto sotto il 7 per escluderlo dalla divisione che son per fare, raddoppio al solito la radice 2, divido 38 per 4, pongo in radice e accanto al divisor 4 il quoziente 8 (se ponessi 9 non potrei sottrarre), e sottratto 8.48 da 387, resta 3: 3°. al resto 3 unisco il membro 36, punto il 6, raddoppio la radice 28, e per 56 parto 33; ciò dà 0 in radice; e abbassato l'ultimo membro 36, puntato il 6, raddoppiato 280, e diviso 3363 per 560, scrivo in radice e accanto al divisor 560 il quoziente 6; e poichè tolto 6.5606 da 33636, nulla resta, la radice esatta è 2806, che si verifica togliendo il 9 dai fattori 2806.2806 e dal prodotto 7873636 (26).

	|R. 2806
	Q. 7,87,36,36
	387
48	33636
560	00000
5606	

165. Se il numero non è quadrato, si indica l'estrazione con $\sqrt{}$, e se ne estrae la parte che si può (146): così $\sqrt{108} = \sqrt{3 \cdot 6^2} = 6\sqrt{3}$, $\sqrt{640} = \sqrt{8^2 \cdot 10} = 8\sqrt{10}$. Ma per aver poi la radice di 10, gli si aggiungono delle coppie di zeri e si opera come sopra, distinguendo in radice tanti decimali, quante coppie di zeri si aggiunsero: così $\sqrt{10} = 3{,}162$ ec.

	|R. 3,162 ec.
	Q. 10,00,00,00
	100
61	3900
626	14400
6322	1756

166. Si estrae la radice da un rotto estraendola dai suoi due termini al solito (164.165); e si estrae pure al solito dai decimali, reso prima pari il loro numero con degli zeri (165).

167. Osservazione. Sia $(10a+b)^2$ un quadrato qualunque, e b una delle dieci cifre 0, 1, 2 ec.: disposti in centinaja, diecine ed unità i termini del quadrato, si vedrà che la sua ultima cifra è anche l'ultima di b^2: ma b^2 può finire in 0, 1, 4, 5, 6, 9; dunque niun quadrato finisce in 2, 3, 7, 8. Ciò si ha pur dalla Tavola dei Quadrati, che con altre potenze si danno al fin di quest' Opera: e dalla formula e dalla Tavola si rileva di più 1°. che la penultime cifra dei quadrati terminati in 1, 4, 9 è un numero pari; dei terminati in 6 è un numero impari; dei terminati in 5 è 2; e dei terminati in 0 è 0: 2°. che la terzultima cifra dei terminati in 5 è 0, 2, 6. I numeri dunque senza tali proprietà dovranno escludersi, se si tratti di sceglier tra molti un quadrato.

168. Vogliasi ora la radice cuba della quantità ordinata C. Poichè $\sqrt[3]{a^3}=a$, scrivo a in R, sottraggo il suo cubo da C, e resta P. In questo resto dee trovarsi il triplo prodotto del quadrato di a nell' altro termine (154); triplico dunque a^2, parto P per $3a^2$, pongo in R il quoziente $2b$, sottraggo da P i tripli prodotti $3.a^2.2b$, $3.4b^2.a$, e il cubo di $2b$, e nulla avanzando, C è un cubo perfetto della radice $a+2b$.

$$\begin{array}{ll} \text{R} & a+2b \\ \hline \text{C} & a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3 \\ & -a^3 \\ \hline \text{P} & 0+6a^2b+12ab^2+8b^3 \\ 3a^2 & \quad -6a^2b-12ab^2-8b^3 \end{array}$$

169. Nel modo stesso si opera sui numeri. Diviso C in membra di tre cifre, scrivo 3 in R per radice del massimo cubo contenuto nel primo membro col resto 12: unisco al 12 la prima cifra 6 del secondo membro, e triplicato il quadrato della radice 3, divido 126 per 27, il che dà 4 per radice col resto 18: unisco pure al 18 l' altra cifra del secondo membro, e ne tolgo il triplo del quadrato di 4 moltiplicato per la radice 3: abbasso la terza cifra 1 ac-

canto al resto 41 e ne tolgo il cubo di 4; dopo che trattando la radice 34 come una sola cifra, si ricomincia l'operazione: e se il dato numero non sia cubo, si proseguirà l'estrazione ad arbitrio aggiungendo dei terni di zeri all'avanzo, e distinguendo altrettanti decimali nella radice.

	R	341
	C	39,651,821
$3\cdot3^2=27$ ——		126
		185
		$144=3\cdot4^2\cdot3$
		411
		$64=4^3$
$3\cdot34^2=3468$ ——		3478
		102
		$102=3\cdot34\cdot1^2$
		0001
		$1=1^3$
		0

170. La radice cuba d'un rotto si estrae al solito dai suoi due termini; e si estrae dai decimali, reso multiplo di 3 il loro numero per mezzo di zeri, e operando quindi come or ora si è detto (169).

171. Dai radicali posson talvolta estrarsi le radici coi metodi consueti (164. 168), e in tal guisa si trova che la radice di $14-6\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ è $3-\sqrt{2}+\sqrt{3}$: ma più spesso hanno la forma $p\pm\sqrt{q}$ (165), e se ne cerca la radice m^{sima}. Sia 1°. $m=2$, e supposta $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ la radice di $p\pm\sqrt{q}$, avremo I $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(p+\sqrt{q})}$, II $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(p\backsim\sqrt{q})}$ (pongo $\backsim$ per non eguagliar l'immaginario del secondo membro al reale del primo, nel caso di $\sqrt{q}>p$). Quadrandole e sommandole, si ha III $2x+2y=(1\pm1)p+(1\mp1)\sqrt{q}$: moltiplicandole, viene IV $2x-2y=2\sqrt{(p^2\backsim q)}$: sommo e sottraggo la III e IV ed ho $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\sqrt{[(1\pm1)p+(1\mp1)\sqrt{q}+2\sqrt{(p^2\backsim q)}]}$, $\sqrt{y}=\frac{1}{2}\sqrt{[(1\pm1)p+(1\mp1)\sqrt{q}-2\sqrt{(p^2\backsim q)}]}$, presi i segni di sopra se $p^2>q$.

Esempj. I. Sia $8+2\sqrt{15}$, onde $p=8, q=60, p^2>q$, e $p^2-q=4$; dunque $\sqrt{x}=\sqrt{5}$, $\sqrt{y}=\sqrt{3}$. II. Sia $7+4\sqrt{7}$, onde $p=7$, $q=112, p^2<q$, e $q-p^2=63$; dunque $\sqrt{x}=\ldots$ $\sqrt{\frac{7\sqrt{7}}{2}}$, $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}}$. III. Sia $14+2\sqrt{46}$, onde $p=14, q=184, p^2>q$, e $p^2-q=12$; dunque $\sqrt{x}=\sqrt{(7+\sqrt{3})}$, $\sqrt{y}=$

$\sqrt{(7-\sqrt{3})}$. IV. Sia $2\sqrt{-1}$, onde $p=0$, $q=-4$, $p^2>q$ e $p^2-q=4$; dunque $\sqrt{x}=1$, $\sqrt{y}=\sqrt{-1}$.

172. Sia 2°. $n=3$, e supposta $\frac{x\pm\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$ la radice terza di $p\pm\sqrt{q}$, verrà I $x+\sqrt{y}=\sqrt[3]{z(p+\sqrt{q})}$, II $x-\sqrt{y}=\sqrt[3]{z(p-\sqrt{q})}$. Cubandole e sommandole, si ha III $x^3+3xy=pz$; moltiplicandole, viene $x^2-y=\sqrt[3]{z^2(p^2-q)}$, che chiamo a, onde IV $y=x^2-a$. Pongo questo valor di y nella III, ed ho $4x^3-3ax-pz=0$, che fatto V $x=\frac{u}{2}$, diventa VI $u^3-3au-2pz=0$. Presa dunque $z=1$ se p^2-q è cubo, o se non lo è, fattolo divenire con un valore opportuno di z, cerco u per la VI (318) che dee esser razionale come x, se $p+\sqrt{q}$ è cubo, ed ho x per la V, y per la IV.

Esempj. I. Sia $10+6\sqrt{3}$ onde $p=10$, $q=108$, $p^2-q=-8$, cubo; dunque $z=1$, $a=-2$, $u^3+6u-20=0$, $u=2$, $x=1$, ed $y=3$. II. Sia $8+4\sqrt{5}$, onde $p=8$, $q=80$, $p^2-q=-16$, che non è cubo; fatto $z=2$, viene $a=-4$, $u^3+12u-32=0$, $u=2$, $x=1$, $y=5$. III. Sia $81+33\sqrt{6}$, onde $p=81$, $q=6534$, $p^2-q=27$, cubo; dunque $z=1$, $a=3$, $u^3-9u-162=0$, $u=6$, $x=3$, $y=6$.

173. Lo stesso metodo servirà per le radici più alte: ma quì si osservi che ogni quantità ha tre radici cubiche o terze, quattro quarte, .. n n^{sime}. Per aver quelle di 1 (oltre 1), si farà $z^n=1=r^n$, e divisa $z^n-r^n=0$ per $z-r$, verrà .... $z^{n-1}+rz^{n-2}+r^2z^{n-3}+$ ec. ....$+r^{n-1}=0$, da cui, fatto $r=1$, si avranno l' altre radici n^{sime} di 1. Così se $n=3$, l' altre due radici terze di 1 sono $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$: le chiamo γ, λ, ed è chiaro che $\gamma\lambda=1$, e che le radici terze d' una quantità qualunque a che è sempre moltiplicata per 1, saranno $\sqrt[3]{a}$, $\gamma\sqrt[3]{a}$, $\lambda\sqrt[3]{a}$.

APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA

ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

174. Come un *Teorema* è una verità necessaria da dimostrarsi, così un *Problema* è un Quesito da sciogliersi o una specie di enigma da indovinare. Or non è possibile di sciogliere l'enigma senza qualche cognizione a lui relativa, e senza dei rapporti tra ciò che si sa e ciò che si cerca. La soluzione dei problemi Matematici, detta propriamente *Analisi*, è fondata su questi rapporti che chiamansi *Condizioni del Problema*. Si tratta solo di esprimer queste condizioni in modo da dedurne la notizia di ciò che non si sapeva, il che si ottiene col paragone delle quantità note ed ignote. Le prime diconsi *le Date del Problema*, e si usa di esprimerle con le prime lettere a, b, c ec., α, β, γ ec. L'altre si chiamano le *Incognite*, e si notano con l'ultime lettere x, y, z, φ, ω ec. Ogni formula che esprime l'eguaglianza di più quantità, si chiama *Equazione*. Il segno d'egualità divide l'equazione in due *membra*; il sinistro è il *primo*, il destro è il *secondo*.

175. La più alta potenza dell'incognite determina il *Grado* d'un'equazione, che dicesi *pura* o *affetta* se l'incognita è solamente al grado m o anche ad altri gradi inferiori $m - 1$, $m - 2$ ec.: così $x = a \ldots z + b = y - c \ldots \beta\varphi - \varepsilon = (c + d)^n$ sono equazioni del *primo grado* o *lineari*. Se l'incognite hanno due dimensioni, cioè sono alzate a quadrato o moltiplicate tra loro, l'equazione è del *secondo grado* o *quadratica*, come $xy = b$, la pura $x^2 = a$, e l'affetta $x^2 + px = q$: ed è del *terzo* o *cubica* se ha l'incognite a tre dimensioni, come

$x^3 =$

$x^3 = c \ldots, x^3 + px^2 + qx = b \ldots\ldots xyz = f \ldots xy^2 = g$. Ma qualunque ne sia il grado, lo scopo è di far conoscere il valor dell' incognite. Un poco d' abito al calcolo basta per risolver l' equazioni del primo e secondo grado: quelle del terzo e del quarto hanno delle difficoltà: per quelle del quinto, del sesto ec, non vi è metodo generale.

Equazioni del primo grado.

176. Riunire in un membro dell' equazione tutti i termini noti, e lasciar nell' altro l' incognita *sola*, *positiva*, *senza coefficiente*, *senza divisore* e *senza esponente*, questo è ciò che si chiama *risolvere un' equazione*. Ora l' operazioni che guidano all' intento per un' equazione del primo grado, dipendono da tre assiomi.

177. I. *I due membri d' un' equazione restano eguali o vi si aggiungano o se ne tolgano quantità eguali.* Con questo mezzo si ha l' incognita *sola* e *positiva*; poichè se sia $a + 2b = 4c - 3x$, si aggiungerà $3x$ ai due membri e se ne toglierà $a + 2b$ onde venga $a + 2b + 3x - a - 2b = 4c - 3x + 3x - a - 2b$; riducendo, si avrà $3x = 4c - a - 2b$. Dunque *si trasporta una quantità da un membro, scrivendola con opposto segno nell' altro*.

178. II. *I due membri d' un' equazione restano eguali o si moltiplichino o si dividano per quantità eguali*. Con ciò si ha l' incognita *senza coefficiente* e *senza divisore*; poichè se sia $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$, 1°. trasporto (177) $px + \frac{cx}{f}$ nel primo membro ed m nel secondo, e riducendo viene $\frac{ax}{b} - px = n - m$: 2°. moltiplico i due membri per il divisore b di x, ed ho $ax - bpx = bn - bm$, cioè $(a - bp)\, x = b\,(n - m)$:

3°. divido i due membri per il coefficiente *totale* di x e ottengo $x = \frac{b(n-m)}{a-bp}$. *Dunque si toglie un coefficiente o un divisore dall' un membro, col divider respettivamente o moltiplicar per esso l' altro membro.*

Quì si avverta che da $x(m-n) = b(m-n)$ non può dedursi $x = b$ dividendo i due membri per $m-n$; poichè alla sussistenza dell' equazione $(x-b)(m-n) = 0$ basta che l' uno o l' altro dei due fattori $x-b, m-n$ sia zero (312): onde se si sappia che l' uno è zero, sarà dubbio se anche l' altro lo sia; e se si sappia che l' uno non lo può essere, l' altro lo sarà necessariamente.

179. III. *I due membri d' un' equazione restano eguali se si alzino a potenze eguali intere o rotte.* Così si ha l' incognita *senza esponente*; poichè se sia $b = a - \sqrt{x}$, si avrà trasportando (177) $x^{\frac{1}{2}} = a - b$, e alzando i due membri alla potenza 2ª., verrà $x = (a-b)^2$.

180. Quasi tutte queste operazioni si fanno (per dirlo quì in breve) anche nell' *ineguaglianze*, cioè in quelle formule che hanno tramezzo il segno $>$ o $<$. Infatti è chiaro che *se i due membri d' un' ineguaglianza si sommino, si sottraggano, si moltiplichino o si dividano per quantità eguali, i due membri resteranno ineguali*: onde posto $\frac{a^2x}{p} + mn > ab + ax + mn$, sarà 1°. $\frac{a^2x}{p} - ax > ab$: 2°. $\frac{ax}{p} - x > b$: 3°. $ax - px > bp$: 4°. $x > \frac{bp}{a-p}$.

In due cose differiscon l' ineguaglianze dall' equazioni. Supposto $x = a - b$, può anche farsi $a - b = x$; ma supposto $m > a - b$, non si può fare $a - b > m$, ma solamente $a - b < m$ ovvero $b - a > -m$. Di più in due equazioni $x = a - b, y = c + d$ ciascun membro dell' una può sommarsi, sottrarsi, moltiplicarsi o partirsi per ciascun membro dell' altra, salva l' egualità; ma nell' ineguaglianze anche omogenee, cioè ridotte al segno stesso $>$ o $<$, supposto $m > a, n > b$, non solo non può combinarsi il primo o secondo membro dell' una col secondo o primo membro dell' altra, salva l' omogeneità dell' ineguaglianza, ma neppur può sottrarsi o divider-

si il primo e secondo dell' una per il primo e secondo dell'altra, essendo solamente lecito di sommarli o moltiplicarli: perciò si potrà fare $m+n>a+b$ ovvero $mn>ab$, ma non già $m-n>a-b$ ovvero $\frac{m}{n}>\frac{a}{b}$. E di quì segue 1°. che non è lecita neppur la moltiplicazione quando include una sottrazione (121); così dalle formule $m>a-b$, $n>c-d$ può bene inferirsi $m+b>a$, $n+d>c$ e quindi $(m+b)(n+d)>ac$, ma non già $mn>(a-b)(c-d)$ se pur non si sappia d'altra parte che $a>b$ o $c>d$: 2°. che molto meno è lecito il fare $m-a>-b$, $n-c>-d$ e poi concludere $(m-a)(n-c)>bd$: 3°. che l' inalzamento d' un' ineguaglianza a potenze intere o rotte equivalendo alla moltiplicazione di più ineguaglianze tra loro, non può farsi qualche potenza o estrarsi qualche radice da un' ineguaglianza senza le stesse cautele.

181. Con questi principj si risolve ogni equazione del primo grado: tutto sta nell' arrivarvi, cioè nell' esaminar le condizioni proposte e nel combinarle in modo che ne risultino due diverse ed eguali espressioni. Ma non vi son precetti per questo, e solamente il lungo esercizio e gli esempj posson dar facilità e avvedutezza per condursi all' equazion d' un problema. Ecco gli esempj.

182. I. Un padre ha il sestuplo dell' età del suo figlio, e la somma delle loro età è 91 anni. Qual' è l' età di ciascuno?

L' Algebrista dirà: sia x l'età del figlio; dunque per la condizione del problema, l' età del padre è $6x$. Or queste età fanno 91 anni; dunque $7x=91$: ed ecco il problema *messo in equazione*; quindi (178) $x=\frac{91}{7}=13$; perciò il figlio ha 13 anni, e il padre ne ha $6.13=78$: infatti $13+78=91$. Così è risoluto il problema e verificata la soluzione.

II. Si cerca un numero tale che il suo prodotto per 4, il suo quoziente per 5, e il suo moltiplicatore facciano $12\frac{1}{2}$.

Chiamo x il numero cercato, ed ho $4x+\frac{1}{5}x+4=12\frac{1}{2}$; dunque (177) $4x+\frac{1}{5}x=8\frac{1}{2}$: quindi (178)

$20x + x = 42\frac{1}{2} = \frac{85}{2}$, ed $x = \frac{85}{2 \cdot 21} = 2\frac{1}{42}$: infatti $\frac{85}{42} \times 4 + \frac{85}{42 \cdot 5} + 4 = 12\frac{1}{2}$, condizion del problema.

III. Un terremoto abbattè in un giorno la metà di certe case, nel giorno seguente un terzo, un duodecimo negli altri giorni, e restano in piedi 63 case. Quante erano?

Sia x il numero delle case; $\frac{1}{2}x$ saranno le cadute nel primo giorno, $\frac{1}{3}x$ e $\frac{1}{12}x$ le cadute negli altri giorni: e poichè le case cadute e le restate formano x, si avrà per equazion del problema $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + 63 = x$. La moltiplico per 12 (178) e sarà $6x + 4x + x + 756 = 12x$ e riducendo, $11x + 756 = 12x$, cioè (177) $x = 756$ case.

IV. Tre amici, che chiamo B, C, D, giocarono al Lotto. Il gioco di B e C fa 21 lira; quello di B e D ne fa 24; e quello di C e D 27. Quanto ha messo ciascuno?

Suppongo $a = 21$, $c = 24$, $f = 27$ ed x il denaro di B; dunque $a - x$ è quello di C, e $c - x$ quello di D; che sommati debbon far 27 lire. Dunque $a - x + c - x = f$, e (177 · 178) $x = \frac{1}{2}(a + c - f) = 9$, il che dà 12, e 15 lire per C e D.

183. Al primo aspetto le tre quantità del denaro posto parevano tante incognite differenti: ma osservando meglio, si vede che determinata una di esse, restan determinate anche l'altre. Perciò il numero delle incognite non dipende dal numero delle questioni, ma dalla relazione che è tralle condizioni del Problema. Pur si avrebbe la soluzione introducendo più incognite: ma in generale bisogna sempre cercar le soluzioni più semplici.

V. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi e $\frac{1}{6}$ di ciò che resta; al secondo, 2000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto; al terzo, 3000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto, e così fino all' ultimo. Fatte le parti, si trova che i figli hanno ereditato per egual porzione. Si cerca 1°. l' asse paterno; 2°. il numero dei figli; 3°. la parte di ciascuno.

Queste tre questioni parrebbero tre incognite: ep-

pur conosciuto l' asse paterno, si conosce tutto. In fatti tolti da esso i 1000 scudi $+\frac{1}{6}$ del resto, che vanno al maggiore, l' asse diviso per questa parte, darà il numero delle parti eguali e perciò de' figli. Chiamo dunque l' asse paterno x, e per brevità pongo $a=1000$; poi dico: quando il maggiore ha presi 1000 scudi, l' asse resta $x-a$, di cui dee avere $\frac{1}{6}$; dunque la sua parte è $a+\frac{1}{6}(x-a)=\frac{1}{6}(5a+x)$ (51): e trovata la parte eguale del secondo, si avrà l' equazione. Detratta la parte del maggiore, resta $x-\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{1}{6}(5x-5a)$, di cui il secondo dee avere $2000=2a$, e rimarrà $\frac{1}{6}(5x-5a)-2a=\frac{1}{6}(5x-17a)$, il cui sesto è $\frac{1}{36}(5x-17a)$: onde la parte del secondo è $2a+\frac{1}{36}(5x-17a)=\frac{1}{36}(55a+5x)$. Dunque $\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{1}{36}(55a+5x)$. Moltiplico i due membri per 36, ed ho (178) $30a+6x=55a+5x$, $x=25a=25000$ (177), la parte del maggiore 5000 scudi, e cinque fratelli.

VI. A e B postisi al gioco con egual somma, han perduto. La perdita di A è $12'$, quella di B è $57'$, e B ha solo il quarto di ciò che resta ad A. Quanto aveano in principio?

Aveano x'; e poichè A perdè 12, gli resta $x-12$, mentre a B che perdè 57, resta $x-57$: dunque quadruplicando il resto di B, $x-12=4(x-57)$ ed $x=72$ (177. 178).

VII. Qual è il numero il cui terzo e quinto differiscono di 8?

Sia x questo numero; sia $a=8$, $\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$; dunque $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=a$, onde $x=\frac{amn}{n-m}=60$.

VIII. Diviso un numero x per 6, si è avuto un tal quoziente che sommato col divisore e col dividendo, dà 69. Qual è questo numero?

Sia $a=6$, $b=69$, e si avrà $\frac{x}{a}+a+x=b$; dunque $x=\frac{(b-a)a}{a+1}=54$.

IX. Trovar due quantità di cui è data la somma e la differenza.

Sia a la somma, b la differenza, x la quantità maggiore, y la minore; dunque $x+y=a$ ed $x-y=b$. Sommate e poi sottratte quest' equazioni (177), si ha $2x=a+b$ e $2y=a-b$, onde $x=\frac{1}{2}(a+b)$ ed $y=\frac{1}{2}(a-b)$.

184. Dunque *data la somma e la differenza di due quantità, la maggiore è la metà della somma e della differenza, e la minore è la metà della somma meno la metà della differenza.*

Applicazioni. Una Casa di due piani ha 35 piedi di altezza, e il primo piano è 4 piedi più alto del secondo: qual' è l' altezza de' due piani? sarà $a=35$, $b=4$; dunque $x=19\frac{1}{2}$, e $y=15\frac{1}{2}$.

Due pietre pesano libbre 2878, e l' una è libbre 156 meno dell' altra: quanto pesa ciascuna? $a=2878$, $b=156$; dunque $x=1517$, $y=1361$.

185. Le due equazioni $x+y=a$, $x-y=b$ possono anche risolversi prendendo da ciascuna il valor di x, il che dà $x=a-y$, $x=b+y$; e poichè $x=x$, sarà anche $a-y=b+y$, onde $2y=a-b$ ed $y=\frac{1}{2}(a-b)$, valore che posto nell' equazione $x=a-y$, la riduce ad $x=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$. Ma per *eliminare* un' incognita onde si conosca l' altra, è preferibile il compendio di sopra, che con un piccolo artifizio avrà sempre luogo. Infatti sieno le tre equazioni I. $2y+4x-3z=a$, II. $5y-7x+4z=b$, III. $6x-3y+5z=c$ e si voglia eliminare y. Moltiplico ciascuna equazione (178) per il prodotto dei coefficienti di y nell' altre due, e mi viene IV. $30y+60x-45z=15a$, V. $30y-42x+24z=6b$, VI. $60x-30y+50z=10c$: dalla IV. tolgo la V. e poi sommo la IV. e VI., il che dà le ridotte VII. $34x-23z=5a-2b$, VIII. $24x+z=3a+2c$, e così è eliminato y. Per eliminare z moltiplico l' VIII. per il coefficiente 23 di z nella VII, e sommando queste due, ho finalmente $x=$

$\frac{37a+23c-b}{273}$, valore che posto nell' VIII. fa conoscere z, e quindi si ha y dalla I.

Quasi con lo stesso artifizio si eliminano l' incognite di gradi più alti. Sieno le due equazioni generali I. $My^4 + Ny^3 + Py^2 + Qy + R = 0$, II. $my^4 + ny^3 + py^2 + qy + r = 0$, ove $M, m, N, n, P, p, Q, q, R, r$ sono espressioni o *funzioni* qualunque di x, e voglia eliminarsi y. Moltiplico la I. per m, la II. per M e sottratta l' una dall' altra, viene III. $(Nm - Mn) y^3 + (Pm - Mp) y^2 + (Qm - Mq) y + Rm - Mr = 0$: moltiplico nuovamente la I. per r, la II. per R, e sottratta l' una dall' altra, viene IV. $(Mr - Rm) y^3 + (Nr - Rn) y^2 + (Pr - Rp) y + Qr - Rq = 0$. In tal guisa y è abbassato d' un grado nella III. e IV: onde se queste si trattino come le due primitive, y si abbasserà d' un altro grado ec., finchè sparirà interamente. Questo metodo però conduce alle volte ad equazioni più alte di quel che il problema esigerebbe.

186. L' incognite non posson dunque eliminarsi se non si abbia un egual numero d' equazioni, nel qual caso il problema si chiama *determinato*. Poichè se vogliansi due quantità x, y, di cui è data la somma a, l' unica condizion del problema espressa dall' equazione $x + y = a$, insegna solo che l' incognita x eguaglia una quantità parimente incognita $a - y$. Questi problemi, ove sono più incognite che equazioni, si chiamano *indeterminati* dei quali parleremo in appresso. Diconsi all' incontro *più che determinati* se hanno più equazioni che incognite, o se un' equazione apparentemente diversa, è contenuta nell' altre. Vogliansi tre numeri x, y, z che sottratti a 2 a 2 facciano i numeri dati a, b, c. L' equazioni saranno I. $x - y = a$, II. $x - z = b$, III. $y - z = c$: ma poichè la II. è la somma dell' altre due, il problema è più che determinato ed anche impossibile, se pur non sia $b = a + c$.

X. Avendo dei gettoni nelle mani, ne passo uno dalla destra alla sinistra, e con ciò ne ho un egual numero in ambedue: ma se ne passassi due dalla sinistra alla destra, questa ne avrebbe il doppio dell' altra. Quanti gettoni erano da principio in ciascuna mano?

Sieno x quelli della destra, y quelli della sinistra: si avrà per la prima condizione $x - 1 = y + 1$, e per la seconda $x + 2 = 2(y - 2)$. Sottratta la prima dalla seconda, si ha $y = 8$, onde $x = 10$.

XI. Un Orefice vende 3 once d'oro e 5 d'argento per 318 lire; e 5 once d'oro e 7 d'argento per 522 lire: quanto costa l'oncia d'oro e d'argento?

Posti x e y i valori cercati, $b = 522$, $a = 318$, si avrà $3x + 5y = a \ldots 5x + 7y = b$, le quali, operando secondo la regola (185), divengono $15x + 25y = 5a \ldots$ $15x + 21y = 3b$, da cui si ha $4y = 5a - 3b$; dunque $y = 6$, valore che sostituito in una dell'equazioni primitive, dà $x = 96$.

Per generalizzar simili problemi, sieno le due equazioni I. $px + qy = a$, II. $mx + ny = b$. Moltiplicando la I. per m e la II. per p, ho III. $mpx + mqy = am$, IV. $mpx + npy = bp$, e sottraendo la IV. dalla III., verrà $mqy - npy = am - bp$; perciò $y(mq - np) = am - bp$, e finalmente $y = \frac{am - bp}{mq - np}$. Sostituito questo valore nella I o II, trovo $x = \frac{bq - an}{mq - np}$. Se ora le lettere m, n, p, q abbiano i respettivi valori del problema ultimo, x ed y saranno respettivamente 96 e 6 come sopra; e variando i valori delle quantità date, la sostituzione nelle formule di x e d'y risolverà tutti i problemi analoghi. Perciò le soluzioni generali son preferibili alle particolari.

XII. Comprai tre cavalli: il primo colla metà del prezzo degli altri due, vale 25 zecchini; l'altro con un terzo del prezzo degli altri due, 26; l'ultimo colla metà del prezzo degli altri due, 29. Qual è il prezzo di ciascuno?

Chiamando x, y, z i tre prezzi cercati, l'equazioni del problema saranno $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 25 \ldots y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 26 \ldots z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 29$, le quali, fatti sparire i rotti (178), divengono I. $2x + y + z = 50$, II. $3y +$

$x +$

$x + z = 78$, III. $2z + x + y = 58$. Tolgo la I. dalla II. e viene IV. $2y - x = 28$; moltiplico la II. per 2 e ne tolgo la III., il che mi dà V. $5y + x = 98$; infine sommo la IV. e V. e trovo $y = 18$, valore che sostituito nella IV. dà $x = 8$, onde posti nella III. i valori di x, y, si ha $z = 16$.

187. I problemi sono *impossibili* quando conducono ad un risultato assurdo; per esempio: *trovare un numero* x *eguale alla sua decima parte*; ridotto il problema in equazione, si ha $x = \frac{x}{10}$ cioè $10 = 1$, assurdo che dimostra impossibile il problema. I problemi poi sono in realtà *teoremi* quando l'equazion finale è *identica* e perciò si riduce a $0 = 0$; per esempio: *trovar tre numeri* x, x + d, x + 2d *in continua proporzione aritmetica onde il prodotto degli estremi col quadrato* d² *della differenza eguagli il quadrato dell' intermedio*: ridotto il problema in equazione, si ha $x^2 + 2dx + d^2 = x^2 + 2dx + d^2$ cioè $0 = 0$, risultato vero, da cui essendo svanito x, si impara che il problema è un teorema, e che comunque si prenda x, la proprietà ricercata avrà sempre luogo. Così l' Algebra risponde a tutto: scioglie i problemi se son possibili, e fa conoscere se sono impossibili o se degenerano in teoremi.

Equazioni del secondo grado.

188. L' equazioni *quadratiche* o del secondo grado posson rappresentarsi con la formula $x^2 + px = q$ in cui p e q son note: trovata dunque la risoluzion di questa, saran risolute generalmente tutte l' altre. Ora 1°. per avere il valor di x, bisogna estrar la radice quadra dall' equazione $x^2 + px = q$; 2°. se $p = 0$, l' equazione diventa $x^2 = q$, onde (179) $x = \pm\sqrt{q}$, e si avrà x esatto o approssimato quanto si vuole (165). Il radicale ha il doppio segno a cagion del doppio valor dell' incognita (163).

189. Ma se p è quantità reale, bisogna *compire il quadrato* del primo membro (151), e aggiungere al secondo la stessa quantità (177); dunque $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 =$

$q + \frac{1}{4}p^2$, e perciò (179) $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$: ed $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

190. I due valori di x indicati dal segno $\pm$, chiamansi *radici*; onde *ogni equazione del secondo grado ha due radici*, cioè $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, ed $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

191. Se q è positivo, lo è anche il radicale, poichè $\frac{1}{4}p^2$ è positivo (121); onde o il valor di $q + \frac{1}{4}p^2$ forma un quadrato e può aversene la radice esatta, o non lo forma e la radice può aversi per approssimazione (165).

192. Ma se q è negativo, posson darsi tre casi; 1°. $q < \frac{1}{4}p^2$; allora il positivo supera il negativo, e il resto è reale: 2°. $q = \frac{1}{4}p^2$; allora il radicale sparisce, e il doppio valor di x si riduce a $-\frac{1}{2}p$, cioè le due radici dell' equazione $x^2 + px = q$ sono eguali: 3°. $q > \frac{1}{4}p^2$; allora il negativo superando il positivo, il resto è negativo e la radice è immaginaria (145). Ecco dei Problemi.

193. I Trovare un numero che col suo settuplo e col suo quadrato dia 144. Chiamo x questo numero; dunque il suo quadrato è x^2, e si ha l' equazione $x^2 + 7x = 144$. Compito il quadrato, avrò $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4}$, ed estraendo la radice e trasponendo, verrà $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(144 + \frac{49}{4})} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}}$: ma $\sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$; dunque $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}$. Il segno + dà $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$, il segno − dà $x = -\frac{7}{2} - \frac{25}{2} = -16$. Infatti il quadrato di 9 (= 81) con sette volte 9 (= 63), come pure il quadrato di − 16 (= 256) con sette volte − 16 (= − 112) dà 144. Ecco un esempio della doppia soluzione che ricevon l' equazioni del secondo grado.

194. Si può anche paragonar l' equazione $x^2 + 7x = 144$ con l' equazion generale (188) $x^2 + px = q$, e si ha $p = 7$, $q = 144$; onde sostituiti questi valori nelle formule (190) $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, viene $x = 9$ ed $x = -16$.

II. Trovare un numero tale che sottraendo 2 dal suo quadrato, il resto sia 1. Chiamo x il numero, e

avremo $x^2-2=1$; trasponendo, $x^2=3$; estraendo la radice, $x=\pm\sqrt{3}$: dunque la radice di 3 presa o in + o in —, soddisfà al problema: ma essendo ella inassegnabile, bisogna contentarsi d' un'approssimazione.

III. Dividere il numero 10 in due parti tali che il lor prodotto sia 100. Fatto $a=10$, $b=100$, ed x una delle parti cercate, l'altra sarà $a-x$, e il loro prodotto $ax-x^2$; onde l' equazione è $ax-x^2=b$. Trasponendo i due membri per render positivo x^2, si avrà $x^2-ax=-b$. La formula (188) dà $p=-a$, $q=-b$, onde $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(-b+\frac{1}{4}a^2)}=5\pm\sqrt{(-100+\frac{100}{4})}=5\pm\sqrt{-75}$, radice immaginaria; dunque il problema è assurdo, nè si può divider 10 in due parti che moltiplicate faccian 100.

IV. Un numero x di persone debbon pagar 342' per egual porzione. Tre non pagando, suppliscon l'altre, il che importa a ciascuna 19' di più. Cerco x. Si dirà: la parte di ciascuno, se tutti avessero pagato, sarebbe $\frac{342'}{x}$; tre non pagando, la parte dei rimanenti è $\frac{342}{x-3}$: ma questa supera l' altra di 19'; dunque $\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19$. Fatte le operazioni, si trova $x^2-3x=54$, e paragonando con la formula, si ha $p=-3$, $q=54$, onde $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(54+\frac{9}{4})}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{225}{4})}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}=9$ ovvero -6. La prima soluzione è quella che si cerca; la seconda è relativa a un' altra esposizion del problema. Eran dunque 9 i Viaggiatori, 6 dei quali pagando 57' per uno, hanno formata la somma di 342'.

La radice negativa -6 serve al problema inverso, cioè: Un numero x di persone debbon pagar 342' per egual porzione: sopraggiungon tre altri che pagando la loro parte, diminuiscon di 19' la porzione dei primi. Cerco x. Risolvendo il problema, si trovan le radici $+6$ e -9.

V. Un Generale vorrebbe dispor dei Soldati in battaglion quadrato; ma nel suo primo disegno avan-

zano 124 uomini, e se aggiunge un uomo ad ogni fila, ne mancano 129. Quanta è la Truppa? Pongo $a=124$, $b=129$, x il numero dei Soldati d'una fila nel primo disegno; sarà $x+1$ il loro numero nel secondo: or nel primo la Truppa è x^2+a, nel secondo $(x+1)^2-b$; dunque ella è espressa in due modi da cui risulta l'equazione $x^2+a=x^2+2x+1-b$, che par del secondo grado: ma trasponendo (177), resta $x=\frac{a+b-1}{2}=126$, onde $x^2=15876$, ed $x^2+a=16000$, Truppa cercata.

VI. Si cercan due numeri tali, che il triplo del loro prodotto eguagli e il doppio della lor somma, e la differenza de' lor quadrati. Sia x il più grande de' numeri, y il minore. Per la prima condizione, $2(x+y)=3xy$; per la seconda, $3xy=x^2-y^2$, onde $2(x+y)=x^2-y^2$. Da questa equazione si deduce $x=y+2$; il che cangia la precedente in $4y+4=3y^2+6y$, d'onde viene (201) $y=-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$, ed $x=\frac{5}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$.

VII. Il numero degli scudi di A, B è tale che la lor somma sottratta dai lor quadrati fa 78, ma unita al lor prodotto fa 39. Quali son questi numeri? Gli chiamo x, y e operando nei modi soliti, il problema che è del secondo grado, comparisce del quarto. In tali casi potrà farsi così. Sia $2x$ la somma dei due numeri, $2y$ la lor differenza; dunque (184) il maggiore sarà $x+y$, il minore $x-y$. Si avrà perciò I^a. $(x+y)^2+(x-y)^2-2x=78$, cioè $39=x^2+y^2-x$; II^a. $(x+y)(x-y)+2x=39=x^2-y^2+2x$. Sommando le due equazioni, verrà $2x^2+x=78$, che risoluta dà $x=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=6$, onde $y^2=39+x-x^2=9$, $y=3$, e i numeri cercati $x+y=9$, $x-y=3$.

195. Dee quì osservarsi per ultimo che l'equazioni di questa forma $x^{2m}+px^m=q$ si risolvono come quelle del secondo grado; poichè fatta $x^m=y$, si riducono ad $y^2+py=q$ onde $y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$ che dà $x=\pm\sqrt[m]{[-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$.

Infiniti e Infinitesimi

196. L'*Infinito* e l'*Infinitesimo* son proprietà della quantità, per cui ella può crescere e scemare oltre ogni limite. L'infinito *del prim' ordine* che dicesi anche puramente *infinito*, ha per carattere ∞, e nasce dalla somma o della serie $1 + 1 + 1 +$ ec. *in infi.* $= \infty \cdot 1$; o dell'altra $a + a + a +$ ec. *in infi.* $= \infty a$, che quantunque ineguali, hanno però tra loro la ragion finita $1 : a$. Gl' infiniti di *second' ordine*, di *terzo* ec. possono essere ∞^2, ∞^3 ec.

197. Poichè $1 + 1 + 1 +$ ec. *in inf.* $= \frac{1}{1-1} = \infty$, ed $a + a + a +$ ec. *in inf.* $= \frac{a}{1-1} = \infty a$, avremo $\frac{1}{0} = \infty$ ovvero $\frac{a}{0} = \infty a$; cioè *un finito diviso per zero*, *esprime l'infinito*. Di quì viene 1°. $\frac{1}{\infty} = 0$ ovvero $=$ $0 \cdot a = 0$, cioè *un finito diviso per l'infinito*, *esprime l'infinitesimo o zero*: 2°. $\frac{\infty}{a} = \frac{1}{0} = \infty$, cioè *l'infinito diviso per un finito*, *esprime l'infinito*: 3°. $\frac{0}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$, cioè *zero diviso per un finito*, *esprime zero o l'infinitesimo*: 4°. $0 \cdot \infty = \frac{a}{\infty} \cdot \infty = a$, cioè *l'infinitesimo o zero moltiplicato per l'infinito*, *dà un finito*: 5°. $\frac{1}{\infty} \cdot b = 0 \cdot b = 0$, cioè *l'infinitesimo o zero moltiplicato per un finito*, *dà zero o l'infinitesimo*: 6°. $b \pm \frac{1}{\infty} = b \pm 0 = b$, e del pari $\infty \pm 0 \cdot \infty = \infty \pm 1$ (3°.) $= (1 \pm 0) \infty = \infty$, cioè *aggiunti o tolti al finito un infinitesimo*, *o*

all' infinito un finito, essi non crescono e non scemano: 7°. $\frac{0.\infty a}{0} = \frac{a}{0}$, e perciò $0.\infty\, a = \frac{0}{0}$; e del pari $\frac{0.\infty a}{\infty} = \frac{a}{\infty}$, e perciò $\frac{1}{0.\infty} = \frac{\infty}{\infty}$, *cioè zero diviso per zero ed infinito diviso per infinito, esprimono un finito* (2°.): 8°. $\infty^n \pm \infty^m$ (supposto $n = m + k$) $= (\infty^k \pm 1)\,\infty^m = \infty^{k+m} = \infty^n$; e del pari $\frac{1}{\infty^m} \pm \frac{1}{\infty^n} = (1 \pm \frac{1}{\infty^k})\,\frac{1}{\infty^m} = \frac{1}{\infty^m}$ (5°.), *cioè l' infinito d' ordine inferiore svanisce in confronto dell' infinito d' ordine superiore negli interi; al contrario nei denominatori dei rotti*.

198. Due cose potrebbe dedur taluno dal fin quì detto (197.6°.): l' una, che dunque $a^{\infty \pm m} = a^\infty$; e questo è falso, perchè la somma o differenza degli esponenti è moltiplicazione o divisione (143): l' altra, che dunque $(1 + \frac{r}{\infty})^\infty = 1^\infty = 1$ (supposta r finita); conseguenza pur falsa, perchè il prodotto dell' infinitesimo per l' infinito dà un finito (197.4°.). Infatti sviluppando quel binomio, e fatto $\infty - 1 = \infty - 2$ ec. $= \infty$ (197.6°.), si ha $(1 + \frac{r}{\infty})^\infty = 1 + r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{2\cdot 3} +$ ec. $= f$, quantita finita e > 1.

199. Si raccoglie però da questa equazione che vi è sicuramente un infinito assai diverso dal fin quì considerato. Poichè supposto $\infty = (1 + \frac{r}{\infty})^\infty$, che sarà r? non sarà finita, perchè verrebbe $\infty = f$ (198), il che è assurdo: non sarà infinita nel senso finora inteso, perchè verrebbe $\infty = r$, cioè il primo membro dell' equazione eguaglierebbe il solo secondo termine del binomio sviluppato (198), il che pure è assurdo: sarà dunque r infinita, ma infinitamente più piccola dell' infinito ordinario. Si rileva lo stesso dall' equazioni $r^r = \infty$, $r^{r^r} = \infty$ ec., ove r non può esser finita, perchè la sua potenza finita non può eguagliar l' infinito; e non può essere infinita nel primo significato, perchè $\infty^\infty = \infty$ è un assurdo. Vi è dunque un certo infinito ∞' (infinitamente minor d' ∞) che ha un nu-

mero infinito d' ordini ∞'', ∞''' ec. infinitamente minori d' ∞', che danno $\infty'^{\infty'} = \infty''^{\infty''^{\infty''}} =$ ec. $= \infty$.

200. Debbano infine valutarsi l' espressioni b^{∞}, $\frac{\infty^m}{b^{\infty}}$, $\left(\frac{c}{b}\right)^{\infty}$ quando $\frac{c}{b}$ è un rotto proprio. Pongo $b = c + h$, ed ho $\frac{\infty^m}{b^{\infty}} = \frac{\infty^m}{(c+h)^{\infty}} = \ldots\ldots$

$$\frac{\infty^m}{c^{\infty} + \infty c^{\infty-1} h + \text{ec.} + \frac{\infty^m c^{\infty-m} h^m}{2.3\ldots m} + \text{ec.} \ldots h^{\infty}};$$

dunque $\frac{h^m \infty^m}{2.3\ldots m b^{\infty}} < \frac{\infty^m}{\infty^m c^{\infty-m}}$ (48); dunque 1°. $b^{\infty} > \ldots \frac{h^m \infty^m c^{\infty}}{2.3\ldots m c^m}$, cioè *il finito a potenza infinita è infinite volte maggiore di* ∞: 2°. $\frac{\infty^m}{b^{\infty}} < \frac{2.3\ldots m c^m}{h^m c^{\infty}}$, cioè *l' infinito a potenza finita diviso per un finito a potenza infinita, esprime meno dell' infinitesimo*: 3°. $\frac{c^{\infty}}{b^{\infty}} < \frac{2.3\ldots m c^m}{h^m \infty^m}$, cioè *un rotto proprio a potenza infinita, è meno dell' infinitesimo*.

RAGIONI, PROPORZIONI E PROGRESSIONI

201. Due quantità posson paragonarsi tra loro o sottraendole o dividendole: la differenza o il quoziente che ne risultano, diconsi la loro *ragione*. Ella è *aritmetica* se si prende la differenza, *geometrica* se il quoziente. Così la ragione atitmetica di 39 a 13 è $39 - 13 = 26$, la geometrica è $\frac{39}{13} = 3$; le due quantità 39, 13 si separano con due punti e diconsi *antecedente* e *conseguente*. Invertendo i termini, la ragione aritmetica sarebbe $13 - 39 = -26$, la geometrica $\frac{13}{39} = \frac{1}{3}$: ma noi sottrarremo il minor termine dal maggiore, e divideremo il maggiore per il minore.

202. Dunque 1°. supposta $b : a$ una ragione, e fat-

ta d o q la sua differenza o il suo quoziente, sarà per l' aritmetica $b - a = d$ o $b = a + d$, per la geometrica $\frac{b}{a} = q$ o $b = aq$, e si avrà la formula generale delle due ragioni $a : a + d$, $a : aq$: 2°. due ragioni saranno *eguali* se abbiano la differenza o il quoziente medesimo; perciò $a : a + d = b : b + d$, perchè $a + d - a = d = b + d - b$, ed $a : aq = b : bq$ perchè $\frac{aq}{a} = q = \frac{bq}{b}$: 3°. le due specie di ragione procederanno con operazioni sempre corrispondenti di sottrazione e di divisione, di somma e di moltiplicazione, e perciò anche di moltiplicazione e di formazion di potenza, di divisione e di estrazion di radice; e come, per esempio, la geometrica che è un rotto (201), non si cangia moltiplicando o dividendo per una quantità stessa i suoi termini (49), così non si cangia l' aritmetica coll' aggiungere o togliere ai suoi termini una medesima quantità.

203. La ragione si chiama *composta* se sia la somma o il prodotto di più ragioni: così le ragioni $a:b$, $f:g$, $h:k$ danno la composta aritmetica $a+f+h:b+g+k$, o la composta geometrica $afh:bgk$. Che se le due, le tre ec. componenti sieno eguali (202.2°.), la composta aritmetica sarà *dupla*, *tripla* ec., e la composta geometrica sarà *duplicata*, *triplicata* ec. d' una qualunque delle componenti: così le due aritmetiche eguali $a : a + d$, $b : b + d$ (202.2°.) danno la dupla $a + b : a + b + 2d$, la cui differenza $2d$ è doppia di d; e le due eguali geometriche $a : aq$, $b : bq$ danno la duplicata $ab : abq^2$, il cui quoziente q^2 è duplicato o quadrato di q. Perciò la ragion duplicata, triplicata ec. dicesi anche la *ragion dei quadrati*, *dei cubi* ec.

204. Due ragioni eguali (202.2°.) forman la *proporzione*, che è o *aritmetica* o *geometrica* se le ragioni sono aritmetiche o geometriche: l' una si distingue con tre, l' altra con quattro punti tra le due ragioni. Perciò $a : a + d \,.\!\cdot\!.\, b : b + d$ è la formula generale delle

le proporzioni aritmetiche, ed $a : aq :: b : bq$ delle geometriche, e si pronunzian così: a *sta ad* a + b *o ad* aq, *come aritmeticamente o geometricamente* b *a* b + d *o a* bq. Il primo e l' ultimo termine diconsi *estremi*, i due di mezzo *intermedj*, e la proporzione senz' altro aggiunto s' intende sempre geometrica. Non parleremo dell' *armonica*, poco in uso tra i Matematici, e risultante da quattro termini tali che il primo stia all' ultimo come la differenza de' due primi a quella de' due ultimi: se ne ha un esempio in 6, 8, 14, 21.

205. Quando di quattro termini dati il primo sta al secondo o come il terzo al quarto o come il quarto al terzo, i due ultimi diconsi in ragione o *diretta* o *inversa* de' due primi. Nell' un caso i quattro termini formano proporzione (204), non già nell' altro; e per ristabilirla bisogna o sottrar dall' unità i due termini inversi scrivendo $a : a + d \therefore 1 - b - d : 1 - b$, o dividerli per l' unità scrivendo $a : aq :: \frac{1}{bq} : \frac{1}{b}$; infatti o quei due termini si sommino con $2b + d$ o si moltiplichino per b^2q (202), rinascono le proporzioni primitive.

206. Se queste hanno quattro termini diversi, si chiaman *discrete*, se gl' intermedj sono uno stesso, si dicono *continue*. Tali sono $a : a + d \therefore a + d : a + 2d$, ed $a : aq :: aq : aq^2$, che più in breve si scrivono $\div a : a + d : a + 2d$ e $\div\div a : aq : aq^2$.

207. Una serie finita o infinita di proporzioni continue forma la *progressione*, le cui formule facilmente si deducono da quelle della proporzion continua (206). Eccole

Progressione aritm.^{a} $\div a : a + d : a + 2d : a + 3d \ldots a + (n - 1)d$

Progressione geom.^{a} $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots aq^{n-1}$ supposto n il numero dei loro termini. E da tutte queste formule nascon le proprietà di cui dobbiam parlare.

208. I. *In ogni proporzione aritmetica* $\therefore$, *o geome-*

trica $::$, *le somme, o i prodotti degli estremi e degli intermedj si eguagliano*. Infatti da $a ; a+d \therefore b : b+d$ si ha $a+b+d = a+d+b$, e da $a : aq :: b : bq$ si ha $abq = aqb$. Onde dati tre termini qualunque può sempre aversi il quarto proporzionale x; poichè se, per esempio, manchi il terzo nell' aritmetica, sarà $a+b+d = a+d+x$ ed $x = b$; se manchi il secondo nella geometrica, sarà $abq = bx$ ed $x = aq$: del pari se manchi il primo nell' inversa aritmetica $x : a+d \therefore 1 - b - d : 1 - b$, sarà $x+1-b = a+d+1-b-d$, ed $x = a$; se manchi il terzo nell' inversa geometrica $a : aq :: x : \frac{1}{b}$, sarà $\frac{a}{b} = aqx$ ed $x = \frac{1}{bq}$.

209. II. *In ogni proporzion continua* $\div$ *o* $\div\!\!\div$ *la somma o il prodotto degli estremi eguaglia il doppio o il quadrato del medio*. Infatti da $\div a : a+d : a+2d$ si ha $a+a+2d = 2(a+d)$, e da $\div\!\!\div a : aq : aq^2$ viene $a \cdot aq^2 = (aq)^2$. Onde per trovare il medio x dati gli estremi $a, a+2d$ ovvero a, aq^2, vi vorrà la division per 2 nell' aritmetica, e l' estrazion della radice seconda nella geometrica; poichè $a+a+2d = 2x$ ed $x = \frac{2(a+d)}{2} = a+d$, ovvero $a \cdot aq^2 = x^2$ ed $x = \sqrt{(aq)^2} = aq$.

210. III. *Ogni proporzione* $\therefore$ *o* $::$ *dà un' equazione*, il che è evidente (208.209), *ed ogni equazione dà una proporzione* $\therefore$ *o* $\div\!\!\div$. Sieno le tre equazioni qualunque $1^a.\ mn = pq$; $2^a.\ xy = 1$; $3^a.\ a^2 - x^2 = b^2 - y^2$: se si vuole la proporzione aritmetica, sarà $1^\circ.\ 1 : \frac{m}{p} \therefore \frac{-q}{n} : -1$; $2^\circ.\ 1 : y \therefore \frac{-1}{x} : -1$; $3^\circ.\ a^2 : b^2 \therefore x^2 : y^2$; e se si vuole la proporzion geometrica, verrà $1^\circ.\ m : p :: q : n$; $2^\circ. \div\!\!\div x : 1 : y$; $3^\circ.\ a+x : b+y :: b-y : a-x$.

211. IV. *Salva la proporzione possono* 1°. *mettersi gli estremi in luogo dei medj, e un medio o un estremo in luogo dell' altro*: 2°. *sommarsi o sottrarsi nell'* $\therefore$

e moltiplicarsi o dividersi nella ∷ *per una stessa quantità* m *tutti i termini; o anche per* m *i due primi, e per* f *i due ultimi; o per* m *il primo ed il terzo, e per* f *il secondo ed il quarto:* 3°. *sommarsi o sottrarsi nell' una, e moltiplicarsi o dividersi nell' altra i corrispondenti termini di due proporzioni omogenee:* 4°. *moltiplicarsi o dividersi nell'* ∴ *tutti i termini per* m; *e tutti nella* ∷ *alzarsi alla potenza o deprimersi alla radice* m^{sima}: 5°. *nella sola* ∷ *ridursi i primi e gli ultimi due in un sol termine sommandoli o sottraendoli, per metterli in proporzione o col primo e col terzo, o col secondo e col quarto, o con le differenze o somme dei due primi e de' due ultimi*. Infatti presa per compendio la proporzione $a:b$ ∴ ∷ $c:d$; sussiste nei casi enunziati la fondamental proprietà (208) delle proporzioni:

1°. $b:a$ ∴ ∷ $d:c$, $a:c$ ∴ ∷ $b:d$

2°. $m+a:m+b$ ∴ $c:d$ ∴ $c+f:d+f$; $ma:mb$ ∷ $c:d$ ∷ $fc:fd$ ec.

3°. $\left(\begin{array}{l} a:b \therefore :: c:d \\ p:q \therefore :: r:s \end{array}\right.$ $a\pm p:b\pm q$ ∴ $c\pm r:d\pm s$; $ap^{\pm 1}:bq^{\pm 1}::cr^{\pm 1}:ds^{\pm 1}$

4°. $am^{\pm 1}:bm^{\pm 1}$ ∴ $cm^{\pm 1}:dm^{\pm 1}$; $a^{m^{\pm 1}}:b^{m^{\pm 1}}::c^{m^{\pm 1}}:d^{m^{\pm 1}}$

5°. $a\pm b:b::c\pm d:d$, $a\pm b:a\mp b::c\pm d:c\mp d$, ec.

212. V. *In una serie di proporzioni* ∴ o ∷ *la somma degli antecedenti sta aritmeticamente o geometricamente a quella dei conseguenti, come uno o più antecedenti ai lor conseguenti, uniti*, nelle aritmetiche, *alle rimanenti differenze*. Infatti

1°. $a:a+d \cdot\!\cdot\, b:b+d \cdot\!\cdot\, c:c+d \cdot\!\cdot\, f:f+d$ ec. ci danno $a+b+c+f:a+b+c+f+4d \cdot\!\cdot\, a:a+d+3d$

2°. $a:aq::b:bq::c:cq::f:fq$ ec. ci danno $a+b+c+f:(a+b+c+f)q::a:aq$ (8). Passo alle progressioni.

213. I. *In ogni progressione* $\div$ *o* $::$ *le somme o i prodotti degli estremi, e di tutti gli equidistanti dagli estremi si eguagliano*. Infatti da $\div a : a+d : a+2d \ldots a+(n-2)d : a+(n-1)d$ viene $a+a+(n-1)d = a+d+a+(n-2)d$ ec.; e da $\div a : aq : aq^2 \ldots aq^{n-2} : aq^{n-1}$ viene $a \cdot aq^{n-1} = aq \cdot aq^{n-2}$.

214. II. *In ogni progressione* $\div$ *o* $\div$ *il primo termine sta al terzo, al quarto, all'* n^{simo}, *come aritmeticamente o geometricamente i doppi o i quadrati, i tripli o i cubi, gli* (n − 1)^{pli} *o le potenze* (n − 1)^{sime} *del primo e del secondo*. Infatti da $\div a : a+d \ldots a+(n-1)d$ viene $a : a+(n-1)d \therefore (n-1)a : (n-1)(a+d)$; e da $\div a : aq \ldots aq^{n-1}$ viene $a : aq^{n-1} :: a^{n-1} : (aq)^{n-1}$.

215. III. *Se i varj esponenti d' una quantità sieno in progressione aritmetica, le varie potenze della quantità saranno in progression geometrica*. Infatti p^a, p^{a+d}, p^{a+2d}, p^{a+3d} ec. formano una progression geometrica (213); di quì la felice idea dei logaritmi.

216. IV. *La somma* s *d' una progressione* $\div$ *di* n *termini si ha in due modi suoi proprj*: 1°. se fatto ω l' ultimo termine, si osservi che ella risulta da tante somme $a+\omega$ quanti sono i suoi termini presi a due a due (213); perciò I $s = (a+\omega)\frac{n}{2}$: 2°. se si avverta che ogni termine è composto del primo a, onde nella somma si hanno na termini, e che le differenze formano la progressione di $n-1$ termini $\div d : 2d : 3d \ldots (n-1)d$, la cui somma, per la I. formula, è $(d+(n-1)d)(\frac{n-1}{2}) = dn(\frac{n-1}{2})$; perciò II $s = n(a + d\frac{(n-1)}{2})$. Da queste, sol che nell' una si pongano i valori di a, n presi dall' altra, si ha III $s = n(\omega - d\frac{(n-1)}{2})$,

IV $s = (\frac{\omega + a}{2})(1 + \frac{\omega - a}{d})$; e due qualunque delle quattro, come la I e la IV, danno la V $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$.

217. V. *In due modi suoi proprj si ha pur la somma* s *d'una progression* ∺ *di* n *termini*: 1°. osservando che tutti i suoi termini sono antecedenti fuorchè l'ultimo ω, e tutti son conseguenti fuorchè il primo a; onde (212) $s - \omega : s - a :: a : aq$; perciò I $s = \frac{q\omega - a}{q - 1}$: 2°. moltiplicando per q l'equazione $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = s$, onde viene $aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n = sq = s - a + aq^n$; perciò II $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Da queste pure, posti nell'una i valori di a, q presi dall'altra, si ha III $s = \frac{\omega}{q^{n-1}}(\frac{q^n - 1}{q - 1})$, IV $s =$ . . . .

$\frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$; e due di esse, come la II e la III, danno la V $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$.

218. VI. *I termini d'una progressione* ÷ *o* ∺ *sommati a 2 a 2, a 3 a 3 ....., ad* m *ad* m, *danno una nuova progressione* ÷ *o* ∺ (213), *in cui la differenza* d *si cangia in* dm² *e il quoziente* q *diventa* qᵐ. Infatti la somma dei primi m termini sarà (216.217) $m(a + d(\frac{m-1}{2}))$, o $\frac{a(q^m - 1)}{q - 1}$, e quella dei secondi (essendo il primo di essi $a + md$ o aq^m) si troverà $m(a + md + \frac{d(m-1)}{2})$, o $\frac{aq^m(q^m - 1)}{q - 1}$: ora queste due somme formano i primi due termini della nuova progressione; dunque dm^2 e q^m che si hanno col sottrarli o dividerli, ne saranno la differenza o il quoziente.

219. VII. All'incontro *i termini d'una progressione* ÷ *o* ∺ *che ha* d *per differenza o* q *per quoziente, possono riguardarsi come somme di* m *termini d'un'altra ignota* ÷ *o* ∺, in cui la somma s di m termini è a, il numero n è

m, e la differenza d' o il quoziente q' (essendo $d = d'm^2$, $q = q'^m$ (218)) sono $\frac{d}{m^2}$ o $q^{\frac{1}{m}}$: onde il primo termine dell' ignota aritmetica viene $a' = \frac{m(2a-d)+d}{2m^2}$ (216. II), della geometrica $a' = \frac{a(q^{\frac{1}{m}}-1)}{q-1}$ (217. II). Così data $\div 3, 5$ ec., ove $a = 3, d = 2$, se sia $m = 3$, verrà $\frac{d}{m^2} = \frac{2}{9}, a' = \frac{7}{9}$, e la progressione ignota sarà $\div \frac{7}{9}, 1, 1\frac{2}{9} \,|\, 1\frac{4}{9}, 1\frac{6}{9}, 1\frac{8}{9} \,|$ ec. E data $\dot{\div}\dot{\div}\ 3, 21$ ec., ove $a = 3, q = 7$, se sia $m = 2$, verrà $q^{\frac{1}{m}} = 7^{\frac{1}{2}}$, $a' = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{2}} - 1)$, e la progressione ignota sarà $\dot{\div}\dot{\div}$ $\frac{1}{2}(7^{\frac{1}{2}}-1), \frac{1}{2}(7-7^{\frac{1}{2}}) \,|\, \frac{7}{2}(7^{\frac{1}{2}}-1), \frac{7}{2}(7-7^{\frac{1}{2}}) \,|$ ec.; ed è chiaro che i primi e i secondi tre termini nel primo esempio, e i primi e i secondi due nel secondo, eguagliano il primo e secondo delle date.

220. Del resto, dalle dieci formule già trovate (216. 217) si ricavano le 40 seguenti, per cui date tre delle cinque quantità, a, d o q, n, ω, s, si hanno l'altre due, qualor per servirsi delle geometriche, si conosca la teorìa dei logaritmi e dell' equazioni superiori.

Tavola per le Progressioni aritmetiche

	Date	Si ha	FORMULE
221	d, n, ω		$a = \omega - d(n-1)$
222.	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$
223.	d, ω, s	a	$a = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{((\omega + \frac{d}{2})^2 - 2ds)}$
224.	n, ω, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega$
225.	a, n, ω		$d = \frac{\omega - a}{n-1}$
226.	a, n, s	d	$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$
227.	a, ω, s		$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$
228.	n, ω, s		$d = \frac{2(\omega n - s)}{n(n-1)}$
229	a, d, ω		$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$
230.	a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}$
231.	a, d, s	n	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{(\frac{2s}{d} + (\frac{a}{d} - \frac{1}{2})^2)}$
232.	d, ω, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} \pm \sqrt{((\frac{\omega}{d} + \frac{1}{2})^2 - \frac{2s}{d})}$
233.	a, d, n		$\omega = a + d(n-1)$
234.	a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a$
235.	a, d, s	ω	$\omega = -\frac{1}{2} d \pm \sqrt{(2ds + (a + \frac{d}{2})^2)}$
236.	d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$
237.	a, n, ω		$s = \frac{n}{2}(a + \omega)$
238.	a, d, n	s	$s = n(a + d(\frac{n-1}{2}))$
239	a, d, ω		$s = (\frac{\omega + a}{2})(1 + \frac{\omega - a}{d})$
240.	d, n, ω		$s = n(\omega - d(\frac{n-1}{2}))$

Tavola per le Progressioni Geometriche

	Date	Si ha	F O R M U L E
241.	q, n, ω		$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$
242.	q, n, s	a	$a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$
243.	q, ω, s		$a = q(\omega - s) + s$
244.	n, ω, s		$(s-a)\, a^{\frac{1}{n-1}} = (s-\omega)\, \omega^{\frac{1}{n-1}}$
245.	a, n, ω		$q = \left(\frac{\omega}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$
246.	a, n, s	q	$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
247.	a, ω, s		$q = \frac{s-a}{s-\omega}$
248.	n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega} q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$
249.	a, q, ω		$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}$
250.	a, ω, s	n	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$
251.	a, q, s		$n = \frac{L(a + s(q-1)) - La}{Lq}$
252.	q, ω, s		$n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - s(q-1))}{Lq}$
253.	a, q, n		$\omega = aq^{n-1}$
254.	a, n, s	ω	$(s-\omega)\, \omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\, a^{\frac{1}{n-1}}$
255.	a, q, s		$\omega = s - \frac{(s-a)}{q}$
256.	q, n, s		$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$

	Date	Si ha	FORMULE.
257.	a, n, ω		$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
258.	a, q, n	s	$s = a\frac{(q^n - 1)}{q-1}$
259.	a, q, ω		$s = \frac{\omega q - a}{q-1}$
260.	q, n, ω		$s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)$

Applicazioni. I. Tra due termini a, ω inserire m termini in progressione. Basterà dunque trovar d o q; e poichè abbiamo a, ω ed $n = m + 2$, verrà $d = \frac{\omega - a}{m+1}$ (225), $q = (\frac{\omega}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ (245). Così se $m = 4$, si ha $d = \frac{\omega - a}{5}$, $q = (\frac{\omega}{a})^{\frac{1}{5}}$ e perciò $\div\, a : a + \frac{\omega - a}{5} : a + \frac{2(\omega - a)}{5} : a + \frac{3(\omega - a)}{5} : a + \frac{4(\omega - a)}{5} : \omega$; del pari $\dot{\div}\, a : (a^4\omega)^{\frac{1}{5}} : (a^3\omega^2)^{\frac{1}{5}} : (a^2\omega^3)^{\frac{1}{5}} : (a\omega^4)^{\frac{1}{5}} : \omega$.

II. Uno giocando aggiunge sempre 2 alla sua posta, ed un altro sempre la raddoppia; la prima volta giocaron 3 e perderono per dieci volte: cerco le perdite. La progressione per il primo è aritmetica, per il secondo geometrica, ed abbiamo $a = 3$, $d = q = 2$, $n = 10$; dunque il primo perde $s = 120$ (238), il secondo $s = 3069$ (258).

III. La popolazione d' un paese è cresciuta uniformemente di tanto, che in 4 anni i Passeggieri son giunti da 1000 a 3000, e i Paesani da 10000 a 14641:

M

con qual progressione si son fatti gli aumenti? Dei Passeggieri cresce la somma e dee cercarsi d, ma de' Paesani cresce il prodotto e dee conoscersi q: or poichè per gli uni $a=1000, \omega=3000$, per gli altri $a=10000, \omega=14641$, e per ambedue $n=5$ (mentre al cominciar de' 4 anni già si hanno i primi termini 1000 e 10000) sarà $d=500$ (225), e $q=\sqrt[4]{\frac{14641}{10000}}=\frac{11}{10}$ (245).

IV. Un Vascello insegue una Nave: questa nel primo giorno fa 13 leghe e quello 6, nel secondo l'una ne fa 15, l'altro 11 ec., ambedue in progressione $\div$ o $\div\div$; cerco se la Nave sarà raggiunta e quando e dove. Poichè i Legni vanno in progressione, è forza che per raggiungersi facciano egual viaggio in egual numero di giorni: dunque nelle due progressioni sarà $s=s'$ ed $n=n'$. Or per l'aritmetica, posto $a=13, d=15-13=2$, $a'=6, d'=11-6=5$, si avrà (238) $s=n(a+\frac{d(n-1)}{2})$ ed $s'=n'(a'+\frac{d'(n'-1)}{2})$, cioè $a+\frac{d(n-1)}{2}=a'+\frac{d'(n-1)}{2}$, ed $n=\frac{2a+d'-2a'-d}{d'-d}=5\frac{2}{3}$, giorni di viaggio; onde $s=s'=100\frac{1}{9}$, leghe o distanza dal porto. Ma per la progression geometrica, posto $a=13, q=\frac{15}{13}$, $a'=6, q'=\frac{11}{6}$, si troverà (258) $a(\frac{q^n-1}{q-1})=a'(\frac{q'^n-1}{q'-1})$ ovvero $\frac{a(q'-1)}{a'(q-1)}=\frac{q'^n-1}{q^n-1}$, equazione che con la doppia falsa posizione, fatto $n=3, =4$, dà per primo valore $n=3,57$, per secondo $n=3,61$, per terzo $n=3,616$, giorni di viaggio; onde $s=s'=57,25$, leghe o distanza dal porto.

V. Un Vascello ed una Nave partono nel tempo stesso da una distanza di leghe $136\frac{1}{2}=b$ per incontrarsi: la Nave nel primo giorno fa 4 leghe e il Vascello 6, nel secondo quella ne fa 6 e questo 8 ec., ambedue in progressione $\div$ o $\div\div$; cerco quando s' incontreranno e dove. Si ha dunque, come sopra, $n=n'$ ed inoltre la somma de' due viaggi $s+s'=b$. Or per la progressione aritmetica, fatto

$a = 4$, $d = 2$, $a' = 6$, $d' = 2$, verrà $s + s' = n\left(a + \frac{d(n-1)}{2}\right) + n\left(a' + \frac{d'(n-1)}{2}\right) = b$, cioè $n = \frac{1}{2} - \frac{a+a'}{d+d'} + \sqrt{\left[\left(\frac{a+a'}{d+d'} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2b}{d+d'}\right]} = 6\frac{1}{2}$, giorni di viaggio; onde $s = 61\frac{3}{4}$, $s' = 74\frac{3}{4}$. Ma per la progression geometrica, posto $a = 4$, $q = \frac{3}{2}$, $a' = 6$, $q' = \frac{4}{3}$, si avrà $s + s' = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} + \ldots \frac{a'(q'^n - 1)}{q'-1} = b$, cioè $b(q-1)(q'-1) = a(q'-1)(q^n-1) + a'(q-1)(q'^n-1)$, ove fatto $n = 5$, $= 6$, si ha per primo valore $n = 5,47$ e per secondo $n = 5,513$, giorni di viaggio; onde $s = 66,796$, viaggio della Nave, $s' = 69,704$, viaggio del Vascello.

Per aver poi una progressione di n termini quando $n = g + \frac{h}{m}$, come in quest' ultime applicazioni, basta risolvere in m termini ognun dei $g + 1$ termini della data (219) e prender dell' ultimo le parti h.

R E G O L E

Del Tre, di falsa Posizione e d' Interesse.

261. I. Dati tre termini, si sa come può aversi il quarto proporzional geometrico (208), e la Regola che si adopera, dicesi *Regola del Tre*, frequentissima in tutte le Matematiche. Ella è *semplice* quando dati tre termini si cerca il quarto, ed è *composta* quando datine cinque, sette ec., si cerca il sesto, l' ottavo ec. Se il terzo termine essendo maggiore o minor del primo, lo stato della questione esiga che anche il quarto sia maggiore o minor del secondo, la Regola è *diretta:* all' incontro è *inversa* se il quarto debba esser minore o maggior del secondo (205).

262. Dei tre dati termini due sono o posson rendersi *omogenei*, cioè della stessa specie; l' altro è *so-*

litario o di specie diversa, a cui poi viene omogeneo il quarto cercato; e dei due omogenei l'uno è *con interrogazione*, l' altro è *senza*. Ora *l' omògeneo senza interrogazione si colloca il primo a sinistra, quindi il solitario, poi l' altro omogeneo:* avvertendo che *nella regola inversa il solitario e il suo omogeneo cercato debbono esser denominatori dell' unità* (205). Fatto ciò, e ridotti i termini all' espression più semplice se il primo abbia dei fattori comuni con uno o con ambedue gli altri (202), si opera al solito (208).

Esempj I. Che varranno lib. 70. d' argento se lib. 14. vagliono lir. 714.? Quì la regola evidentemente è *diretta*; il *solitario* è 714, l' *omogeneo con interrogazione* è 70, l' *altro* è 14: dunque $14 : 714 :: 70 : x$ ovvero $1 : 714 :: 5 : x = 5 \cdot 714 = 3570$. II. 57 Artefici fanno una cert' opera in 5 giorni: in quanti la faranno 19? Quì la regola è *inversa*, perchè un *minor* numero di lavoranti esige *maggior* tempo al lavoro: dunque $57 : \frac{1}{5} :: 19 : \frac{1}{x}$ ovvero $3 : \frac{1}{5} :: 1 : \frac{1}{x}$ ed $x = 15$ giorni. III. Con scudi $8\frac{1}{2}$ ho B[a]. $2\frac{3}{4}$ di panno; ne vorrei Canne $2\frac{5}{12}$: qual' è la spesa? La regola è diretta, e se la Canna sia Braccia 4, le Canne $2\frac{5}{12}$ saranno B[a]. $9\frac{2}{3}$: dunque $2\frac{3}{4} : 8\frac{1}{2} :: 9\frac{2}{3} : x$, cioè $\frac{11}{4} : \frac{17}{2} :: \frac{29}{3} : x$, ovvero $\frac{11}{2} : 17 :: \frac{29}{3} : x = 29\frac{29}{33}$......

Se la lunghezza del Braccio Fiorentino è a quella del Piede Parigino :: 2580,454 : 1440, quanti piedi saranno br[a]. 25,55? La regola è inversa (261): dunque $2580{,}454 : \frac{1}{25{,}55} :: 1440 : \frac{1}{x}$, ed $x = 45{,}79$.

263. Ma sia proposto questo quesito: 20 uomini fanno 160 tese di lavoro in giorni 15: quante ne faranno 30 uomini in 12? La regola è *composta*, per-

chè risultando il lavoro e dalla ragione 20:30 degli uomini e dall' altra 15:12 dei giorni, i termini omogenei nascono dalle ragioni composte 20×15 e 30×12 (203): dunque $20 \times 15 : 160 :: 30 \times 12 : x$ ovvero $1 : 16 :: 12 : x = 192$.

264. Che se fosse dato quest' altro quesito: 20 uomini scavando un Canale debbono asciugar giornalmente piedi 6 d' acqua per fare in un certo tempo tese 160 di lavoro: quante ne faranno nel tempo stesso 30 uomini asciugando giornalmente piedi 8 d' acqua? La regola quanto ai Lavoranti sarebbe diretta, ma quanto al *maggiore* ostacolo dell' acqua che permette un *minor* lavoro, è inversa: dunque $20 \times \frac{1}{6} : 160 :: 30 \times \frac{1}{8} : x$, ovvero $\frac{1}{3} : 80 :: \frac{3}{4} : x = 180$ tese.

265. II. La *Regola di semplice falsa posizione* determina un numero vero col supporre un numero falso. Voglio un numero x la cui metà, il quarto e il quinto facciano 456. Suppongo $x = 20$, e perciò $\frac{20}{2} + \frac{20}{4} + \frac{20}{5} = 19$: non è dunque 20 il numero cercato. Ma poichè $20 : x :: \frac{20}{2} : \frac{1}{2} x :: \frac{20}{4} : \frac{1}{4} x :: \frac{20}{5} : \frac{1}{5} x$ (211), sarà (212) $\frac{20}{2} + \frac{20}{4} + \frac{20}{5} (= 19) : \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{5} x (= 456) :: 20 : x = 480$, numero vero.

266. III. La *Regola di doppia falsa posizione* determina un numero vero x col supporre due numeri falsi a, b. Così nell' esempio di sopra, posto $a = 20$, e poi $b = 100$, i risultati sono 19 e 95, mentre dovevano essere 456; onde tra il risultato del vero numero x e dei supposti a, b si hanno le differenze o *errori* $- 437 = - m$, e $- 361 = - n$: ma i risultati di due cagioni son proporzionali ad esse; dunque anche le lor differenze o gli *errori* lo saranno alle dif-

ferenze tra il vero numero ed i supposti. Perciò si avrà $-m:-n::x-a:x-b$ ed $x=\frac{an-bm}{n-m}$, o, se l'un degli errori m,n sia positivo, $x=\frac{an+bm}{n+m}$. Di quì la regola seguente.

267. *Supposti due numeri ad arbitrio, sperimento in essi le condizioni del problema; se l' uno o l' altro vi soddisfanno, il problema è sciolto; se no, scrivo i due errori positivi o negativi che ne risultano. Moltiplico quindi ciascuna posizione per l' error dell' altra, e secondo che gli errori son simili o dissimili (cioè con lo stesso o con diverso segno) divido la differenza o somma dei prodotti per la differenza o somma degli errori: il quoziente è il numero cercato.*

Esempio. Un Giocatore scommette 12 contro 8 ad ogni partita; ne fa 10 e tira 20: quante ne ha vinte? Suppongo 9, e dovrà aver 72; dunque ne perde 1, e dovrà dar 12: tirerebbe perciò 60, e dovea tirar 20; vi è dunque un errore di + 40. Suppongo 8, e dovrà aver 64; dunque ne perde 2, e dovrà dar 24: tirerebbe perciò 40, e dovea tirar 20; vi è dunque un errore di + 20. Dispongo così i numeri e gli errori

Pos. I.	9	Pos. II.	8
Er.	+ 40	Er.	+ 20

Moltiplico 9 per 20, e 8 per 40, e poichè gli errori son simili, divido la differenza 140 dei prodotti per la differenza 20 degli errori, ed ho 7 partite vinte. Se invece di 8 avessi supposto 3, la vincita sarebbe 24, la perdita 84, il dare 60 e perciò l' errore — 80: moltiplicando 9 per 80, e 3 per 40, e dividendo la somma 840 dei prodotti per la somma 120 degli errori, che son dissimili, verrebbe 7 come prima.

268. La Regola si èstende ai problemi d' ogni grado, quando almeno posson ridursi ad una o due condi-

zioni; poichè in quelli stessi del primo che ne hanno tre, riesce assai nojosa. Ella è però di grand' uso in certe equazioni analitiche, geometriche, astronomiche ec., le quali senza di lei sarebbero affatto intrattabili. Serva di modello l' equazione $x^2 + 15 = 10x$ che si sa risolvere (189) e la cui minor radice approssimata è $x = 1,8377$. Poste in un membro le quantità note, nell' altro l' ignote, onde sia $15 = x(10 - x)$, suppongo $x = 1, = 2$, e sostituendo, ho gli errori $-6, +1$: opero al solito (267), e viene $x = 1,857$, onde x sarà forse tra $1,8$ ed $1,9$. Con queste due nuove posizioni ho gli errori $-0,24, +0,39$ ed $x = 1,838$, cioè x tra $1,83$ ed $1,84$. Sostituite quest' altre due posizioni, gli errori sono $-0,0489, +0,0144$ ed $x = 1,837725$, cioè x, tra $1,837$ ed $1,838$. Infatti queste due posizioni danno gli errori $-0,004569, +0,001756$ ed $x = 1,8377225$, che avendo le stesse quattro o cinque decimali di prima, è sicuramente $x = 1,8377$.

269. Usando la Regola in questo modo, il calcolo condurrà rettamente al valor dell' incognita, anche esatto se mai vi sia, come può vedersi nell' equazione $16 = x(10 - x)$, prese le posizioni $x = 3, = 4$, o $x = 9, = 10$. Ma si avverta 1°. di applicarla a problemi possibili, perchè in caso di x assurdo, lo sarà anche il risultato: 2°. di prender negativi i risultati quando lo esiga l' indole del problema, poichè la Regola li dà positivi se tali furono le posizioni: 3°. di operar sulla seconda posizione con l' ordine stesso che si osservò nella prima, altrimenti l' errore non sarebbe proporzionale (266) e la Regola fallirebbe.

270. IV. La *Regola d' Interesse o Frutto* determina il frutto annuo o d' un puro capitale o d' un capitale unito ai suoi frutti: nel primo caso l' interesse è *semplice*, nel secondo è *composto*. Ecco i due più comuni problemi dell' uno e dell' altro.

Frutto semplice. I. Detti lir. 15600 a 8 per 100: che mi si deve per sorte e frutti dopo anni 5? Sia $t =$

5 il tempo, $p = 15600$ la sorte, r il frutto annuo d'una lira che si ha dalla proporzione $100 : 8 :: 1 : r = 0,08$: e poichè lire 1 in anni 1 frutta r, le lire p in anni t frutteranno prt (263): si avrà dunque tra sorte e frutti la somma $s = p\ (1 + rt) = 15600\ (1 + 0,08 . 5) = 21840$ lir.

II. Riscossa oggi la mia pensione annua di lir. 1000, la lascio in seguito per anni 8 al 5 per 100: quanto mi si dovrà dopo quel tempo? Sia $t = 8, p = 1000$, r il frutto annuo d'una lira: e poichè la pensione si paga al fin dell'anno, onde nel prim'anno non frutta, il frutto del secondo sarà pr, del terzo $2pr$, e del t^{mo} $(t - 1)\ pr$; dunque i frutti sono $\div\ 0 + pr + 2pr \ldots + (t - 1)\ pr = \frac{prt}{2}\ (t - 1)$ (237), che uniti alle t pensioni o a pt, danno la somma $s = \frac{1}{2} pt\ (2 + r\ (t - 1)) = 4000\ (2 + 0,35) = 9400$ lir.

Frutto Composto. I. Impiegai lir. 20000 al 5 per 100, e dopo un anno formai un nuovo capitale di esse e del loro frutto; così feci per 6 anni: che mi si deve in tutto? Sia $t = 6, p = 20000, r = 0,05, q = 1 + r = 1,05$, capitale e frutto d'una lira: e poichè la sorte 1 produce q sorte e frutto nel prim'anno, la sorte q produrrà q^2 sorte e frutto nel secondo, essendo $1 : q :: q : q^2$; così produrrà q^3 nel terz'anno e q^t nel t^{mo}. Ora $1 : q^t :: p : pq^t = s = 20000 . 1,05^6 = 26802$ lir. in circa.

II. Per anni $t = 8$ impiego annualmente al 4 per 100 una pensione annua $p = 2400$ coi frutti degli anni scorsi: qual è il mio credito dopo quel tempo? Posto $r = 0,04$ e $q = 1,04$, poichè nel prim'anno il mio credito è p, nel secondo $p\ (1 + r) + p = p + pq$, nel terzo $(p + pq)\ (1 + r) + p = p + pq + pq^2$ ec. fino a t anni, il totale sarà $\div\ p + pq + pq^2 \ldots + pq^{t-1} =$

$\frac{p(q^t-1)}{r}$ (258) $= s = \frac{2400(1,04^8-1)}{0,04} = 22114$ lir. in circa.

È superfluo d'avvertire che in tutte queste equazioni d'interesse, date tre delle quattro quantità p, r (o q) s, t, si ha sempre la quarta, purchè si abbia presente quanto dicemmo altrove (220).

ALCUNE NOZIONI SULLE SERIE

271. Dicesi *Serie* un aggregato di termini che crescono o scemano con certa legge, come le progressioni; è *finita* quando ha un numero finito di termini, ed *infinita* quando è continuata all' infinito: è *divergente* o *convergente* secondo che i suoi termini crescono o scemano di valore; e diverge o converge tanto più rapidamente, quanto più il valor di ciascun termine cresce o scema riguardo al precedente.

Diconsi *prime differenze* d'una serie i residui della sottrazione di due contigui termini di essa; *seconde differenze* i residui della sottrazione di due contigui termini delle prime ec.

Sia la serie 21, 34, 55, 89, 144 ec.
13, 21, 34, 55 prime differenze
8, 13, 21 seconde differenze
5, 8 terze differenze ec. ec.

Serie algebriche dell' ordine zero son quelle in cui tutti i termini son costanti; del *primo*, *secondo*, e in generale dell' m^{simo} *ordine* son quelle che hanno costanti o le prime o le seconde o le m^{sime} differenze: tali sono le serie d, d, d ec.; $a, a+d, a+2d$ ec.;

a^2, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$ ec. e in generale a^m, $(a+d)^m$, $(a+2d)^m$ ec.: e si chiamano *algebriche*, perchè l' Algebra comune è bastante a trattarle.

272. Esse sono di numeri o *figurati* o *poligoni*, e di *potenze* dei numeri.

I. Le serie dei figurati comincian così

Numeri	Costanti	1,	1,	1,	1,	1,	1	ec.
	Naturali	1,	2,	3,	4,	5,	6	ec.
	Triangolari	1,	3,	6,	10,	15,	21	ec.
	Piramidali	1,	4,	10,	20,	35,	56	ec.

È legge di queste serie che ciascun dei termini sia la somma dei corrispondenti nella serie precedente: così la seconda è la continua somma dell' unità, la terza dei termini della seconda, ec.: onde queste serie hanno costanti successivamente i termini, le prime differenze, le seconde ec.

II. Le serie dei poligoni son la somma dei termini consecutivi di una progressione aritmetica che comincia da 1; diconsi *triangolari*, *quadrati*, *pentagoni ec.* secondo che la differenza delle progressioni è 1, 2, 3 ec.; onde queste serie hanno costanti le seconde differenze.

Progr. Arit.		Num. Polig.	
1, 2, 3, 4, 5 ec.	Diff. 1....	1, 3, 6, 10, 15 ec.	Triangolari
1, 3, 5, 7, 9 ec.	Diff. 2....	1, 4, 9, 16, 25 ec.	Quadrati
1, 4, 7, 10, 13 ec.	Diff. 3....	1, 5, 12, 22, 35 ec.	Pentagoni
1, 5, 9, 13, 17 ec.	Diff. 4....	1, 6, 15, 28, 45 ec.	Esagoni

Si chiaman Poligoni perchè le unità dei lor termini posson disporsi in triangolo, in quadrato o in altro poligono: così può darsi una forma triangolare alle unità 1, 3, 6 ec., quadrata alle unità 1, 4, 9 ec.

III. Le serie delle potenze nascono dalle diverse potenze dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 ec., onde anche queste hanno successivamente costanti i termini, le prime differenze, le seconde ec.

273. La principale operazione su queste tre specie di serie consiste nel sommare o tutti o un certo numero dei loro termini, e vedremo tra poco come ciò

sì faccia. Vediamo intanto il *Metodo dei Coefficienti Indeterminati*, col quale non solo si risolve in serie un' espressione qualunque, ma si calcolano anche le serie algebriche e un' infinità d' altre. Egli è mirabile per la sua utilità e per lo spirito d' invenzione che vi regna, e *se si usi con una certa avvertenza*, non è men pregevole per la brevità che per la sicurezza. Suppongo dunque che voglia ridursi in serie il rotto $\frac{\varphi}{p+x}$: ciò può farsi con la divisione e con la formula del binomio che danno in generale una serie della forma $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ec., ove A, B, C, D ec. sono i coefficienti indeterminati. Dunque $\frac{\varphi}{p+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ec.; e moltiplicando, ordinando e trasponendo φ, si ha

$$0=\begin{cases} Ap+Bpx+Cpx^2+Dpx^3+Epx^4+\text{ ec.} \\ -\varphi+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ ec.}\end{cases}$$

Or poichè il secondo membro è zero indipendentemente da qualunque valor di x, niun termine potrà esser distrutto o dai precedenti o dai seguenti: è dunque forza che ciascuna colonna sia zero, con che ho tante equazioni quanti sono i coefficienti A, B, C ec., che così si determinano: dunque 1°. $Ap-\varphi=0$: 2°. $Bpx+Ax=0$: 3°. $Cpx^2+Bx^2=0$: 4°. $Dpx^3+Cx^3=0$: 5°. $Epx^4+Dx^4=0$ ec. La prima equazione dà $A=\frac{\varphi}{p}$, valore che posto nella seconda, dà $B=-\frac{\varphi}{p^2}$; posto il valor di B nella terza, si ha $C=\frac{\varphi}{p^3}$ ec.; onde mettendo i valori di A, B, C ec. nell' equazion primitiva, si ottiene $\frac{\varphi}{p+x}=\frac{\varphi}{p}-\frac{\varphi x}{p^2}+\frac{\varphi x^2}{p^3}$ ec., e la legge è manifesta. Dunque $\frac{\varphi}{x^n(p+x)}=\frac{\varphi}{px^n}-\frac{\varphi}{p^2x^{n-1}}+$ ec., il che si avverta per sempre.

Per ridurre in serie $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$ lo pongo $= A + Bx + Cx^2 +$ ec., onde $a^2 = (a^2+2ax-x^2)(A + Bx + Cx^2 +$ ec.), o moltiplicando, e trasponendo a^2,

$$o = \begin{cases} a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + \text{ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + \text{ec.} \\ \qquad\qquad - Ax^2 - Bx^3 - \text{ec.} \end{cases}$$

onde $A = 1$, $B = -\frac{2}{a}$, $C = \frac{5}{a^2}$, $D = -\frac{12}{a^3}$ ec. dal che viene $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} +$ ec.

Voglia ridursi in serie $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$. Supposto $1 + 2x = (1-x-x^2)(A + Bx + Cx^2 +$ ec.), fatta la moltiplicazione e trasposto il primo membro, si troverà $A = 1$, $B = 3$ ec., onde $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4$ ec., serie che dicesi *Ricorrente*, perchè per formare il coefficiente di ciascun termine convien *ricorrere* ai due che lo precedono.

274. Debba anche estrarsi la radice quadra di $a^2 - x^2$ già trovata di sopra (161). Pongo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6$ ec., il che dà

$$o = \begin{cases} A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 + 2ADx^6 + \text{ec.} \\ -a^2 + x^2 + 2ACx^4 + 2BCx^6 + \text{ec.} \end{cases}$$

onde $A = a$, $B = -\frac{1}{2a}$, $C = -\frac{1}{8a^3}$, $D = -\frac{1}{16a^5}$ ec.; cosicchè si ha $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ ec. Da questo esempio può raccogliersi l'*avvertenza* (273) con cui convien far uso del metodo; poichè mentre di sopra si prese $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ec., quì si è preso $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6$ ec.: ciò vuol dire che *giova talora, e talora è necessario di aver prima compresa la legge o forma dominatrice della serie*; ne vedremo in

seguito degli esempj: il valersi del metodo senza tal cautela, è un esporsi ad errori gravissimi.

Somma delle Serie.

275. Si posson far sulle Serie tutte le operazioni dell' Aritmetica: ma la più utile e più difficile è la somma dei loro termini. Da questa per lo più dipende la soluzion dei Problemi in cui entran le serie.

Il *Termine generale* della serie è un' espressione algebrica che dà ciascun termine di essa sol che al numero n dei termini si sostituiscano in quella espressione i numeri 1, 2, 3 ec.: così il termine generale della serie 1, 6, 21, 52 ec. è $n^3 - n^2 + n$, perchè fatta $n = 1, = 2, = 3$ ec., si hanno i termini 1, 6, 21, ec. La *Somma generale* o *Termine sommatorio* è l' espressione che dà la somma di un numero n di termini: così $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ è il termine sommatorio d' ogni progression geometrica (217).

276. Data la somma generale S d' una serie, si trova il termine generale T se in questa somma si sostituisce $n - 1$ ad n; poichè così si avrà la somma s di $n - 1$ termini della serie; dunque se s si tolga da S, si avrà un termine espresso generalmente, cioè $T = S - s$: per esempio, se $S = \frac{n^2 + n}{2}$, posto $n - 1$ per n, si avrà $T = n$, e se sia $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, si troverà $T = aq^{n-1}$. Vedremo in breve come dato il termine generale, si trovi la somma generale.

277. Dati i termini $m + 2$ della serie algebrica $g, k, p \ldots\ldots r$, in cui son costanti le loro differenze m^{sime}, per averne il termine generale T, osservo che le serie $1^0, 2^0, 3^0$, ec.; $1^1, 2^1, 3^1$ ec.; e in generale $1^m, 2^m, 3^m$ ec. hanno evidentemente per termini generali $n^0, n^1 \ldots n^m$, cioè le varie potenze di n relative al

ero m delle differenze. Questa osservazione guida ppor generalmente $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + $ -3 $\ldots + \omega n^\circ$, ove a, b, c ec. son coefficienti che eterminano così:

278. Sia $m = 0$, cioè nulle le differenze o costan- termini, onde la serie sia g, g, g, g ec.: dunque $= an^\circ$. Fatta $n = 1$, si avrà il primo termine della e (275), e però $a\, 1^\circ = g$, cioè $a = g$ onde $T = g$, ıe visibilmente dee essere.

279. Sia $m = 1$; dunque $T = an^1 + bn^\circ = an +$ Fatta $n = 1, 2$, si ha $a + b = g$ e $2a + b = k$: sottratta la ma dalla seconda, si ottiene $a = k - g$, e però $b =$ $- k$, onde $T = (k - g)n + 2g - k = g + (n - 1)$ $- g)$.

280. Sia $m = 2$; dunque $T = an^2 + bn + c$. Fatta $= 1, 2, 3$, avremo I. $a + b + c = g$, II. $4a + 2b + c =$ III. $9a + 3b + c = p$; sottratta la I. dalla II. e la II. lla III., ho le due $3a + b = k - g$, $5a + b = p - k$, ıe pur sottratte, danno $a = \frac{g - 2k + p}{2}$, $b = \ldots$ $\frac{-5g - 3p}{2}$, $c = 3g - 3k + p$, e quindi $T = \ldots$

$$\frac{g - 2k + p)}{2} n^2 + \frac{(8k - 5g - 3p)}{2} n + 3g - 3k + p = g +$$

$$(n - 1)(k - g) + \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}(p - 2k + g).$$

281. Sia $m = 3$; dunque $T = an^3 + bn^2 + cn + d$. Fatta $n = 1, 2, 3, 4$, si hanno l'equazioni $a + b + c + d = g$, $8a + 4b + 2c + d = k$, $27a + 9b + 3c + d = p$, $64a + 16b + 4c + d = r$, dalla solita sottrazione nascono le tre $7a + 3b + c = k - g$, $19a + 5b + c = p - k$, $37a + 7b + c = r - p$, che sottratte, danno le due $12a + 2b = p - 2k + g$, $18a + 2b = r - 2p + k$, in cui rinnovata la sottrazione, si trova $a = \frac{3k - g - 3p + r}{6}$, $b = \ldots$

$\frac{3g-8k+7p-2r}{2}$, $c=\frac{57k-26g-42p+11r}{6}$, $d=4g-6k+4p-r$, e $T=\frac{(5k-g-3p+r)}{6}n^3+\frac{(3g-8k+7p-2r)}{2}n^2+\frac{(57k-26g-42p+11r)}{6}n+4g-6k+4p-r=g+(n-1).(k-g)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(p-2k+g)+\ldots\ldots\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}(r-3p+3k-g)$. Dopo ciò è facile di veder la legge con cui procede il termine generale che sarà $T=g+(n-1)(k-g)+\ldots\frac{(n-1)(n-2)}{2}(p-2k+g)+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}(r-3p+3k-g)+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}(s-4r+6p-4k+g)$ ec.

282. Supposto $T=0$, il termine generale diviene un' equazione del grado m la cui incognita è n; dunque all' incontro ogni espressione ridotta a zero, come $z^m+Az^{m-1}+Bz^{m-2}+$ ec. $=0$ è un termine generale che fatto $z=0$, $=1$, $=2$ ec. dà una serie con le differenze m^{sime} costanti, onde determinati i primi $m+1$ termini, si otterranno con poca pena i seguenti. Sia l' equazione $z^3-3z^2+z-4=0$: con le *supposizioni* $z=0,=1,=2,=3$ vengono i *risultati* come quì di faccia, e ripetuta la differenza costante 6 dell' ultima colonna, si trovano i termini delle superiori dicendo: $6+6=12$, $+5=17$, $-1=16$ (nuovo risultato della supposizione 4): $6+12=18$, $+17=35$ ec.: e poichè quì i termini dell' ultima colonna son tutti positivi, lo saranno anche quelli delle colonne seguenti, e i risultati non varieranno

Supp.	0	1	2	3	4	ec.
Ris.	−4	−5	−6	−1	16	ec.
Diff. 1.	−1	−1	5	17	35	ec.
Diff. 2.	0	6	12	18	24	ec.
Diff. 3.	6	6	6	6	6	ec.

più di segno. Giova questa dottrina a risolver l' equazioni per approssimazione, come vedremo.

283. Or per aver la somma generale delle serie algebriche, tento di scuoprirne la forma (274), ed osservo che in quelle dell' ordine zero, essendo $T = g$ (278), si ha evidentemente $S = ng$, e in quelle del prim' ordine, essendo $T = g + (n-1)(k-g)$ (279), si trova $S = gn + \frac{n(n-1)(k-g)}{2}$ (238) posto $a = g$ e $d = k - g$. Dunque per aver S basta moltiplicar ciascun termine di T per una certa espressione An, Bn, Cn ec. di n. Posto dunque per compendio $k - g = g'$, $p - 2k + g = g''$ ec., $n - 1 = n'$, $n - 2 = n''$ ec. e perciò $T = g + n'g' + \frac{n'n''g''}{2} + \frac{n'n''n'''g'''}{2 \cdot 3} +$ ec. dovrà essere $S = nAg + nn'Bg' + \frac{nn'n''Cg''}{2} + \frac{nn'n''n'''Dg'''}{2 \cdot 3} +$ ec.; onde se quì si ponga $n - 1$ in luogo di n per aver s (276), verrà

$$S = nAg + nn'Bg' + \frac{nn'n''Cg''}{2} + \frac{nn'n''n'''Dg'''}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

$$s = n'Ag + n'n''Bg' + \frac{n'n''n'''Cg''}{2} + \frac{n'n''n'''n^{\text{v}}Dg'''}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

e poichè $S - s = T$ ovvero $S - s - T = 0$, sarà

$$0 = \begin{cases} Ag + 2n'Bg' + \frac{3n'n''Cg''}{2} + \frac{4n'n''n'''Dg'''}{2 \cdot 3} + \text{ec.} \\ -g - n'g' - \frac{n'n''g''}{2} - \frac{n'n''n'''g'''}{2 \cdot 3} - \text{ec.} \end{cases}$$

dunque (273) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{4}$ ec., e la somma generale di tutte le serie algebriche è

$$S = \frac{ng}{1} + \frac{n(n-1)(k-g)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(p-2k+g)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(r-3p+3k-g)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$$

284. Esempj. I. Sia la serie 1, 6, 21, 52, 105 ec. che ha costanti le terze differenze; dunque $g = 1$, $k = 6$, $p = 21$, $r = 52$, onde $S = n + \frac{5n(n-1)}{2} + \dots$

$\frac{5n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$. Se $n = 5$, sarà $S = 185$.

285. II. Sia un numero r di lettere a, b, c, d, f ec. di cui si vogliano tutti i prodotti prendendole a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4 ec. È evidente 1°. che i prodotti di 2 a 2 saranno $a(b + c + d + f + \text{ec.}) + b(c + d + f + \text{ec.}) + c(d + f + \text{ec.}) + d(f + \text{ec.})$ serie dei numeri naturali 4, 3, 2, 1, i termini della quale son 4 se $r = 5$, e sono $r - 1$ se r è indeterminata: 2°. che i prodotti di 3 a 3 saranno $a(bc + bd + bf + cd + cf + df + \text{ec.}) + b(cd + cf + df + \text{ec.}) + c(df + \text{ec.})$, serie dei numeri triangolari 6, 3, 1, i termini della quale son 3 se $r = 5$, e sono $r - 2$ se r è indeterminata: 3°. che i prodotti di 4 a 4 saranno $a(bcd + bcf + bdf + cdf + \text{ec.}) + b(cdf + \text{ec.})$, serie dei numeri piramidali 4, 1, i termini della quale son 2 se $r = 5$, e sono $r - 3$ se r è indeterminata ec. Dunque i cercati prodotti appartengono alle serie dei numeri figurati, e la somma della prima 1, 2, 3 ec. si trova (283) $S = n + \frac{n(n-1)}{2} = r - 1 + \frac{(r-1)(r-2)}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$, numero dei prodotti di 2 a 2: la seconda 1, 3, 6, ec. dà $S = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = r - 2 + (r-2)(r-3) + \frac{(r-2)(r-3)(r-4)}{2 \cdot 3} = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3}$, numero dei prodotti di 3 a 3: la terza 1, 4, 10 ec dà $S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, numero dei prodotti di 4 a 4; e così si troverà $\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ ed $\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ ec. numero dei prodotti di 5 a 5, di 6 a 6 ec.

286. Debba ora sommarsi la serie $\frac{d}{h}$, $\frac{d}{hq}$, $\frac{d}{hq^2}$ ec., la quale, supposto $q > 1$, è una progression geometrica decrescente. Scrivendo: ec., $\frac{d}{hq^2}$, $\frac{d}{hq}$, $\frac{d}{h}$, diverrà crescente, e applicandovi la formula $s = \ldots \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ (260) che serve per le crescenti, fatto $\omega = \frac{d}{h}$, si avrà $s = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$. Se sia $n = \infty$, sarà $q^n - 1 = q^n$ (197), e si troverà $s = \frac{dq^n}{hq^{n-1}(q-1)} = \frac{dq}{h(q-1)}$.

287. Questa formula dà la somma dei rotti decimali infiniti quando se ne conosce il periodo d di m cifre; poichè fatto $h = 10^m$, $hq = 10^{2m}$ ec., e perciò $h = q$, si ha $s = \frac{dq}{h(q-1)} = \frac{d}{10^m - 1}$. Ora $10^m - 1$ è un numero m di 9; dunque *la somma di un rotto decimale interamente periodico si ha dividendone il periodo per tanti 9 quante son cifre nel periodo*: così 0, 111 ec. $= \frac{1}{9}$; 0,2424 ec. $= \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$; 0,259259 ec. $= \frac{259}{999} = \frac{7}{27}$. Che se nel rotto cominci il periodo dopo g cifre, sarà $h = 10^{m+g}$, $hq = 10^{2m+g}$ e perciò $q = 10^m$, onde la somma del rotto, non comprese le cifre fuor di periodo, sarà $s = \frac{d}{10^g(10^m - 1)}$, cioè *la somma di un rotto non interamente periodico si ha come sopra, purchè alla destra dei 9 si aggiungano tanti zeri quante son le cifre fuor di periodo e si sommi questo rotto col rotto che non entra in periodo*: così 0, 1666 ec. $= \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{1}{6}$; 0,803571428571428 ec. $= \frac{803}{1000} + \frac{571428}{999999000} = \frac{45}{56}$ ec.

288. La formula stessa (286) somma anche la se-

rie $\frac{a}{h}$, $\frac{a+d}{hq}$, $\frac{a+2d}{hq^2}$ ec., ove i numeratori sono in aritmetica e i denominatori in geometrica progressione. Distribuisco la serie nelle seguenti, la prima delle quali ha n termini, la seconda ne ha $n-1$, la terza $n-2$ ec., onde nella formula sarà $n=n-1$ per la seconda; $n=n-2$ per la terza ec.

$$\frac{a}{h}, \frac{a}{hq}, \frac{a}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{a}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

$$\frac{d}{hq}, \frac{d}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

$$\frac{d}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-2}-1}{q-1}\right)$$

Or toltane la prima somma, tutte l' altre fino al termine n^{mo}, sono $\frac{d}{hq^{n-1}(q-1)}(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\text{ec.}\ldots -n+1)$, e $q^{n-1}, q^{n-2}, q^{n-3}$ ec. è una progressione geometrica decrescente, in cui n diviene $n-1$: onde facendo nella formula (260) $\omega=q^{n-1}$, $n=n-1$, la somma sarà $s=q\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$: dunque per la somma totale avremo $s=\frac{a}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)+\frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{1-n}{q-1}\right)+\ldots\ldots$ $\frac{dq}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2}\right)=\frac{(aq+d-a)(q^n-1)-(q-1)dn}{hq^{n-1}(q-1)^2}$. Se $n=\infty$, svanirà tutto ciò che è dopo q^n, onde $s=\frac{(aq+d-a)q^n}{hq^{n-1}(q-1)^2}=\frac{(aq+d-a)q}{h(q-1)^2}$.

289. Bastano le due serie sommate per trovar la somma della serie $\frac{g}{h}+\frac{k}{hq}+$ ec. coi numeratori in serie algebrica, e i denominatori in progression geometrica. Poichè 1°. nella serie $\frac{d}{h}, \frac{d}{hq}$ ec., ove i numeratori son costanti cioè $m=0$, si ha $T=\frac{dn^0}{hq^{n-1}}$ ed $S=\frac{-d\times-(q^n-1)n^0}{hq^{n-1}(q-1)}$: 2°. nel-

la serie $\frac{a}{h}$, $\frac{a+d}{hq}$ ec. ove son costanti le prime differenze dei numeratori cioè $m=1$, si ha $T=\frac{dn+(a-d)n^0}{hq^{n-1}}$ ed $S=$ ... $\frac{-(q-1)dn-(aq+d-a)\times-(q^n-1)n^0}{hq^{n-1}(q-1)^2}$. Dunque (274) nella data serie 1°. T ed S debbono avere n al grado medesimo: 2°. il denominator di T dee essere hq^{n-1}, e $hq^{n-1}\times(q-1)^{m+1}$ quello di S: 3°. posto $an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+$ ec. per numerator di T, il numerator di S sarà $-An^m-Bn^{m-1}-Cn^{m-2}-$ ec.: 4°. l' ultimo termine del numerator di S (quello cioè in cui, secondo il valor di m, si ha $n^{m-m}=n^0$) dee moltiplicarsi costantemente per $-(q^n-1)$. Ridotti dunque T ed S allo stesso denominatore, si ha . . .

$$T=\frac{(an^m+bn^{m-1}+\text{ec.})(q-1)^{m+1}}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$S=\frac{-An^m-Bn^{m-1}-\text{ec.}-\ldots\ldots\times-(q^n-1)}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}};$$ se in S si ponga $n-1$ in luogo di n, e si moltiplichi tutto il rotto per q, sarà $s=$

$$\frac{\begin{array}{lllll} -Aqn^m & +Aqmn^{m-1} & -Aqm.\frac{m-1}{2}.n^{m-2} & +Aqm.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.n^{m-3} & -\text{ec.} \\ & -Bq & +Bq.\overline{m-1} & -Bq\overline{m-1}.\frac{m-2}{2} & +\text{ec.} \\ & & -Cq & +Cq.\overline{m-2} & -\text{ec.} \\ & & & -Dq & +\text{ec.} \end{array}}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}}$$

e poichè $S-s=T$, ovvero $S-s-T=0$, sarà $0=$ . . . .

$$\left.\begin{array}{lllll}
-An^{m} & -Bn^{m-1} & -Cn^{m-2} & -Dn^{m-3} & - \\
+Aq & -Aqm & +Aqm.\frac{m-1}{2} & -Aqm.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} & + \\
 & & & & \text{ec.} \\
-a(q-1)^{m+1} & +Bq & -Bq.\overline{m-1} & +Bq.\overline{m-1}.\frac{m-2}{2} & - \\
 & -b(q-1)^{m+1} & +Cq & -Cq.\overline{m-2} & + \\
 & & -c(q-1)^{m+1} & +Dq & - \\
 & & & -d(q-1)^{m+1} & +
\end{array}\right.$$

e trovati al solito i valori di A, B, C ec., sarà . . . . .

$$S=\frac{-1}{hq^{n-1}(q-1)^2}[\,\overline{q-1}.an^{m}+(amq+\overline{q-1}.b)n^{m-1}+ \ldots.$$
$$(m.\frac{m-1}{2}.aq\frac{q+1}{q-1}+\overline{m-1}.bq+\overline{q-1}.c)\,n^{m-2}+ \ldots$$
$$(m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}aq\frac{q^2+4q+1}{(q-1)^2}+\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.bq\frac{q+1}{q-1}+ \ldots.$$
$$\overline{m-2}.cq+\overline{q-1}.d)\,n^{m-3}+\text{ec.}\ldots.\times-(q^{n}-1)\,n^{m-m}\,].$$

Esempio. Sia la serie $\frac{1}{2},\frac{4}{8},\frac{10}{32},\frac{20}{128}$ ec. i cui numeratori hanno costanti le terze differenze: sarà $m=3$, $T=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$, e perciò $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=0$, e poi $h=2$, $q=4$, e il quarto termine della somma ove $n^{m-3}=n^{\circ}$, dovrà moltiplicarsi per $-(q^{n}-1)$. Fatta la moltiplicazione e sostituiti i valori, si troverà $S=\frac{-1}{2.4^{n-1}3^{2}}[\frac{n^3}{2}+\frac{7n^2}{2}+\frac{25n}{3}-(4^{n}-1)\frac{64}{9}]$. Se $n=1$, si ha $S=\frac{1}{2}$; se $n=2$, $S=1$: se $n=3$, $S=\frac{21}{16}$ ec.: e se $n=\infty$, i termini $\frac{-n^3}{3^2.4^n}-\frac{7n^2}{3^2.4^n}-\frac{50n}{3^3.4^n}-\frac{128}{3^4.4^n}$ diverranno infinitesimi (200) e svaniranno (197), onde $S=\frac{128}{81}$.

290. Osservazioni. I. Col metodo stesso si somma la serie reciproca $\frac{g}{h} + \frac{k}{hq^{-1}} + \frac{p}{hq^{-2}} +$ ec. $= \frac{g}{h} + \frac{kq}{h} + \frac{pq^2}{h} +$ ec. Fatti i cangiamenti relativi all'indole di questa serie, si troverà $S = \frac{q^{n-1}}{h(q-1)^2}[\overline{q-1}.aqn^m + (\overline{q-1}.bq - amq)n^{m-1} + (m \times \frac{m-1}{2}.aq\frac{q+1}{q-1} - \overline{m-1}.bq + \overline{q-1}.cq)n^{m-2} + (\overline{m-1} \times \frac{m-2}{2}.bq\frac{q+1}{q-1} - m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.aq\frac{q^2+4q+1}{(q-1)^2} - \overline{m-2} \times cq + \overline{q-1}.dq)n^{m-3} +$ ec. . . . . $\times (1 - q^{-n})n^{m-m}]$.

Combinando queste serie e le loro somme, si avranno altre serie e le loro somme con poca fatica.

291. II. Se non può sommarsi in termini finiti l'una serie infinita, si rende più convergente che sia possibile; poichè *se una serie converge velocemente, sommati alcuni de' primi termini, posson trascurarsi gli altri senza error sensibile*. Così in $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ (274) quanto più sarà piccolo il valor di x riguardo ad a, tanto più sarà pronta la convergenza della serie $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} -$ ec. (48).

Metodo inverso delle Serie.

292. Data un' equazione di questa forma $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n} +$ ec. ove il secondo membro si suppone una serie convergente, si cerca il valor di y. Il metodo per trovarlo si chiama *Metodo inverso delle Serie* o *Ritorno delle Serie*, perchè il valor cercato si ottiene con la serie delle potenze di x. Liberato y^m dal suo coefficiente, e fatto $\frac{x}{a} = u$, sarà $\frac{x}{a} = u = y^m + \frac{by^{m+n}}{a} + \frac{cy^{m+2n}}{a} + \frac{dy^{m+3n}}{a}$ ec., e per conoscer la legge con cui procede la nuova serie (274), osservo che l'equazioni simili alla data come $\frac{a}{3} = y^3 -$

$\frac{y^{3+3}}{a} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^2} \dots \frac{a^4}{3} = y^3 - \frac{y^{3+3}}{a^4} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^8} \dots \frac{a^7}{3} =$ $y^3 - \frac{y^{3+3}}{a^7} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^{14}}$ ec. hanno per radici $y^3 - a, y^3 - a.a^3,$ $y^3 - a.a^{2.3}$ ec., il che dà $y = a^{\frac{1}{3}}, y = a^{\frac{1+3}{3}}, y = a^{\frac{1+2.3}{3}}$ ec., e perciò pongo in generale $y = Au^{\frac{1}{m}} + Bu^{\frac{1+n}{m}} + \dots$ $Cu^{\frac{1+2n}{m}} + Du^{\frac{1+3n}{m}}$ ec. Ora poichè $0 = -u + y^m + \frac{by^{m+n}}{a} +$ ec., avremo $0 =$

$$\begin{array}{llllll}
-u & = -u & & & & \\
+y^m & = A^m u + mA^{m-1}Bu^{\frac{m+n}{m}} & + & mA^{m-1} & Cu^{\frac{m+2n}{m}} & + \text{ec.} \\
 & & + \frac{m.\overline{m-1}}{2} & A^{m-2} & B^2 & + \text{ec.} \\
+\frac{b}{a}y^{m+n} = & +\frac{b}{a}A^{m+n} & +(m+n)\frac{b}{a} & A^{m+n-1} & B & + \text{ec.} \\
+\frac{c}{a}y^{m+2n} = & & + & \frac{c}{a} & A^{m+2n} & + \text{ec.}
\end{array}$$

Trovati al solito i valori di A, B, C ec., viene $y =$ $u^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{am}u^{\frac{1+n}{m}} + \frac{(1+m+2n)b^2 - 2acm}{2a^2m^2}u^{\frac{1+2n}{m}} - \dots$ $\left(\frac{(2m^2+9mn+9n^2+3m+6n+1)b^3}{6a^3m^3} - \frac{(1+m+3n)bc}{a^2m^2} + \frac{d}{am}\right) \times$ $u^{\frac{1+3n}{m}} +$ ec.

Applicazioni. I. Sia $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 +$ ec.; si avrà $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{5}$ ec., $m = 2, n = 1,$ $u = \frac{x}{a} = 2x$, e quindi $y = u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{36}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{270}u^2$ ec.

II. Sia $x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} y^{\frac{5}{2}}$ — ec.; avremo $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{8}$, $d = -\frac{1}{16}$ ec., $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$, $u = \frac{x}{a} = x$, e perciò $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8}$ ec.

293. Se fosse $m = n = 1$, la formula generale si cangierebbe in $y = u - \frac{b}{a} u^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^2} u^3 + \frac{5abc - a^2 d - 5b^3}{a^3} u^4$ ec. $= \frac{1}{a} x - \frac{b}{a^3} x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} x^3 - \frac{5b(b^2 - ac) - a^2 d}{a^7} x^4 + \ldots \ldots \frac{7b^2(2b^2 - 3ac) + 3a^2(2bd + c^2) - a^3 e}{a^9} x^5$ — ec.

294. E se fosse $m = 1$, $n = 2$, la formula diverrebbe $y = u - \frac{b}{a} u^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^2} u^5 + \frac{8abc - a^2 d - 12b^3}{a^3} u^7$ ec. $= \frac{1}{a} x - \frac{b}{a^4} x^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7} x^5 + \frac{8abc - a^2 d - 12b^3}{a^{10}} x^7$ ec.

DEI LOGARITMI

La lunghezza dei calcoli nella moltiplicazione e divisione dei numeri molto grandi, e soprattutto nella formazion delle potenze e nell' estrazion delle radici un poco alte, suggerì l' idea dei *Logaritmi* a Nepero, uomo di raro genio, con che egli ridusse le moltiplicazioni a somme, le divisioni a sottrazioni, le formazioni delle potenze a moltiplicazioni assai corte, e l' estrazioni delle radici a facili divisioni.

295. Sia la progression geometrica (215)
$\div\div\; a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8$ ec.;
fatto per esempio $a = 2$, sarà
$\div\div\; 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7 : 2^8$ ec., cioè
$\div\div\; 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$ ec.

1°. Vogliasi il prodotto di $2^3 \times 2^4 = 8 . 16$; sommo gli esponenti $3 + 4 = 7$, cerco l' esponente 7, e sotto

sotto di esso trovo 128; dunque $8 \cdot 16 = 128$: 2°. vogliasi il quoziente di $\frac{2^8}{2^6} = \frac{256}{64}$; sottraggo gli esponenti $8 - 6 = 2$, cerco l' esponente 2, e sotto di esso trovo 4; dunque $\frac{256}{64} = 4$: 3°. vogliasi la 2ª potenza di $2^4 = 16$; moltiplico gli esponenti $2 \cdot 4 = 8$; cerco l' esponente 8, e sotto di esso trovo 256; dunque $2^{4 \times 2} = 256$: 4°. vogliasi la radice 3ª di $2^6 = 64$; divido gli esponenti $6 : 3 = 2$, cerco l' esponente 2, e sotto di esso trovo 4; dunque $2^{6:3} = 4$. Tale è in sostanza il metodo di Nepero.

296. Gli esponenti di a sono i *Logaritmi;* onde se $a = 10$ e la progressione divenga $\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3$ ec. $= 1 : 10 : 100 : 1000$ ec, l' esponente 0 è il logaritmo dell' unità, l' esponente 1 lo è di 10, l' esponente 2 lo è di 100 ec. Così si hanno i soli logaritmi de' numeri 1, 10, 100, 1000 ec., e mancan quelli dei numeri intermedj 2, 3, 4 ec., 11, 12, 13 ec. e quelli delle frazioni; si aggiunsero dunque agli esponenti alcuni zeri in forma di decimali, e la progressione divenne

$$\div 10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000} : \text{ec.}$$

Inserendo 9999999 medj proporzionali aritmetici tra i primi due esponenti della progressione, si trovò la progression geometrica

$$\div 10^{0,0000000} : 10^{0,0000001} : 10^{0,0000002} : 10^{0,0000003} : \text{ec.}$$

e i valori di questi termini sono interi e rotti compresi tra 1 e 10. Ve ne sarà dunque uno $= 2$, un altro $= 3$, un altro $= 4$ ec. prossimamente: così può farsi $2 = 10^{0,3010300}$, $3 = 10^{0,4771213}$, $4 = 10^{0,6020600}$ ec., e questi esponenti sono i logaritmi di 2, di 3, di 4, ec.

297. Con tali calcoli furon costruite le Tavole dei logaritmi per tutti i numeri da 1 fino a 100000.

In alcune di queste i logaritmi hanno dieci, quindici e venti decimali; ma bastano d'ordinario i primi cinque. Per ben comprenderne gli usi è necessario averle fra le mani.

298. Frattanto senza di esse si intende che i logaritmi dei numeri tra 1 e 10 comincian per 0; dei numeri tra 10 e 100 per 1; dei numeri tra 100 e 1000 per 2 ec. Questa prima cifra dei logaritmi (che è il numero intero dell'esponente) si chiama *Caratteristica* del logaritmo, perchè fa conoscere di quanti caratteri è il numero che gli corrisponde, dovendo egli avere una cifra di più delle unità della caratteristica. Così il logaritmo 4,814560 appartiene a un numero di cinque cifre perchè la sua caratteristica è 4.

Proprietà dei Logaritmi in generale.

299. Supposto $a^m = b$ ed $a^n = c$, sarà m il logaritmo di b, ed n quello di c (296), che presa L o l per segno del logaritmo, si scriveranno $m = \mathrm{L}b$ ed $n = \mathrm{L}c$.

300 Dunque 1°. $a^m . a^n = a^{m+n} = bc$, ed $m + n = \mathrm{L}bc = \mathrm{L}b + \mathrm{L}c$, cioè *il logaritmo d'un prodotto è la somma dei logaritmi dei suoi fattori*: 2°. $a^m : a^n = a^{m-n} = b : c$, ed $m - n = \mathrm{L}(b : c) = \mathrm{L}b - \mathrm{L}c$, cioè *il logaritmo d'un quoziente è la differenza tra i logaritmi del dividendo e del divisore*: 3°. $a^{mp} = b^p$, ed $mp = \mathrm{L}b^p = p\mathrm{L}b$, cioè *il logaritmo d'una potenza* b^p *è un multiplo* p *del logaritmo di* b: 4°. $a^{\frac{m}{s}} = b^{\frac{1}{s}}$, ed $\frac{m}{s} = \mathrm{L}b^{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s}\mathrm{L}b$, cioè *il logaritmo d'una radice* b$^{\frac{1}{s}}$ *è un summultiplo* s *del logaritmo di* b. Ecco alcuni casi più comuni.

$L abcd$ ec. $= La + Lb + Lc + Ld$ ec.

$L(a^2 - x^2) = L(a+x) + L(a-x)$.

$L\frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le$.

$L\frac{ab+bc}{m+n} = Lb + L(a+c) - L(m+n)$.

$L(\frac{a+x}{a-x}) = L(a+x) - L(a-x)$.

$La^m = mLa$ . . . . $La^{-m} = -mLa$.

$La^m p^b c^q = mLa + bLp + qLc$.

$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La$ . . . . . $La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}La$.

$L\frac{ax^n}{r^z} = La + nLx - zLr$.

$L\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}L(a+x) + \frac{1}{2}L(a-x)$.

$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}L(a-x) + \frac{m}{n}L(a^2 + ax + x^2)$.

$L\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}L(a-x) + \frac{1}{2}L(a+x) - 2L(a+x)$

$= \frac{1}{2}L(a-x) - \frac{3}{2}L(a+x)$.

$L\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = L1 - \frac{1}{2}L(1+x^2) = -L\sqrt{(1+x^2)}$.

$L3a^2 + La^4 + 5L3 = L3 + 2La + 4La + 5L3$

$= 6L3 + 6La = 6L3a = L(3a)^6$.

Calcolo de' Logaritmi per mezzo delle Serie.

301. *Dato un numero qualunque* $x+1$, *trovarne il logaritmo*. Poichè un logaritmo o ha la forma di rotto o è un rotto (296) che può sempre ridursi a $\frac{\phi}{p+x}$ qualunque sieno ϕ, p, la serie che lo esprime procederà al solito (273), e avremo $L(1+x) = P + Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ ec.; dunque se x divenga $x(x+2)$, sarà $L(1+x)^2 = (300)\ 2L(1+x) =$

$P + Ax(x+2) + Bx^2(x+2)^2 + Cx^3(x+2)^3 + ec. = 2(P + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ec.)$, cioè trasponendo e riducendo

$$\begin{array}{l} o = P - Ax^2 - 4Bx^3 - Bx^4 - ec., \text{ e perciò } P = o, B = -\frac{1}{2}A, \\ \qquad\quad - 2B - 6C \;\; - 12C \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; - 14D \end{array}$$

$C = \frac{1}{3}A$, $D = -\frac{1}{4}A$ ec.; dunque $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + ec.)$.

302. La quantità A è indeterminata, onde *il numero stesso* $1+x$ *ha un' infinità di logaritmi differenti*. Ma il più naturale di tutti i *sistemi* essendo quello di Nepero ove $A = 1$, i logaritmi calcolati in questa ipotesi si son chiamati *Naturali* e anche *Iperbolici* attesa la lor relazione con l' *Iperbola equilatera*, come a suo luogo diremo. Dunque tutti i sistemi di logaritmi posson ridursi a quello dei naturali; poichè in ogni sistema il logaritmo di $1+x$ eguaglia il prodotto del suo logaritmo naturale per la quantità costante A che si chiama il *Modulo*. Così se Lo sia il logaritmo delle Tavole o *Ordinario* d' un numero, e L*i* il logaritmo iperbolico del numero stesso, si avrà $Lo = A.Li$; e se L*n* sia il logaritmo del medesimo numero in un altro sistema, si avrà del pari $Ln = A'.Li$: onde fissato A, A' come insegneremo tra poco, e dati i logaritmi iperbolici, si avranno subito i logaritmi d' ogn'altro sistema.

303. Supposta dunque $A = 1$, ripiglio l' equazione $L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ec.$, e aggiunto ai due membri La, ottengo $L(a+ax) = La + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ec.$ Sia $ax = \pm z$ ovvero $x = \frac{\pm z}{a}$, e sarà $L(a+z) = La + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - ec.$, $L(a-z) = La - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} - ec.$; dunque $L(a+z) - L(a-z) = L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = \frac{2z}{a}\left(1 + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{z^4}{5a^4} + \frac{z^6}{7a^6} + ec.\right)$, serie sempre convergente, perchè $\frac{a+z}{a-z}$ è quantità positiva e perciò $a > z$.

304. Applichiamo questa serie al calcolo de' logaritmi e

supponghiamo $\frac{a+z}{a-z}=\frac{m}{m-1}$: sarà $\frac{z}{a}=\frac{1}{2m-1}$, e $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$ ovvero $Lm-L(m-1)=\frac{2}{2m-1}\left(1+\frac{1}{3(2m-1)^2}+\frac{1}{5(2m-1)^4}+\frac{1}{7(2m-1)^6}+\text{ec.}\right)$; onde $Lm=L(m-1)+\frac{2}{2m-1}\left(1+\frac{1}{3(2m-1)^2}+\frac{1}{5(2m-1)^4}+\text{ec.}\right)$: ma il logaritmo di m suppone noto quello di $m-1$; dunque si avrà quello di m per mezzo d'una serie convergentissima, specialmente se m sia un numero alquanto grande. Così il logaritmo iperbolico di 2, fatto $m=2$, è $L2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^4}+\frac{1}{7\cdot 3^6}\text{ ec.}\right)=0{,}69314718$ ec. presi nove termini della formula: il logaritmo di 5, fatto $m=5$, è $L5=2L2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3\cdot 9^2}+\frac{1}{5\cdot 9^4}+\text{ec.}\right)=\ldots$ 1,60943791. Dati dunque con questo metodo i logaritmi de' numeri primi, si hanno quelli di tutti gli altri numeri; poichè sommati i logaritmi di 2 e di 3, si ha quello di 6 (300); quello di 4 è doppio di quel di 2, quello di 9 di quel di 3 ec.

305. Determiniamo ora il Modulo A per il sistema dei logaritmi ordinarj in cui $a=10$ e perciò L 10 $=1$ (296). Si avrà dunque (302) Lo 10 $=$ A $\times$ L*i* 10: ma Lo 10 $=1$ e L*i* 10 $=$ L*i*2 $+$ L*i*5 (304) $=2{,}30258509$ (357); dunque A $=\ldots$ $\frac{1}{2{,}30258509}=0{,}43429448$ ec., *Modulo delle Tavole*: e però *i logaritmi iperbolici moltiplicati per* 0,43429448190325182765112891891660508229439700580366656611 44454, *si riducono a quei delle Tavole;* e reciprocamente *quei delle Tavole moltiplicati per* 2,302585092994045684017991454684364207601101488628772976033328, *si cangiano in iperbolici.*

306. Così si determinerebbe il Modulo A in ogn' altro sistema. Quello delle Tavole (chiamato di Briggs perchè Briggs le calcolò il primo) serve alla Trigonometria, quello de' logaritmi iperbolici è di grand' uso nel *Calcolo Integrale*. Il numero a si chiama la *Base Logaritmica* del sistema: così 10 è la base del sistema ordinario; quella del sistema di Nepero è 2,71828183, come vedremo. In generale, *la base di un sistema qualunque di logaritmi è il numero il cui logaritmo è* 1.

307. *Dato un logaritmo trovarne il numero*. Se il loga-

ritmo è ordinario si riduca (305) all'iperbolico z, e sia $1+x$ il numero cercato; si avrà per le cose dette $z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ — ec. Per trovare il valor di x in z, presa la formula (293) $x = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ ec., si avrà $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$ ec., ed $1 + x = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 +$ ec. In generale un numero qualunque $n = 1 + Ln + \frac{1}{2} L^2 n + \frac{1}{2 \cdot 3} L^3 n +$ ec. onde $n^m = 1 + Ln^m + \frac{1}{2} L^2 n^m$ ec. $= 1 + mLn + \frac{1}{2} Ln^m \times Ln^m$ ec. $= 1 + mLn + \frac{1}{2} m^2 L^2 n$ ec., serie che convergendo in ogni caso, risolvon generalmente il problema.

308. Applichiamole a trovar la base de' logaritmi iperbolici, o il numero e il cui logaritmo iperbolico è 1, cioè $Le = 1$. Quì si ha $e = n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} +$ ec. $= 2{,}718281$ $828459045235360 28 = (1 + \frac{1}{\infty})^\infty$ (198).

Dunque $e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 +$ ec. (307) $= (1 + \frac{x}{\infty})^\infty$ (198): onde 1°. $e^\infty = \infty$: 2°. $L\infty = \infty Le = \infty$, cioè *il logaritmo d'un numero infinito è l'infinito*: 3°. $\frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty}$, e $L\frac{1}{\infty} (= Lo) = L1 - \infty Le = -\infty$, cioè *il logaritmo di zero è l'infinito negativo*: 4°. se $e^{Lz} = u$, verrà $LzLe = Lu$, cioè $Lz = Lu$, $z = u$, ed $e^{Lz} = z$; dunque se $z = a^y$, sarà $a^y = e^{yLa}$; se $z = \infty$, verrà $e^{L\infty} = \infty$; se $z = \frac{1}{x}$, sarà $xe^{L\frac{1}{x}} = 1$: ove $x = o$ dà $oe^{L\frac{1}{o}} = oe^{-Lo} = oe^{L\infty} = oe^\infty = 1$; ed $x = \infty$ dà $\infty e^{L\frac{1}{\infty}} = \infty e^{-L\infty} = \infty e^{Lo} = \infty e^{-\infty} = 1$. Per evitar le contradizioni, si avverta che l'infinito è di più ordini (199), e che *l'infinito logaritmico* è infinitamente minore dell'*infinito assoluto* già considerato altrove (197): infatti questo dà $\infty . o = m$, e quello dà $- \infty . o = oLo = Lo^o = L1 = o$ (296).

Uso dei Logaritmi nella risoluzione di varie Equazioni.

309. Molte equazioni che sfuggono le regole dell'Algebra ordinaria si risolvon facilmente coi logaritmi. Ecco degli esempj.

I. Sia l' equazione $a^x = b$: sarà (300) $La^x = xLa = Lb$, onde $x = \frac{Lb}{La}$. Sia $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$; sarà $mxLa + (1 - nx) Lb = Lc$, onde $mxLa - nxLb = Lc - Lb$, ed $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb} = \frac{L(c:b)}{L(a^m:b^n)}$. Sia anche $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$; sarà $xLa = mxLb - nLb - qxLc$; onde $x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La}$. Sia infine $\frac{b^{n-\frac{r}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; sarà $nLb - \frac{r}{x} Lb - mxLc = xLf - pLf$, onde $(mLc + Lf)x^2 - (nLb + pLf)x = -rLb$, ovvero $x^2 Lc^m f - xLb^n f^p = - Lb^r$, che risoluta, dà $x = \frac{Lb^n f^p}{2Lc^m f} \pm \sqrt{\left(\frac{(Lb^n f^p)^2}{4(Lc^m f)^2} - \frac{Lb^r}{Lc^m f}\right)}$.

310. II. Se con 100 000 abitanti la popolazione aumenta ogn'anno di $\frac{1}{30}$, qual sarà il loro numero al fine d' un secolo? Sia $n = 100\,000$ abitanti, che per la condizion del problema saranno dopo un anno $n + \frac{1}{30}n = n\left(\frac{31}{30}\right)$; dopo due diventeranno $n\left(\frac{31}{30}\right)^2$; dopo tre $n\left(\frac{31}{30}\right)^3$ ec. fino al termine di un secolo, in cui l'espressione sarà $n\left(\frac{31}{30}\right)^{100}$. Dunque $100\,000 \times \left(\frac{31}{30}\right)^{100} = x$, numero cercato. Ma troppo ci vorrebbe ad alzar $\frac{31}{30}$ alla centesima potenza senza i logaritmi, che subito danno $Lx = L\,100\,000 + 100\,L\frac{31}{30}$: ma $L\,100\,000 = 5$, e $100(L31 - L30) = 1{,}4240439$ (per Tavole con dieci decimali come quelle d' Ulacq); dunque $Lx = 6{,}4240439$, e $x = 2654874$.

Nel ripopolarsi la Terra dai tre figli di Noè e dalle loro tre mogli, in qual proporzione dovea crescere ogni anno la popolazione perchè vi fosse un milione d'uomini in 200 anni? Sia $\frac{1}{x}$ l'aumento annuo; dunque $6\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} = \ldots$ $1\,000\,000$, ed $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$: perciò $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} \times \ldots$ $L\frac{1\,000\,000}{6} = \frac{1}{200}.5{,}2218487 = 0{,}0261092 = L\,1{,}061963$, onde $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1\,000\,000}$ ed $x = 16$ in circa. Bisognava dunque che il genere umano crescesse ogn'anno d' $\frac{1}{16}$, il che la sanità e lunga vita de' Patriarchi rende assai verisimile.

Qual'è la quantità di cui dovrebbe crescere ogn'anno un popolo, per diventare al fin di ciascun secolo più numeroso del doppio? Sia n il numero degli individui e $\frac{1}{x}$ la quantità ricercata; avremo per ogn'epoca secolare, ... $n\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} = 2n$ che da $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\,L2 = 0{,}0030103$, onde $\frac{1+x}{x} = \frac{10069556}{10\,000\,000}$, ed $x = 144$, poco meno.

Se un certo numero d'uomini aumenta ogn'anno della centesima parte, quant'anni ci vorranno perchè divenga decuplo? Sia n il dato numero, x gli anni cercati; si avrà dopo x anni, $n\left(\frac{101}{100}\right)^{x} = 10n$, e $\left(\frac{101}{100}\right)^{x} = 10$; e però $x = \frac{L10}{L101 - L100} = \frac{10\,000\,000}{43214} = 231$.

RISOLU-

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONI

Dei Gradi Superiori.

SUpporremo in avvenire ogni equazione 1°. ordinata: 2°. con tutti i termini in un membro e con zero nell' altro: 3°. senza coefficiente nell' incognita alla più alta potenza: 4°. senza rotti e senza radicali, giusta il metodo che presto spiegheremo.

311. Le radici reali d' un' equazione possono esser positive e negative, eguali ed ineguali, razionali e sorde: ma l' immaginarie, o positive o negative son sempre sorde. Le sorde di grado pari e perciò anche l' immaginarie, hanno a 2 a 2 le stesse quantità, ma in ogni coppia simile la quantità sorda è positiva nell' una, negativa nell' altra; senza ciò i radicali comparirebbero nell' equazione, contro l' ipotesi. Quindi le radici eguali non sono mai sorde, se pur le sorde positive ed eguali non sieno unite ad altrettante simili negative.

312. Sia l' equazione $x^2 - (a+b)x + ab = (x - a)(x - b) = 0$: è chiaro che per ridurre a zero il primo suo membro, basta che vi si riduca un sol fattore $x - a$ o $x - b$; dal supporre ad un tempo $x - a = 0 = x - b$, verrebbe $a = b$, il che non è. *Il primo membro d' un' equazione è* dunque *il prodotto di più fattori semplici, dei quali (se son differenti) uno solo per volta è zero.*

313. Or dal prodotto di $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$ si ha l' equazione quì di faccia, dal cui esame si deducono le seguenti verità.

$$\begin{array}{lllll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ \quad\; - b & + ac & - abd & \\ \quad\; - c & + ad & - acd & \\ \quad\; - d & + bc & - bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$$

314. I. Un' equazione ha tanti fattori semplici, tante radici, e tanti termini più uno (contando tutti quelli che le competono), quante sono unità nell' esponente massimo dell' incognita.

315. II. I segni dei termini sono o *alternativamente diversi* o *successivamente* gli stessi, secondo che tutte le radici $a; b, c, d$ son positive o negative: in generale *quante sono le alternazioni o successioni di segno, tante son le radici positive o negative, se non vi sieno immaginarj*.

316. III. Onde con tutte le radici negative i termini pari, il secondo, il quarto ec., verrebbero col $+$: si mutan perciò le positive in negative mutando segno ai termini pari, o (che è lo stesso) scrivendo $-x$ in luogo di x.

317. IV. Il coefficiente del secondo termine è la somma di tutte le radici con segni contrarj; quello del terzo, del quarto ec. son le somme dei prodotti di esse a 2 a 2 coi loro segni, a 3 a 3 con segni contrarj ec.: l' ultimo termine è il prodotto di tutte con $+$ se il numero delle negative e il grado dell' equazione sieno ambedue o pari o impari.

318. V. Onde 1°. le radici razionali d' un' equazione non son mai numeri rotti la cui somma e prodotto non potrebbe, come si sa (390. XLIV.), aversi in interi, contro l' ipotesi: 2°. dividendo un' equazione $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$ per $x \pm$ qualche divisor D21 dell' ultimo termine 21 (37), se la divisione riesce, sarà $x \pm$ D21 un fattor semplice dell' equazione; tali si trovano $x - 1$, $x - 3$, $x + 7$, e le radici della data sono $1, 3, -7$: 3°. perciò ogni quantità complessa, come $x^2 - c^2$, può sciogliersi nei suoi fattori sol che si tratti come un' equazione e si faccia $x^2 - c^2 = 0$; ciò dà i fattori $x - c$, $x + c$: 4°. il coefficiente del secondo termine in un' equazione numerica è una somma di numeri semplici o d' una sola dimensione, e i coefficienti del terzo, quarto ec. son somme di numeri composti, o di due, tre ec. dimensioni.

319. VI. Cercando dunque le somme P', P'', P''' ec. delle potenze prima, seconda, terza ec. di ciascuna radice d' un'equazione numerica $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} +$ ec. $= 0$, nell'espression delle prime non avran luogo dimensioni oltre la prima, nè in quella delle seconde le superiori alla seconda ec.: di modo che l' equazione si ridurrà per le prime ad $x^n - Ax^{n-1} = 0 = x - A$, per le seconde ad $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} = 0 = x^2 - Ax + B$ ec.

$$P' = A$$
$$P'' = AP' - 2B$$
$$P''' = AP'' - BP' + 3C$$
$$P^{\prime \text{v}} = AP''' - BP'' + CP' - 4D$$
$$P^{\text{v}} = AP^{\prime \text{v}} - BP''' + CP'' - DP' + 5E$$
$$P^{\text{v}\prime} = AP^{\text{v}} - BP^{\prime \text{v}} + CP''' - DP'' + EP' - 6F$$

Quindi poste in vece di x le radici dell' equazione che suppongo f, g, h ec., si avrà 1°. $f = A$ per P': 2°. $f^2 = Af - B$, $g^2 = Ag - B$, ed $f^2 + g^2 = A(f+g) - 2B = AP' - 2B$ per P'': 3°. $f^3 = Af^2 - Bf + C$, $g^3 = Ag^2 - Bg + C$, $h^3 = Ah^2 - Bh + C$, ed $f^3 + g^3 + h^3 = A(f^2 + g^2 + h^2) - B(f + g + h) + 3C = AP'' - BP' + 3C$ per P''' ec.; sicchè le formule procederanno con manifesta legge come quì di sopra.

320. VII. Se manchi il secondo termine, la somma delle radici positive eguaglierà quella delle negative: se manchi il terzo la somma dei prodotti positivi a 2 a 2 eguaglierà quella dei negativi ec.: se manchi l'ultimo, una almeno delle radici sarà zero (317).

321. VIII. Se sia $a = -b$, $c = -d$ ec., spariranno i termini ove x è a potenze impari, e il coefficiente del terzo termine sarà la somma dei quadrati delle radici combinate a 2 a 2, quello del quinto la somma dei prodotti dei lor quadrati combinandole a 4 a 4 ec.

322. IX. Sostituita ad x una radice qualunque a, il primo membro dell'equazione diverrà 0 (313); e sostituiti p, q, se si abbiano due risultati con segni contrarj, sarà positivo l'uno de' due fattori, come $p - a$, negativo l' altro: perciò si avrà $p > a, q < a$, e la radice a tra p e q.

323. X. Per altro, se le radici sieno o immaginarie o eguali a 2 a 2, a 4 a 4 ec., le quantità qualun-

que p, q sostituite per x, non daranno mai risultati con segni contrarj: poichè le immaginarie non posson trovarsi tra le quantità reali p, q; e le eguali come $(p-a)^2$, $(q-a)^4$ danno sempre i risultati positivi (121).

324. XI. Ogni equazione con l'ultimo termine ω negativo ha una radice reale positiva; poichè fatto $x =$ o, si ha $-\omega$; e fatto $x = \infty$, si ha ∞^m; vi è dunque una radice reale e positiva tra ω ed ∞ (322).

325. XII. Ogni equazione di grado impari con l'ultimo termine positivo, ha una radice reale negativa; poichè posto $-x$ per x, le radici positive divengon negative (316): ora in tal caso l'ultimo termine è negativo (314); dunque la nuova equazione ha una radice reale positiva (324), e la proposta ne ha una negativa.

326. XIII. Ogni equazione di grado pari con l'ultimo termine negativo ha una radice reale positiva, come si sa (324), ed una negativa; poichè posto $-x$ per x, l'ultimo termine non si cangia (314); dunque la nuova equazione ha una radice positiva (324), e la data ne ha una negativa.

327. XIV. Ogni equazione senza secondo termine e col terzo positivo, ha delle radici immaginarie; col terzo nullo, ne ha delle reali e dell'immaginarie; e col terzo negativo, ne ha delle reali; poichè la somma $-2B$ dei quadrati delle radici (319) sarà nel primo caso negativa, indizio di radici almeno in parte immaginarie (148); nel secondo, sarà zero, il che indica radici parte reali e parte immaginarie; nel terzo, sarà positiva, indizio di radici almeno in parte reali.

328. Per togliere i rotti dall'equazione $x^n + \frac{bx^{n-1}}{ma} + \frac{cx^{n-2}}{md} + \ldots + \frac{f}{mg} = 0$, ove m è 1, o un fattor comune dei denominatori, pongo $x = \frac{y}{madg}$, e sostituendo viene

$$\frac{y^n}{(madg)^n} + \frac{by^{n-1}}{ma(madg)^{n-1}} + \frac{cy^{n-2}}{md(madg)^{n-2}} + \ldots + \frac{f}{mg} = 0;$$

moltiplico tutto per $(madg)^n$, ed ho $y^n + bdgy^{n-1} + ma^2cd \times g^2 y^{n-2} + \ldots + (mg)^{n-1} a^n d^n f = 0$, senza rotti. Per altro la sostituzione $x = \frac{y}{madg}$ in certi casi può esser più semplice: così data $x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{67}{16} = 0$, non solo non farò $x = \frac{y}{2.16}$ come molti usano, ma neppure $x = \frac{y}{2.8}, = \frac{y}{2.4}, = \ldots \frac{y}{2.2}$; pongo bensì $x = \frac{y}{2}$, ed ho l' equazione semplicissima $y^4 - 6y^2 + 8y - 67 = 0$.

329. Per togliere i radicali dall' equazione $x = \sqrt[3]{bx^2} + \sqrt[3]{b^2c}$, pongo $\sqrt[3]{bx^2} = y$, $\sqrt[3]{b^2c} = z$, onde I $x = y + z$, II $bx^2 (= y^3) = (x-z)^3$, III $b^2c = z^3$, valore che posto nella II, la cangia in IV $z^2 = \frac{bx^2 + b^2c - x^3 + 3x^2z}{3x}$: moltiplico questa per z e postovi di nuovo il valore di z^3, trovo V $z^2 = \ldots \frac{3b^2cx - bx^2z - b^2cz + x^3z}{3x^2}$, che paragonata con la IV, dà il valor di z da porsi nella II.

330. Per togliere il secondo termine dall' equazione $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} +$ ec. .... $+ \omega = 0$, si fa $x = y + f$, e si ha la trasformata

$$\begin{array}{lllll} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \Omega \\ y^m & + mfy^{m-1} & + m.\frac{m-1}{2}f^2y^{m-2} & + \text{ec.} \ldots . & + f^m \\ & + a & + (m-1)af & + \text{ec.} & + af^{m-1} \\ & & + \quad b & + \text{ec.} & + bf^{m-2} \end{array} \Bigg\} = 0$$

Posto $A = 0$, sparisce il secondo termine, e viene $f = \frac{-a}{m}$; cioè *si toglie il secondo termine dividendone il coefficiente per l' esponente, ed unendolo con segno contrario alla nuova incognita*. Così data $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, faccio $x = y + 2$, e trovo $y^3 - 8y - 15 = 0$: e data $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$; faccio $x = y - \frac{1}{2}$, o per evitare i rotti, $x = \frac{y-1}{2}$, ed

ho $y^4 - 6y^2 + 8y - 67 = 0$. Col metodo stesso si toglierebbe qualunque altro termine se i radicali non lo impedissero.

331. La passata trasformazione dà il *limite* delle radici, cioè quella quantità che è maggiore di ciascuna radice. Sommati infatti i coefficienti di y nelle colonne A, B, C ... Ω, si ha $A = mf + a$

$$B = m \cdot \frac{m-1}{2} f^2 + (m-1) af + b$$

$$C = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} f^3 + (m-1) \frac{m-2}{2} af^2 + (m-2) bf + c$$

$$\vdots$$

$$\Omega = f^m + af^{m-1} + bf^{m-2} + cf^{m-3} + \text{ec.} \ldots + \omega,$$

e se si prenda il minimo valor di f che rende positivi A, B, C .... Ω, l'equazione avrà tutti i termini con $+$; dunque i valori di y e perciò anche di $x - f = y$ saranno negativi (315); dunque f supererà tutte le radici positive x, e ne sarà il limite: quello delle negative si ha nel modo stesso cangiando x in $-x$ (316).

332. Dunque i divisori dell' ultimo termine, eccedenti il limite, non servono alla ricerca delle radici (318): e se i restanti sieno molti, si farà $\pm f = \pm 1, = \pm 2$ ec., e i divisori $\pm D\Omega$ dell' ultimo termine Ω (che è l'equzione proposta, mutato x in f (330)) daranno $y \mp D\Omega = 0$ (318) ed $x \mp D\Omega \mp f = 0$: ora $x \mp D\omega = 0$; dunque $\mp D\omega = \mp D\Omega \mp f$; cioè i divisori dell' equazione $x^m +$ ec. (330) saranno quelli d' Ω diminuiti o accresciuti di f, esclusi quelli che a colpo d'occhio si vedrà non poter essere divisori d' ω.

333. Esempio. Si voglia il limite di $x^3 - 400x + 360 = 0$; dunque $m = 3, a = 0, b = -400, c = 360$: il minimo valor di f che dà positivi A, B, Ω, è $f = 20$.

$$A = 3f$$
$$B = 3f^2 - 400$$
$$C = \Omega = f^3 - 400f + 360$$

Posto $-x$ per x, l'equazione diventa $x^3 - 400x - 360 = 0$; onde $m = 3, a = 0, b = -400, c = -360$: il minimo valor di f che dà positivi A, B, Ω, è $f = 21$.

$$A = 3f$$
$$B = 3f^2 - 400$$
$$C = \Omega = f^3 - 400f - 360$$

Dunque dei divisori negativi e positivi di 360, sono inutili per le radici i maggiori di -20 e di $+21$. Ma poichè ne restan pur 26, pongo $x = \pm 1$, e viene $\pm 1 \mp 400 + 360 = \begin{matrix} -39 \\ +759 \end{matrix}$: col segno di sopra, i divisori dell' equazione son quelli di 39 diminuiti d' 1, cioè $+2, +12, -2, -4$, esclusi gli altri che eccedono i limiti o non divido-

no 360: col segno di sotto, i divisori son quelli di 359 accresciuti d'1, cioè $+2, +4, +12, -2, -10$, esclusi gl'inabili. Sicchè i 48 divisori di 360 son ridotti nel primo caso a 4, nel secondo a 5, ed esclusi i dissimili, a 3.

Equazioni con Radici Razionali.

334. Per risolvere un'equazione $0 = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Zx^{m-1} + x^m$, ne cerco i divisori razionali sostituendovi ± 1 per x: se l'un dei valori o ambedue la riducono a zero, saranno radici (322); se no, non entreranno più in calcolo. Sia $x + d$ il fattor dell'equazione (d è un divisor ridotto (333) dell'ultimo termine); dunque il prodotto di $x + d$ per un'equazione della forma $0 = E' + E''x + E'''x^2 + \ldots\ldots + E^{(m)}x^{m-1}$ restituirà la data (32). Or paragonando i coefficienti d'ambedue, si hanno l'equazioni poste quì di faccia, che tutte dovranno dar *numeri interi o positivi o negativi* per E', E'', E''' ec., e l'ultimo dovrà ridursi ad 1, se $x + d$ è divisor della data: altrimenti ella non avrà divisori razionali.

$$A : d = E'$$
$$(B - E') : d = E''$$
$$(C - E'') : d = E'''$$
$$\vdots$$
$$(Z - E^{(m-1)}) : d = E^{(m)} = 1$$

Esempio. Sia $0 = -100 - 10x + 66x^2 + 3x^3 - 8x^4 + x^5$, in cui ± 1 non riescono: avremo $A = -100$, $B = -10$, $C = 66$, $D = 3$, $F = -8$. I divisori ridotti di 100 (333) son quelli di 36 accresciuti d'1, cioè $d = 2, 4, 5, 10, -2, -5$: fatto $d = 2$ nell'equazioni di faccia, viene $E' = -50$, $E'' = 20$, $E''' = 23$, $E^{IV} = -10$, $E^{V} = 1$; dunque $x + 2$ è divisor della data: fatto $d = 4$, si ha $E' = -25$, $E'' = \frac{15}{4}$, numero rotto, e un rotto si ha pur da $d = 5, 10, -2$: fatto $d = -5$, trovo $E' = 20$, $E'' = 6$, $E''' = -12$, $E^{IV} = -3$, $E^{V} = 1$, onde anche $x - 5$ è divisor della data.

335. Osservazioni. I. I valori di E^{V}, E^{IV}, E''' ec. sono i coefficienti dell'equazioni $0 = E' + E''x +$ ec. che si hanno dividendo la data per $x + 2$, $x - 5$: esse sono $x^4 - 10x^3 + 23x^2 + 20x - 50 = 0$, $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 6x + 20 = 0$. II. Sottraendole, si sarà divisa la data per il prodotto di ambedue (44. V), e avremo $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$, ove potrebbero esser dei divisori eguali ai già trovati. Infatti ripetuta l'operazione coi divisori stessi $+2, -5$, s'incontra di nuovo il divisore $x - 5$. Così si hanno le radici eguali razionali

(311): le irrazionali (per dirlo quì di passaggio) dovendo accoppiarsi con altrettante simili di contrario segno (311), si hanno col risolver l'equazioni all'ordinario.

Equazioni di tutti i Gradi con radici assegnabili.

336. L'equazion generale $x^m - mx^{m-2}\sqrt[m]{ab} + \ldots\ldots$ $m.\frac{m-3}{2}x^{m-4}\sqrt[m]{a^2b^2} - m.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}x^{m-6}\sqrt[m]{a^3b^3} + \ldots\ldots$ $m.\frac{m-5}{2}.\frac{m-6}{3}.\frac{m-7}{4}x^{m-8}\sqrt[m]{a^4b^4} - m.\frac{m-6}{2}.\frac{m-7}{3} \times \ldots$ $\frac{m-8}{4}.\frac{m-9}{5}x^{m-10}\sqrt[m]{a^5b^5} + m.\frac{m-7}{2}.\frac{m-8}{3}.\frac{m-9}{4} \times \ldots$ $\frac{m-10}{5}.\frac{m-11}{6}x^{m-12}\sqrt[m]{a^6b^6} - m.\frac{m-8}{2}.\frac{m-9}{3}.\frac{m-10}{4} \times$ $\frac{m-11}{5}.\frac{m-12}{6}.\frac{m-13}{7}x^{m-14}\sqrt[m]{a^7b^7} + \text{ec.}\ldots\ldots - a - b =$ 0, che ha per radice $x = \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}$ (159), risolve un' infità d' equazioni.

Equazioni del terzo e quarto grado.

337. Sia $m = 3$, e debba risolversi l' equazione $x^3 + px + q = 0$ senza secondo termine e senza divisori razionali, come supporrò sempre in avvenire. Dal confronto di questa con la generale ho $p = -3\sqrt[3]{ab}$, $q = -a - b$, d'onde eliminato b, viene $a^2 + qa = \frac{p^3}{27}$ ed $a = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$, $b = \frac{-q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$; dunque $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$. Così $x^3 + 9x + 6 = 0$, ove $p = 9$, $q = 6$, dà $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$.

338. L'altre due radici si hanno dall' altre due cubiche di a, b cioè da $\gamma\sqrt[3]{a}$, $\gamma\sqrt[3]{b}$, e da $\lambda\sqrt[3]{a}$, $\lambda\sqrt[3]{b}$ (173), combinate

binate però di modo che il loro prodotto dia, come sopra, $\sqrt[3]{ab} = -\frac{1}{3}p$, ciò che si ha unendo $\gamma\sqrt[3]{a}$ con $\lambda\sqrt[3]{b}$ e $\lambda\sqrt[3]{a}$ con $\gamma\sqrt[3]{b}$, giacchè $\gamma\lambda = 1$ (173.147). Sarà dunque $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} - \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} - \ldots \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$; e ben si vede che il radical quadratico se è reale, dà immaginarie le due radici, e se è immaginario, le dà reali, riducendosi egli allora ad $A + B\sqrt{-1}$ (149); onde la prima radice $x = A + B\sqrt{-1} + A - B\sqrt{-1} = 2A$, come pur l' altre due. Sicchè quando con p negativo si ha $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, le tre radici son reali. Vedremo come si ottengano per approssimazione, giacchè l' aver tentato invano di averle esattamente, meritò a questo caso il nome d'*irriducibile*.

339. Lo stesso metodo risolve anche l' equazioni della forma $x^{3n} + px^{2n} + qx^n + r = 0$, fatto $x^n = y$: e a questa forma appunto appartengon quelle del quarto grado. Sia $x^4 + px^2 + qx + r = 0 = (x^2 + tx + s)(x^2 - tx + u)$ che suppongo i due fattori quadratici della data: paragonandola col loro prodotto $x^4 + (u - t^2 + s)x^2 + (u - s)tx + su = 0$, ho 1°. $u - t^2 + s = p$; 2°. $t(u - s) = q$; 3°. $su = r$: sommo e sottraggo $u + s = t^2 + p$, $u - s = \frac{q}{t}$, e viene $u = \frac{1}{2}(p + t^2) + \frac{q}{2t}$, $s = \frac{1}{2}(p + t^2) - \frac{q}{2t}$, che moltiplicate danno $su = r = \frac{1}{4}(p + t^2)^2 - \frac{q^2}{4t^2}$, onde si ha l' equazione *ridotta* $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$ della forma generale $x^{3n} + px^{2n} +$ ec. $= 0$. Se la data $x^4 + px^2$ ec. ha razionali i due supposti fattori, la ridotta avrà razionale t e $-t$, onde col dato metodo (334) se ne cercherà uno, presi o i positivi o i negativi divisori dell' ultimo termine. Così per $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$, ove $p = -3$, $q = -12$, $r = 5$, la ridotta $t^6 - 6t^4 - 11t^2 - 144 = 0$ coi divisori negativi di 144, dà $t = 3$, onde $u = 1$, $s = 5$, e i fattori $x^2 + 3x + 5$, $x^2 - 3x + 1$.

340. Ma se la data non ha fattori razionali, pongo nella ridotta $t^2 = y = \frac{1}{3}(z - 2p)$ (330), e dalla risultante $z^3 - (p^2 + 12r)3z - (p^2 - 36r)2p - 27q^2 = 0$ ho le radici $y' =$

$t'^2, y''=t''^2, y'''=t'''^2$ (337.338). Or poichè nella ridotta è $2p=-y'-y''-y'''$ (317) e $q=\pm\sqrt{y'y''y'''}$, onde nella data $4u=y'-y''-y'''\pm2\sqrt{y''y'''}$, e $4s=y'-y''-y'''\mp2\sqrt{y''y'''}$, le radici della data o de' suoi due fattori saranno

$$x=\frac{1}{2}(t+\sqrt{(t^2-4u)})=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'}\pm\sqrt{y''}\mp\sqrt{y'''})$$

$$x=\frac{1}{2}(t-\sqrt{(t^2-4u)})=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'}\mp\sqrt{y''}\pm\sqrt{y'''})$$

$$x=\frac{1}{2}(-t+\sqrt{(t^2-4s)})=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'}\pm\sqrt{y''}\pm\sqrt{y'''})$$

$$x=\frac{1}{2}(-t-\sqrt{(t^2-4s)})=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'}\mp\sqrt{y''}\mp\sqrt{y'''}),$$ presi i segni di sopra se q è positivo. Così per $x^4-20x^2-12x+13=0$, ove $p=-20, q=-12, r=13$, la ridotta sarà $t^6-40t^4+348t^2-144=0$, e fatto $t^2=y=\frac{1}{3}(z+40)$, viene $z^3-1668z-6608=0$, le cui radici $z'=-4, z''=2+6\sqrt{46}, z'''=2-6\sqrt{46}$ danno $\sqrt{y'}=\sqrt{\frac{1}{3}(z'-2p)}=2\sqrt{3}, \sqrt{y''}=\sqrt{\frac{1}{3}(z''-2p)}=$ (171) $\sqrt{(7+\sqrt{3})}+\sqrt{(7-\sqrt{3})}, \sqrt{y'''}=\sqrt{(7+\sqrt{3})}-\sqrt{(7-\sqrt{3})}$; e poichè q è negativo, sarà $x=-\sqrt{3}-\sqrt{(7-\sqrt{3})}, x=-\sqrt{3}+\sqrt{(7-\sqrt{3})}, x=\sqrt{3}-\sqrt{(7+\sqrt{3})}, x=\sqrt{3}+\sqrt{(7+\sqrt{3})}$.

341. Nel modo stesso si risolvon l' equazioni della forma $x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^n+v=0$, fatto $x^n=y$. Del resto, l' equazion generale (336) non avea quì luogo, dando ella solamente un' equazione del quarto grado che si riduce al secondo.

Equazioni risolubili del quinto Grado, del sesto ec.

342. Con un metodo analogo a quello che poco fa spiegammo (339) cerco i divisori o quadratici o cubici o biquadratici d' un' equazione che non ne ha dei semplici: se vi sono, l' equazione è *riducibile*; se no, è *irriducibile*. Tutti i gradi però hanno dell' equazioni che la formula generale (336) risolve completamente.

343. Sia in essa $m=5, =6, =7$ ec.; si troveranno sempre le radici delle seguenti equazioni

$$x^5 - 5x^3\sqrt[5]{ab} + 5x\sqrt[5]{a^2b^2} - a - b = 0$$

$$x^6 - 6x^4\sqrt[6]{ab} + 9x^2\sqrt[6]{a^2b^2} - 2\sqrt[6]{a^3b^3} - a - b = 0$$

$$x^7 - 7x^5\sqrt[7]{ab} + 14x^3\sqrt[7]{a^2b^2} - 7x\sqrt[7]{a^3b^3} - a - b = 0$$

ec. ec. ec.

Esempj. I. Sia $x^5 + 5px^3 + 5p^2x + 2q = 0$; sarà $p = -\sqrt[5]{ab}$, $2q = -a - b$, ed eliminato b, viene $a = -q \pm \sqrt{(q^2 + p^5)}$, $b = -q \mp \sqrt{(q^2 + p^5)}$, ed $x = \sqrt[5]{(-q + \sqrt{(q^2 + p^5)})} + \sqrt[5]{(-q - \sqrt{(q^2 + p^5)})}$. II. Sia $x^6 - 6px^4 + 9p^2x^2 - 2q = 0$; sarà $p = \sqrt[6]{ab}$, $2q = 2\sqrt[6]{a^3b^3} + a + b = 2p^3 + a + b$; onde $a = q - p^3 \pm \sqrt{q(q - 2p^3)}$, $b = q - p^3 \mp \sqrt{q(q - 2p^3)}$, ed $x = \sqrt[6]{(q - p^3 + \sqrt{q(q - 2p^3)})} + \sqrt[6]{(q - p^3 - \sqrt{q(q - 2p^3)})}$. L'altre radici si ottengono come sopra (338).

Altre Equazioni di tutti i Gradi con radici assegnabili.

344. Facendo il prodotto di m equazioni quadratiche e *reciproche* (in cui cioè nulla si cangia posto $\frac{1}{x}$ in luogo di x) come $x^2 + tx + 1 = 0$, $x^2 + ux + 1 = 0$ ec., si ha un'equazione parimente reciproca della forma $x^{2m} + px^{2m-1} + qx^{2m-2} + \ldots + rx^m + \ldots + qx^2 + px + 1 = 0$, che di nuovo moltiplicata per la reciproca di primo grado $x + 1 = 0$, diventa $x^{2m+1} + gx^{2m} + hx^{2m-1} + \ldots + hx^2 + gx + 1 = 0$. Quindi le reciproche di grado impari son divisibili per $x + 1$, con che divengono di grado pari, e di queste si hanno le radici col risolverle nelle componenti quadratiche.

Esempio. Sia $x^6 - 25x^4 + 48x^3 - 25x^2 + 1 = 0$: prese le reciproche $x^2 + tx + 1 = 0$ del secondo grado, e $x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ del quarto, paragono con la data il loro prodotto $x^6 + (p + t)x^5 + (1 + q + pt)x^4 + (2p + qt)x^3 + (1 + q + pt)x^2 + (p + t)x + 1 = 0$, e trovo I $p +$

$t=0$ onde $p=-t$; II $1+q-t^2=-25$; III $qt-2t=48$. Sommo la III con la II moltiplicata per $-t$, e viene $t^3-28t-48=0$, onde (337) $t=-4$, $x=2\pm\sqrt{3}$, $p=4$, $q=-10$ e la reciproca $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$, che trattata come la prima, dà $x=1$, $x=1$, $x=-3\pm2\sqrt{2}$.

Equazioni Irriducibili.

345. Data l'equazione irriducibile (342) $z^n+pz^{n-2}+qz^{n-3}+\ldots+u=0$, cerco il suo limite f (331) e posto $m=f-1$, faccio $z=m+y$, essendo y decimali. La data perciò diventa $y^n+mny^{n-1}+$ ec. $=0$, da cui (non curati y^3, y^4 ec. piccolissimi) ho y e perciò z con due decimali almeno. Lo chiamo m', e faccio di nuovo $z=m'+y$, e trascurato nella sostituzione anche y^2, trovo il valore m'' di z con tre decimali. Così proseguo finchè piace: ma per avere z più prontamente, pongo $z=m''+y$ ed applico alla nuova equazione la serie $y=\frac{x}{a}-\frac{bx^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3-$ ec. (294), con pochi termini della quale viene z con otto o nove decimali.

Esempio. Sia $z^3-4z-2=0$, il cui limite è 3 (331); faccio $z=2+y$, e non curato y^3, trovo $y^2+\frac{4}{3}y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}=0,21$ e $z=2,21=m'$: di nuovo pongo $z=2,21+y$, e non curato y^2, trovo $y=\frac{0,046139}{10,6523}=0,004$, e $z=2,214=m''$. Infine faccio $z=2,214+y$, ed ho $0,003423656=10,70539\,y+6,642\,y^2+y^3$, a cui applicando la serie, viene $x=0,003423656$, $a=10,70539$, $b=6,642$, $c=1$, $d=e=$ ec. $=0$, ed $y=\frac{0,003423656}{10,70539}-\frac{6,642(0,003423656)^2}{(10,70539)^3}+$ ec., il cui calcolo, tornando sempre i numeri stessi, è facilissimo coi logaritmi. Quello del primo termine è $6,5048876=$ L$0,0003198067$, quello del secondo è $2,8024715=$ . . . L$0,0000000635$; e sottratto dal primo il secondo numero, viene $y=0,0003197432$, e $z=2,2143197432$.

346. Quando il terzo termine dell'equazione è con $+$ (327), e i risultati di Ω (331) presi finchè lo indica il compendio (282), conservano il segno stesso, le radici son tut-

te immaginarie (323), e si hanno cercando al solito (339) i fattori di secondo grado che esse producono.

347. La data equazione divisa per $z-2,214$ ec., si abbassa d' un grado, e col metodo stesso si ha una seconda radice ec.

Problemi indeterminati del primo grado.

348. Un problema ove il numero dell' incognite supera quello dell' equazioni, si chiama *indeterminato* (186). Per esempio: si voglian tre numeri x, y, z che faccian 105 ed abbiano una stessa differenza: dunque I. $x+y+z=105$; II. $x-y=y-z$, e preso dalla II. il valor di $x=2y-z$, si avrà nella I. $y=35$, onde $x+35+z=105$ ed $x+z=70$. Ora non potendosi eliminar di quì nè x nè z, fatto per esempio $x=10$, sarà $z=60$ e i tre numeri 10, 35, 60 scioglieranno il problema: e fatto $x=12$, si ha $z=58$, e il problema è sciolto egualmente dai tre numeri 12, 35, 58. Anzi il problema può aver 69 soluzioni in numeri interi e positivi, perchè può supporsi x eguale a tutti i numeri da 1 sino a 69, ma non più là, essendo $70=x+z$. Ha però un' infinità di soluzioni se si fa x rotto o negativo: ma tali valori occorrendo rare volte, cercheremo gli interi.

349. Sia l' equazion generale $a=bx\pm cy$ coi numeri a, b, c, interi e noti. Se b, c abbiano un divisor comune d e sia $b=b'd$, $c=c'd$, verrà $\frac{a}{d}=b'x\pm c'y$, onde l' equazione è irrisolubile se a non è multiplo di d: ma se lo è, fatto $a=a'd$, avremo $a'=b'x\pm c'y$, equazione simile alla data coi numeri b', c' primi tra loro.

350. Supposto perciò che nella data sieno b, c primi tra loro e $b<c$, avremo $x=\frac{a\mp cy}{b}$; onde se $\frac{a}{b}=a'+\frac{a''}{b}$, $\frac{c}{b}=c'+\frac{c''}{b}$, sarà $x=a'\mp c'y+\frac{a''\mp c''y}{b}$, e trascurati gl' interi a', $c'y$, tutto si ridurrà a fare $\frac{a''\mp c''y}{b}=\mathrm{E}$, intendendo per E un *numero intero*.

351. Ora poichè b, c e perciò anche b, c'', son primi tra loro, si ha sempre o a colpo d' occhio o con la data regola (60) un numero $\mathrm{N}^{(m)}$ per cui moltiplicando $\frac{a''\mp c''y}{b}$,

venga $\frac{a''N^{(m)} \mp c'N^{(m)}y}{b}$ che trascurati gl' interi, lasci y col coefficiente 1 e si riduca per esempio a $\frac{k \mp y}{b} = E$, intero diverso dal primo ma sempre espresso per E; allora $y = bE \pm k$ (mutati, se y è negativo, i segni al primo membro, il che non interessa l' intero); e preso per E quel più piccolo intero positivo che renda positiva la quantità $bE \pm k$ (e perciò fatto $E = 0$ se vale il segno di sopra), si avrà il minimo valor di y che posto nella data, determinerà, col segno di sopra o di sotto, il massimo o il minimo valor di x, come è chiaro.

352. Sieno g, h i valori così trovati di x, y: si avrà dunque $a = bx \pm cy$ ed $a = bg \pm ch$; onde $\pm bg \mp bx = cy - ch$, cioè $\frac{\pm g \mp x}{y - h} = \frac{c}{b} = \frac{mc}{mb}$, supposto m un numero intero cominciando da 0; dunque poichè b, c son primi tra loro, verrà $x = g \mp mc$ ed $y = h + mb$, donde tutti i valori possibili di x, y, dati i due primi g, h.

353. Dunque 1°. Se $a = bx \pm cy$ sia col segno di sopra, avremo $x = g - mc$, e per aver x positivo, dovrà essere $mc < g$ e perciò $m < \frac{g}{c}$; onde il numero dei valori di x, y sarà $\frac{g}{c} + 1$ giacchè m comincia da 0: 2°. se sia col segno di sotto, sarà $x = g + mc$ e i valori di x, y saranno infiniti. In ambedue i casi, questi procedono in progressione aritmetica, poichè fatto $m = 0, 1, 2$ ec. sarà $x = g, g \mp c, g \mp 2c$ ec., ed $y = h, h + b, h + 2b$ ec. Ecco degli Esempj.

354. I. Risolvere in numeri interi l' equazione $7 = 6x - 6y$. Poichè 7 non è multiplo di 6, il problema è impossibile (349).

II. Risolvere $5 = 3x - 4y$. Sarà $x = \frac{4y + 5}{3} = E = \frac{y + 2}{3}$ (350) ed $y = 3E - 2$. Fatta $E = 1$ (351), sarà $y = 1$ ed $x = \frac{4y + 5}{3} = 3$, valori minimi (351); dunque poichè $b = 3, c = 4, g = 3, h = 1$, sarà $x = 3, 7, 11$ ec., $y = 1, 4, 7$ ec. (352).

III. Risolvere $2000 = 9x + 13y$. Sarà $x = \frac{2000 - 13y}{9} = E = \frac{2 - 4y}{9}$ (350) $= \frac{(2 - 4y)2}{9}$ (351) $= \frac{4 + y}{9}$ (350) ed $y = 9E -$

4. Fatta $E=1$, sarà $y=5$ valor minimo, $x=\frac{2000-13y}{9}=$ 215 valor massimo (351); dunque poichè $b=9, c=13, g=215, h=5$, sarà $x=215, 202, 189$ ec., $y=5, 14, 23$ ec., e le soluzioni sono $\frac{g}{c}+1=\frac{215}{13}+1=17$ (353).

IV. Un Mercante per saldo di 1200^l offre una stoffa di 7^l il Braccio, un' altra di 5^l; in quanti modi può saldare? Poste y le Br. della prima stoffa, x quelle della seconda, sarà $1200=5x+7y$, onde $x=\frac{1200-7y}{5}=E=\frac{-2y}{5}=\frac{2y}{5}$ (351) $=\frac{6y}{5}=\frac{y}{5}$, $y=5E$. Fatta $E=1$, sarà $y=5$, ed $x=233$; le soluzioni sono $\frac{233}{7}+1=34$.

V. Un Mercante cambiò brillanti in perle, oltre alle quali ebbe 16^l; ogni brillante vale 1872^l e ogni perla 253: quante perle ricevè? Sieno y i brillanti, x le perle, si avrà $1872y=253x+16$, ed $x=\frac{1872y-16}{253}=E=\frac{101y-16}{253}$. Ma quì il numero $N^{(m)}$ che dee moltiplicare il rotto, non vedendosi a colpo d' occhio (351), opero come di faccia, e trovo subito (58) $N'=2$, $N''=3$, $N'''=5$; dunque $E=\frac{(101y-16)5}{253}=\ldots\frac{-y-80}{253}$ (scrivo $-y$ perchè (60) i quozienti sono in numero impari) ed $y=253E-80$ (351). Fatta $E=1$, viene $y=173$ ed $x=1280$, minimi numeri di brillanti e di perle che il Mercante abbia potuti dare e ricevere.

253	
101	. . . $2=p$
51	. . . $1=q$
50	. . . $1=r$
1	

355. Con questo metodo può esprimersi più semplicemente un rotto $\frac{B}{A}=\frac{y}{x}$ quando basta una certa approssimazione, col solo fare $x=\frac{Ay}{B}=\frac{Ay\pm n}{B}=E$, essendo n un intero da aggiungersi o togliersi per aver l' approssimazione richiesta; onde il segno $=$ è quì di *adequazione* piuttosto che d' egualità. Sia $B=129$, $A=281$; dunque $\frac{281y\pm n}{129}=E=\frac{23y\pm n}{129}$, e poichè si trova (58) $N^{v}=28$, verrà $E=\frac{(23y\pm n)28}{129}=$

$=\frac{y\pm 28n}{129}$, onde $y=129E\pm 28n$, ed $x=281E\pm 61n$. Col segno $+$, fatta $E=0, n=1$, sarà $y=28$, $x=61$, e $\frac{129}{281}=\frac{y}{x}=\frac{28}{61}$ incirca: col segno $-$, fatta $E=1, n=1$, sarà $y=101, x=220$, e $\frac{129}{281}=\frac{101}{220}$ incirca, e questi rotti son sì vicini al dato, che niun altro vi si accosta tanto con sì piccoli numeri, come può vedersi facendo $x=g\mp mc$, $y=h+mb$ (352). Si noti però che se la determinazione dell' arbitraria n renda $28n>129$ (come se si facesse $n=5$), o dovranno togliersi gl' interi dall' equazione $E=\frac{y\mp 28n}{129}$ prima di cavarne il valor di y, o dovrà prendersi E positiva e negativa nell' equazione $y=129E\pm 28n$.

129
23 . . . 5 = p
14 . . . 1 = q
9 . . . 1 = r
5 . . . 1 = s
4 . . . 1 = t
1

356. Trovare un numero x che diviso per i numeri noti a, b, c ec. dia per resto altri numeri noti m, n, p ec. Dunque I. $\frac{x}{a}=E+\frac{m}{a}$, II. $\frac{x}{b}=E'+\frac{n}{b}$, III. $\frac{x}{c}=E''+\frac{p}{c}$ ec., e la I. dà IV. $x=aE+m$, valore che posto nella II. dà un equazione tra E ed E'; onde trovata E da questa come si trovò y (351), viene dalla IV. un nuovo valor di x in E', che posto nella III. da un' equazione tra E' ed E''; trovata dunque E' da questa (351), si ha dalla IV. un nuovo valor di x in E'' ec. Preso in fine per E'' un intero, si hanno i valori che soddisfanno al problema.

Esempio. Un avaro ha molti sacchetti di 1200[l] l' uno. Contandogli a 3 a 3, non vi è avanzo; a 7 a 7, ne avanza 1; a 10 a 10, ne avanzan 6: i sacchetti eran più di 100 ma men di 300 e se ne cerca il numero. Sia x: si avrà I. $\frac{x}{3}=E$, II. $\frac{x-1}{7}=E'$, III. $\frac{x-6}{10}=E''$, e perciò IV. $x=3E$, valore che cangia la II. in $\frac{3E-1}{7}=E'=\frac{(3E-1)5}{7}=\frac{E-5}{7}$, onde $E=7E'+5$, e la IV. diventa $x=21E'+15$, valore che cangia la III. in $\frac{21E'+9}{10}=E''$, onde $E'=10E''-9$, e la IV. diventa $x=210E''-174$. Presa $E''=1$, si ha $x=36$, minimo dei numeri che divisi per 3, per 7 e per 10 danno i resti 0, 1, 6: se $E''=2, 3$, sarà $x=246, 456$; dunque

i sacchetti

I sacchetti sono 246.

357. Con questo metodo si sciolgon molti problemi relativi al Calendario. Vogliasi l' anno dell' Era Cristiana in cui si ebbe 17 di Ciclo Solare, 6 di Ciclo Lunare, e 5 d'Indizione. E' noto che il Ciclo Solare è un periodo di 28 anni, il Lunare o Numero Aureo di 19, e l' Indizione di 15. Perciò chiamato x l' anno cercato, sarà I. $\frac{x-17}{28}=E$, II. $\frac{x-6}{19}=E'$, III. $\frac{x-5}{15}=E''$, onde IV. $x=28E+17$, valore che riduce la II. a $\frac{28E+11}{19}=E'=\frac{9E+11}{19}=\frac{(9E+11)2}{19}=\frac{-E+3}{19}$, e mutati i segni (351), $E=19E'+3$, ed $x=532E'+101$, valore che riduce la III. a $\frac{532E'+96}{15}=E''=\frac{7E'+6}{15}=\ldots$ $\frac{14E'+12}{15}=\frac{-E'+12}{15}$, e mutati i segni, $E'=15E''+12$, ed $x=7980E''+6485$. Se $E''=0$, 1 ec., si avrà $x=6485$, 14465 ec.: ma poichè quest' anni appartengono al Periodo Giuliano, il cui principio precede di 4713 anni quello dell' Era Cristiana, bisogna sottrarre 4713 da queste epoche differenti per ridurle ad anni della nostra Era che soddisfacciano alle tre condizioni del problema. Fatta la sottrazione da 6485, si ha 1772: sicchè dal principio del Mondo, come è fissato dall' ordinaria Cronologia, il solo anno 1772 della nostra Era ha 17 di Ciclo Solare, 6 di Lunare e 5 d' Indizione. Sottraendo del pari 4713 da 14465, si ha 9752 che nell' Era nostra soddisfà alle stesse condizioni ec. Questo Periodo Giuliano, prodotto di $28\times19\times15$, è preferibile al Dionisiano che essendo il prodotto di 28×19, abbraccia pochi avvenimenti e comincia 75 anni dopo Cristo.

Problemi indeterminati degli altri gradi.

Data l' equazion generale $y=\sqrt[m]{\left(\frac{b+cx+dx^2+ec.}{p+gx+ec.}\right)}$, *trovar per* y 1°. *dei valori razionali:* 2°. *dei valori interi:* 3°. *tutti i possibili valori interi.* Ecco il problema che comprende la completa dottrina degli indeterminati eccedenti il primo grado; niun Matematico lo ha sciolto finora interamente, e quella stessa porzione che se ne è risoluta, non può quì tutta inserirsi: ma almeno toglieremo a questi pro-

blemi una certa aria di mistero con cui soglion trattarsi dagli Analisti.

Sia primieramente $m=1$; sarà $y=\frac{b+cx+dx^2+\text{ec.}}{p+gx+hx^2+\text{ec.}}$, ove y non supera il primo grado, mentre x ascende ad una potenza qualunque. Dato un valore ad x, si avrà sempre y; ma come averlo in numeri interi e positivi? Eccone le regole.

358. Sia $y=\frac{cx+b}{gx+p}$; fatta la divisione attuale finchè si elimini x dal dividendo, se è possibile, si ha $gy=c+\frac{bg-cp}{gx+p}$, e però $(gy-c)(gx+p)=bg-cp$: dunque i numeri $gy-c, gx+p$ debbono esser due fattori del numero $bg-cp$. Chiamato m uno di essi, n l'altro (l'uno e l'altro col segno $\pm$ se $bg-cp$ sia positivo; e l'uno con $\pm$, l'altro con $\mp$ se sia negativo) sarà $gy-c=m$, $gx+p=n$, onde $y=\frac{m+c}{g}$, $x=\frac{n-p}{g}$; cioè per aver y intero, dovranno prendersi quei fattori m che uniti a c son divisibili per g, e i loro corrispondenti n daranno necessariamente intero anche x.

Esempio. Sono in un Albergo degli uomini e delle donne, e tanto quelli che queste spendono 24^{l}; ma ogni uomo spende 1^{l} più d'ogni donna. Cerco il numero degli uni e dell'altre. Sieno x gli uomini, y le donne: si troverà $y=\frac{24x}{24-x}$, e però $c=24, b=0, g=-1, p=24, bg-cp=-576$, i cui fattori (l'uno con $\pm$, l'altro con $\mp$) sono

$$m=\pm 576 \pm 288 \pm 192 \pm 144 \pm 96 \pm 72 \pm 64 \pm 48$$
$$n=\mp 1 \mp 2 \mp 3 \mp 4 \mp 6 \mp 8 \mp 9 \mp 12$$
$$m=\pm 36 \pm 32 \pm 24$$
$$n=\mp 16 \mp 18 \mp 24$$

e poichè $y=\frac{m+c}{g}=-m-24$, $x=\frac{n-p}{g}=24-n$, per aver y positivo, converrà prender per m i soli fattori negativi non minori di 25, e perciò i soli corrispondenti positivi per n; onde le soluzioni saranno 10 cioè

$$y=552, 264, 168, 120, 72, 48, 40,$$
$$x=23, 22, 21, 20, 18, 16, 15,$$
$$y=24, 12, 8$$
$$x=12, 8, 6$$

359. Sia $y=\frac{dx^2+cx+b}{gx+p}$; verrà $(g^2y-dgx-cg+dp)(gx+p)=bg^2+dp^2-cgp$. Fatto $g^2y-dgx-cg+dp=m$, $gx+p=n$, sarà $x=\frac{n-p}{g}$, $y=\frac{m+dn+cg-2dp}{g^2}$, cioè per avere x intero dovranno prendersi quei fattori n di bg^2+dp^2-cgp che diminuiti di p son divisibili per g; il resto si fa come sopra: e col metodo stesso si risolvono gli altri casi assai rari dell'equazion generale $y=$ ec.

360. Ma sia $y=\frac{x^2-b}{p}$ d'onde x non può eliminarsi: 1°. se $b=g^2\pm mp$, fatto $x=np\pm g$, verrà $y=n^2p\pm 2ng\mp m$, ove g o m possono anche essere zero: 2°. qualunque sia b, si cercherà un numero p' tale che $p'p+b$ sia quadrato (21), presi per p' i numeri minori di $\frac{1}{4}p+1$ positivi o negativi, tra i quali dovrà trovarsi se pure esista (36.14°.): e dedotto di quì x (per esempio $x=f$), sarà anche $x=f\pm mp$ (36.13°.). Si noti però che se p sia numero primo (fuorchè 2), e b non multiplo di p e non quadrato, non sarà $x^2\pm b$ un multiplo di p se non lo sia $(\mp b)^{\frac{p-1}{2}}-1$: poichè se $x^2\pm b$ è multiplo di p, si avrà (36.9°.) $x^2=\mp b$, $x=(\mp b)^{\frac{1}{2}}$ ed $x^{p-1}-1=(\mp b)^{\frac{p-1}{2}}-1$: ora il primo membro è multiplo di p (36.12°.).

Problemi indeterminati del secondo grado.

Sia in secondo luogo $m=2$: sarà $y=\sqrt{\left(\frac{b+cx+dx^2\text{ec.}}{p+gx+hx^2\text{ec.}}\right)}$, e perchè y sia razionale dovrà trovarsi per x un tal numero che dia $\frac{b+cx\text{ ec.}}{p+gx\text{ ec.}}=Q$, intendendo per Q un *numero quadrato*. Or se il primo membro potrà cangiarsi in $x\pm d$, che resti un quadrato, diverso certamente dal primo, ma sempre indicato per Q, si avrà $x\pm d=Q$ ed $x=Q\mp d$; onde preso per Q un quadrato qualunque intero o rotto (cioè fatto $Q=\frac{A^2}{a^2}$ essendo A, a due numeri arbitrarj, interi e primi tra loro), si otterrà y razionale: anzi se possa giungersi almeno a quest' altra equazione $x=\sqrt{(Q\mp d)}$, e si sappia ren-

der razionale la formula $\sqrt{(Q \mp d)}$, anche in tal caso sarà y razionale. Con tre principj si ridurrà l' equazione a questi due casi.

361. 1°. *Una potenza indeterminata* P^m *può eguagliarsi ad un' altra o data* c^m *o indeterminata* x^m; poichè essendo P arbitrario, può farsi $P = c$, $P = x$, onde $P^m = c^m$, $P^m = x^m$: 2°. *Una potenza* a^m *moltiplicata o divisa per un' altra* b^m, *ne dà sempre una del grado* m; infatti supposto $a \times b = c$ ovvero $a : b = d$, sarà $a^m \times b^m = c^m$, $a^m : b^m = d^m$: 3°. *La formula* $\sqrt{(Q \mp d)}$ *si rende sempre razionale sol che si faccia* $Q = \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \pm \frac{d}{2\sqrt{Q}}\right)^2$ (153), e perciò $\sqrt{(Q \mp d)} = \ldots$ $\frac{A^2 \mp a^2 d}{2Aa}$ ove d è un numero dato o da prendersi comunque.

362. Di quì si ha che *se* bc *sia un quadrato*, *lo sarà anche* $\frac{c}{b}$. Infatti da $bc = Q$ viene (361. 2°.) $\frac{bc}{b^2} = Q = \frac{c}{b}$. Onde *se* Q *è un multiplo d' un numero non quadrato* b, *lo è anche la sua radice*: poichè da $Q = bc$ si ha $\frac{Q}{b^2} = \frac{c}{b} = Q'$ e $\sqrt{Q} = b\sqrt{Q'}$.

363. Ma si applichino quei principj al seguente problema: i miei scudi son tanti che aggiunto ad essi o tolto 1, fanno un quadrato: quanti sono? Sieno x; e si avrà $x + 1 = y^2$, $x - 1 = z^2$. Parrà che x possa trovarsi in più modi: 1°. sommando le due equazioni, il che dà $x = \frac{y^2 + z^2}{2}$; 2°. moltiplicandole, il che dà $x^2 - 1 = y^2 z^2 = Q$ (361. 2°.) $x^2 = Q + 1$, ed $x = \frac{A^2 + a^2}{2Aa}$ (361. 3°.); 3°. dividendole, il che dà $\frac{x+1}{x-1} = \frac{y^2}{z^2} = Q$ (361. 2°.), ed $x = \frac{Q+1}{Q-1}$. Ma la relazione indeterminata dei due quadrati y^2, z^2, o non dà i valori di x o gli dà uniti coi falsi. Convien dunque determinare y^2, z^2 sottraendo l' equazioni, il che darà $2 = y^2 - z^2$ onde $z^2 + 2 = y^2 = Q$, e perciò $z^2 = Q - 2$, $z = \frac{A^2 - 2a^2}{2Aa}$ (361. 3°.), e quindi $x = z^2 + 1 = \frac{A^2}{4a^2} + \frac{a^2}{A^2}$.

364. Posto ciò, abbiasi 1°. $y = \sqrt{cx}$; dunque $cx = Q$ ed $x = \frac{Q}{c} = \frac{A^2}{a^2 c}$; fatto $Q = m^2 c^2$, si ha x intero: 2°. $y = \sqrt{(b +$

$bx)$, $b+cx=Q$ ed $x=\frac{Q-b}{c}=\frac{A^2-a^2b}{a^2c}$; x intero si ha nei casi di sopra (360): 3°. $y=\sqrt{(cx+lx^2)}$, $cx+lx^2= Q=\frac{cx+lx^2}{x^2}$ (361 . 2°.) $=\frac{c}{x}+l$, ed $x=\frac{c}{Q-l}=\frac{a^2c}{A^2-a^2l}$; risoluta l'equazione $A^2-a^2l=1$, come s'insegnerà, viene x intero.

365. Sia anche $y=\sqrt{lx^2}$, onde $lx^2=Q$ ed $\frac{x}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{\sqrt{l}}$; quindi se si sviluppi $\sqrt{l}$ (61), e trovati i quozienti p, p', p'' ec., si formino le consuete equazioni $M=0, N=1$ ec. (58), e si prenda per x una delle varie M e per $\sqrt{Q}$ la corrispondente N, si avrà per $Q-lx^2=0$ un' approssimazione in valori or positivi or negativi (60), che sono anche periodici (61). Ecco questi valori calcolati fino al ritorno di 1, nella seconda colonna della seguente *Tavola per tutti i numeri* $\sqrt{l}$ *non quadrati fino a* 101; sottinteso alternativamente a ciascun valore il segno + e —: la prima colonna poi mostra i quozienti p', p'' ec. (poichè p è in principio) per formar l'equazioni $M=0$, $N=1$, $M'=1$, $N'=p$ ec.. Di quì risulta che se in $Q-lx^2=k$ sia k tra quei valori o vi si possa ridurre, le M, N corrispondenti a k daranno per $x, \sqrt{Q}$ dei valori esatti.

$\sqrt{l}$	p	quozienti	valori
$\sqrt{2}$	$p=1$	2, 2	1, 1
$\sqrt{3}$	$p=1$	1, 2, 1	1, 2, 1
$\sqrt{5}$	$p=2$	4, 4	1, 1
$\sqrt{6}$	$p=2$	2, 4, 2	1, 2, 1
$\sqrt{7}$	$p=2$	1, 1, 1, 4, 1	1, 3, 2, 3, 1
$\sqrt{8}$	$p=2$	1, 4, 1	1, 4, 1
$\sqrt{10}$	$p=3$	6, 6	1, 1
$\sqrt{11}$	$p=3$	3, 6, 3	1, 2, 1
$\sqrt{12}$	$p=3$	2, 6, 2	1, 3, 1
$\sqrt{13}$	$p=3$	1, 1, 1, 1, 6, 1	1, 4, 3, 3, 4, 1
$\sqrt{14}$	$p=3$	1, 2, 1, 6, 1	1, 5, 2, 5, 1
$\sqrt{15}$	$p=3$	1, 6, 1	1, 6, 1
$\sqrt{17}$	$p=4$	8, 8	1, 1
$\sqrt{18}$	$p=4$	4, 8, 4	1, 2, 1
$\sqrt{19}$	$p=4$	2, 1, 3, 1, 2, 8, 2	1, 3, 5, 2, 5, 3, 1
$\sqrt{20}$	$p=4$	2, 8, 2	1, 4, 1
$\sqrt{21}$	$p=4$	1, 1, 2, 1, 1, 8, 1	1, 5, 4, 3, 4, 5, 1
$\sqrt{22}$	$p=4$	1, 2, 4, 2, 1, 8, 1	1, 6, 3, 2, 3, 6, 1
$\sqrt{23}$	$p=4$	1, 3, 1, 8, 1	1, 7, 2, 7, 1
$\sqrt{24}$	$p=4$	1, 8, 1	1, 8, 1
$\sqrt{26}$	$p=5$	10, 10	1, 1
$\sqrt{27}$	$p=5$	5, 10, 5	1, 2, 1
$\sqrt{28}$	$p=5$	3, 2, 3, 10, 3	1, 3, 4, 3, 1
$\sqrt{29}$	$p=5$	2, 1, 1, 2, 10, 2	1, 4, 5, 5, 4, 1
$\sqrt{30}$	$p=5$	2, 10, 2	1, 5, 1
$\sqrt{31}$	$p=5$	1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1	1, 6, 5, 3, [illegible], [illegible], 5, 6, 1
$\sqrt{32}$	$p=5$	1, 1, 1, 10, 1	1, 7, 4, 7, 1
$\sqrt{33}$	$p=5$	1, 2, 1, 10, 1	1, 8, 3, 8, 1
$\sqrt{34}$	$p=5$	1, 4, 1, 10, 1	1, 9, 2, 9, 1
$\sqrt{35}$	$p=5$	1, 10, 1	1, 10, 1
$\sqrt{37}$	$p=6$	12, 12	1, 1
$\sqrt{38}$	$p=6$	6, 12, 6	1, 2, 1
$\sqrt{39}$	$p=6$	4, 12, 4	1, 3, 1
$\sqrt{40}$	$p=6$	3, 12, 3	1, 4, 1
$\sqrt{41}$	$p=6$	2, 2, 12, 2	1, 5, 5, 1
$\sqrt{42}$	$p=6$	2, 12, 2	1, 6, 1
$\sqrt{43}$	$p=6$	1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, 1	1, 7, 6, 3, 9, 2, 9, 3, 6, 7, 1

$\sqrt{44}$
$p = 6$
1 | 1
1 | 8
1 | 5
2 | 7
1 | 4
1 | 7
1 | 5
12 | 8
1 | 1

$\sqrt{45}$
$p = 6$
1 | 1
2 | 9
2 | 4
2 | 5
1 | 4
12 | 9
1 | 1

$\sqrt{46}$
$p = 6$
1 | 1
3 | 10
1 | 3
1 | 7
2 | 6
6 | 5
2 | 2
1 | 5
1 | 6
3 | 7
1 | 3
12 | 10
1 | 1

$\sqrt{47}$
$p = 6$
1 | 1
5 | 11
1 | 2
12 | 11
1 | 1

$\sqrt{48}$
$p = 6$
1 | 1
12 | 12
1 | 1

$\sqrt{50}$
$p = 7$
14 | 1
14 | 1

$\sqrt{51}$
$p = 7$
7 | 1
14 | 2
7 | 1

$\sqrt{52}$
$p = 7$
4 | 1
1 | 3
2 | 9
1 | 4
4 | 9
14 | 3
4 | 1

$\sqrt{53}$
$p = 7$
3 | 1
1 | 4
1 | 7
3 | 7
14 | 4
3 | 1

$\sqrt{54}$
$p = 7$
2 | 1
1 | 5
6 | 9
1 | 2
2 | 9
14 | 5
2 | 1

$\sqrt{55}$
$p = 7$
2 | 1
2 | 6
2 | 5
14 | 6
2 | 1

$\sqrt{56}$
$p = 7$
2 | 1
14 | 7
2 | 1

$\sqrt{57}$
$p = 7$
1 | 1
1 | 8
4 | 7
1 | 3
1 | 7
14 | 8
1 | 1

$\sqrt{58}$
$p = 7$
1 | 1
1 | 9
1 | 6
1 | 7
1 | 7
1 | 6
14 | 9
1 | 1

$\sqrt{59}$
$p = 7$
1 | 1
2 | 10
7 | 5
2 | 2
1 | 5
14 | 10
1 | 1

$\sqrt{60}$
$p = 7$
1 | 1
2 | 11
1 | 4
14 | 11
1 | 1

$\sqrt{61}$
$p = 7$
1 | 1
4 | 12
3 | 3
1 | 4
2 | 9
2 | 5
1 | 5
3 | 9
4 | 4
1 | 3
14 | 12
1 | 1

$\sqrt{62}$
$p = 7$
1 | 1
6 | 13
1 | 2
14 | 13
1 | 1

$\sqrt{63}$
$p = 7$
1 | 1
14 | 14
1 | 1

$\sqrt{65}$
$p = 8$
16 | 1
16 | 1

$\sqrt{66}$
$p = 8$
8 | 1
16 | 2
8 | 1

$\sqrt{67}$
$p = 8$
5 | 1
2 | 3
1 | 6
1 | 7
7 | 9
1 | 2
1 | 9
2 | 7
5 | 6
16 | 3
5 | 1

$\sqrt{68}$
$p = 8$
4 | 1
16 | 4
4 | 1

$\sqrt{69}$
$p = 8$
3 | 1
3 | 5
1 | 4
4 | 11
1 | 3
3 | 11
3 | 4
16 | 5
3 | 1

$\sqrt{70}$
$p = 8$
2 | 1
1 | 6
2 | 9
1 | 5
2 | 9
16 | 6
2 | 1

$\sqrt{71}$
$p = 8$
2 | 1
2 | 7
1 | 5
7 | 11
1 | 2
2 | 11
2 | 5
16 | 7
2 | 1

$\sqrt{72}$
$p = 8$
2 | 1
16 | 8
2 | 1

$\sqrt{73}$
$p = 8$
1 | 1
1 | 9
5 | 8
5 | 3
1 | 3
1 | 8
16 | 9
1 | 1

$\sqrt{74}$
$p = 8$
1 | 1
1 | 10
1 | 7
1 | 7
16 | 10
1 | 1

$\sqrt{75}$
$p = 8$
1 | 1
1 | 11
1 | 6
16 | 11
1 | 1

$\sqrt{76}$
$p = 8$
1 | 1
2 | 12
1 | 5
1 | 8
5 | 9
4 | 3
5 | 4
1 | 3
1 | 9
2 | 8
1 | 5
16 | 12
1 | 1

$\sqrt{77}$
$p = 8$
1 | 1
3 | 13
2 | 4
3 | 7
1 | 4
16 | 13
1 | 1

$\sqrt{78}$
$p = 8$
1 | 1
4 | 14
1 | 3
16 | 14
1 | 1

$\sqrt{79}$
$p = 8$
1 | 1
7 | 15
1 | 2
16 | 15
1 | 1

$\sqrt{80}$
$p = 8$
1 | 1
16 | 16
1 | 1

$\sqrt{82}$
$p = 9$
18 | 1
18 | 1

$\sqrt{83}$
$p = 9$
9 | 1
18 | 2
9 | 1

$\sqrt{84}$
$p = 9$
6 | 1
18 | 3
6 | 1

$\sqrt{85}$
$p = 9$
4 | 1
1 | 4
1 | 9
4 | 9
18 | 4
4 | 1

$\sqrt{86}$
$p = 9$
3 | 1
1 | 5
1 | 10
1 | 7
8 | 11
1 | 2
1 | 11
1 | 7
3 | 10
18 | 5
3 | 1

$\sqrt{87}$
$p = 9$
3 | 1
18 | 6
3 | 1

$\sqrt{88}$
$p = 9$
2 | 1
1 | 7
1 | 9
1 | 8
2 | 9
18 | 7
2 | 1

$\sqrt{89}$
$p = 9$
2 | 1
3 | 8
3 | 5
2 | 5
18 | 8
2 | 1

$\sqrt{90}$
$p = 9$
2 | 1
18 | 9
2 | 1

$\sqrt{91}$
$p = 9$
1 | 1
1 | 10
5 | 9
1 | 3
5 | 14
1 | 3
1 | 9
18 | 10
1 | 1

$\sqrt{92}$
$p = 9$
1 | 1
1 | 11
2 | 8
4 | 7
2 | 4
1 | 7
1 | 8
18 | 11
1 | 1

$\sqrt{93}$
$p = 9$
1 | 1
1 | 12
1 | 7
4 | 11
6 | 4
4 | 3
1 | 4
1 | 11
1 | 7
18 | 12
1 | 1

$\sqrt{94}$
$p = 9$
1 | 1
2 | 13
3 | 6
1 | 5
1 | 9
5 | 10
1 | 3
8 | 15
1 | 2
5 | 15
1 | 3
1 | 10
3 | 9
2 | 5
1 | 6
18 | 13
1 | 1

$\sqrt{95}$
$p = 9$
1 | 1
2 | 14
1 | 5
18 | 14
1 | 1

$\sqrt{96}$
$p = 9$
1 | 1
3 | 15
1 | 4
18 | 15
1 | 1

$\sqrt{97}$
$p = 9$
1 | 1
5 | 16
1 | 3
1 | 11
1 | 8
1 | 9
1 | 9
1 | 8
5 | 11
1 | 3
18 | 16
1 | 1

$\sqrt{98}$
$p = 9$
1 | 1
8 | 17
1 | 2
18 | 17
1 | 1

$\sqrt{99}$
$p = 9$
1 | 1
18 | 18
1 | 1

$\sqrt{101}$
$p = 10$
20 | 1

Così se sia		$M = 0$	$N = 1$	$Q - 13x^2 = +1$
$l = 13$, si avran-	$p = 3$	$M' = 1$	$N' = 3$	-4
no dalla Tavola	$p' = 1$	$M'' = 1$	$N'' = 4$	$+3$
le quattro serie	$p'' = 1$	$M''' = 2$	$N''' = 7$	-3
d' equazioni po-	$p''' = 1$	$M^{IV} = 3$	$N^{IV} = 11$	$+4$
ste quì di faccia.	$p^{IV} = 1$	$M^{V} = 5$	$N^{V} = 18$	-1

366. Abbiasi ora $x = \sqrt{(h + cy + fy^2)}$; dunque $h + cy + fy^2 = Q$, e 1°. se $h + c + f = m^2$, sarà $m^2 + cy + fy^2 = Q + f + c$; fatto $Q = m^2$ (361 . 1°.) si ha $y = 1, = -\frac{c}{f} - 1$: 2°. se cangiato segno a c, sia $h - c + f = m^2$, si avrà $m^2 + cy + fy^2 = Q + f - c$; fatto $Q = m^2$, viene $y = -1, = 1 - \frac{c}{f}$.

367. Ma in generale, poichè $x = \sqrt{(h + cy + fy^2)}$ si riduce a $2fy + c = \sqrt{(c^2 + 4fx^2 - 4fh)}$, prendo $k = c^2 - 4fh$, $l = 4f$ ed ho $k + lx^2 = Q$: or da $2fy + c = \pm\sqrt{Q}$ si ha $y = \frac{\pm\sqrt{Q} - c}{2f}$, intero, se $\sqrt{Q} - c$ sia multiplo di $2f$,

368. Dunque 1°. se si presenti per x un valor che soddisfaccia all' equazione $k + lx^2 = Q$, il problema sarà risoluto, e un valor di x ne dà per lo più molti altri, come vedremo: 2°. se $k + l = g^2$, sarà $g^2 + lx^2 = Q + l$; e $Q = g^2$ dà $x = 1$: 3°. se $k = m^2$, sarà $\frac{m^2}{x^2} = Q - l$, ed $x = \ldots\ldots$ $\frac{2Aam}{\pm A^2 \mp a^2 l}$: ed $A^2 - a^2 l$ o 1, o 2, o summultiplo di m, da x intero: 4°. se $l = m^2$, sarà $m^2 x^2 = Q - k$ ed $x = \frac{\pm A^2 \mp a^2 k}{2Aam}$; fatto $a = 1$, viene $2Amx = A^2 - k$, cioè $A^2 - 2Amx = A(A - 2mx) = k = gf$ (g, f son due fattori interi di k, ambedue con $\pm$ se k è positivo, e l' uno con $\pm$, l' altro con $\mp$, se è negativo). Posto $A = g$, $A - 2mx = g - 2mx = f$, sarà $\frac{g - f}{2m} = x$, intero, ove la differenza dei fattori sia multipla di $2m$: 5°. se con $\pm k \mp lx^2 = Q$ si abbia $kl = g^2$, verrà $x^2 = \frac{k \mp Q}{l} = kl \mp lQ$ (361 . 2°.) $= g^2 \mp lQ$, onde (163 . 3°.) $\sqrt{Q} = \frac{2Aag}{\pm A^2 + a^2 l}$, ed $x = \frac{\sqrt{(kl \mp lQ)}}{l} = \frac{g(A^2 \mp a^2 l)}{l(A^2 \pm a^2 l)}$: 6°. se con $k \pm lx^2 = Q$ si ab-

sia $k = h^2 \mp lg^2$, fatto $Q = h^2$, viene $x = g$: 7°. se $k = m^2 + n^2$ ed $l = -f^2$, o $l = m^2 + n^2$ e $k = -f^2$, sarà nel primo caso $m^2 + n^2 - f^2 x^2 = Q$; e $Q = m^2, = n^2$ dà $x = \frac{n}{f}, = \frac{m}{f}$; nel secondo, $-f^2 + (m^2 + n^2)x^2 = Q$; e $Q = m^2 x^2, = n^2 x^2$ dà $x = \frac{f}{n}, = \frac{f}{m}$: 8°. se $k + lx^2$ possa sciogliersi in due fattori razionali, onde $k + lx^2 = (gx + f)(ix + h) = Q = \frac{(gx + f)(ix + h)}{(ix + h)^2} = \frac{gx + f}{ix + h}$, verrà $x = \frac{a^2 f - A^2 h}{A^2 i - a^2 g}$; 9°. se $k + lx^2$ contenga un quadrato $(rx + s)^2$ e due fattori razionali $(gx + f)(ix + h)$, fatto $(rx + s)^2 = Q$, sarà $x = -\frac{f}{g}, = \frac{-h}{i}$.

369. Infine se l sia negativa, come $k - ly^2 = z^2$, bisognerà che sia $ly^2 < k$ ovvero $y < \sqrt{\frac{k}{l}}$: si vedrà dunque se tra i numeri minori di $\sqrt{\frac{k}{l}}$ se ne trovi alcuno che soddisfaccia. Oppure divido l' equazione per y^2, la moltiplico per k, e fatto $\frac{z}{y} = x$, $\frac{k}{y} = \sqrt{Q}$, si ha $kl + kx^2 = Q$, che si scioglie col seguente

370. Metodo Generale per aver x intero o rotto (se sia possibile) nell' equazione $k + lx^2 = Q$, ove gl' interi k, l non son quadrati, k non è multiplo di quadrato, ed l è positiva. Osservo che in queste ipotesi x sarà primo a $\sqrt{Q}$ e a k; poichè se fosse $x = ax'$, $\sqrt{Q} = a\sqrt{Q'}$, verrebbe $\frac{k}{a^2} + lx'^2 = Q'$, onde volendo interi, dovrebbe k esser multiplo di a^2 contro l' ipotesi: che se fosse $k = ak', x = ax'$, verrebbe $k' + alx'^2 = \frac{Q}{a}$, onde volendo interi, dovrebbe Q esser multiplo di a; e giacchè a per ipotesi non è quadrato, dovrebbe anche $\sqrt{Q}$ esser multipla di a (362), cioè $\sqrt{Q} = a\sqrt{Q'}$, che si è trovato impossibile. Perciò se k sia multiplo d' uno o più quadrati, come in $k = a^2 g, k = a^2 b^2 f$ ec., dovranno esaminarsi oltre l' equazione $k + lx^2 = Q$ anche $g + ly^2 = Q$, $f + lz^2 = Q$ ec., moltiplicando poi per a i trovati valori di $y, \sqrt{Q}$, e per b quelli di $z, \sqrt{Q}$.

371. Osservo

371. Osservo ancora che $\frac{Q-lx^2}{k}=1$ esige che il primo membro sia un intero: essendo pertanto x primo a $\sqrt{Q}$ e a k (370), farò $\pm\sqrt{Q}=nx-kx'$ (n ed x' sono indeterminate), e riguardando $x, k, \sqrt{Q}$ come note, si sa (351) che quest' equazione può sempre risolversi in numeri interi. Verrà dunque $\frac{Q-lx^2}{k}=\frac{(nx-kx')^2-lx^2}{k}=$ . . . . $\frac{(n^2-l)x^2-2knxx'+k^2x'^2}{k}$, numero intero se lo sia . . . $\frac{n^2-l}{k}$ (360). Ciò premesso:

372. 1°. Calcolo i valori di $Q-lx^2$ (365), e se tra questi sia k col suo segno, il problema è sciolto, presi per $\sqrt{Q}$, x i valori di N, M corrispondenti a k: ma se k, benchè minore del valor massimo di $Q-lx^2$, non vi è, il problema è impossibile: 2°. se k è maggiore del massimo valor di $Q-lx^2$, cercati tutti i numeri $k'<\frac{k}{4}+1$ (360) tali che sia $kk'+l=n^2$ (se non ne trovo, il problema è parimente impossibile (371)), pongo $\pm\sqrt{Q}=nx-kx'$, e sostituito nella data questo valore e quello di $n^2-l=kk'$, ottengo $1=k'x^2-2nxx'+kx'^2$: 3°. moltiplico questa per k', e fatto $\sqrt{Q'}=k'x-nx'$, trovo $k'+lx'^2=Q'$, simile alla data, e che tratto precisamente come quella, finchè k', k'' ec. sia tra i valori di $Q-lx^2$. Ecco di faccia l' equazioni necessarie all'intento, delle quali si vede la legge.

$$\begin{array}{rl}
 & k+lx^2=Q \\ \hline
 & kk'+l=n^2 \\
 & \pm\sqrt{Q}=nx-kx' \\
\text{I.} & \pm\sqrt{Q'}=k'x-nx' \\
 & k'+lx'^2=Q' \\ \hline
 & kk''+l=n'^2 \\
\text{II.} & \pm\sqrt{Q'}=n'x'-k'x'' \\
\text{III.} & \pm\sqrt{Q''}=k''x'-n'x'' \\
 & k''+lx''^2=Q'' \\ \hline
 & \text{ec.} \quad \text{ec.}
\end{array}$$

373. Esempio Sia $101+13x^2=Q$, ove $k=101$, $l=13$. Calcolo $Q-13x^2$ (365) dei cui valori è più grande $k=101$. Cerco $k'<\frac{101}{4}+1$ tale che sia $101k'+13=n^2$, e trovato $k'=12$, onde $n=35$, pongo I. $\pm\sqrt{Q'}=k'x-nx'=12x-35x'$, d' onde l' equazione $12+13x'^2=Q'$, simile alla data, ove $k'=12$ supera sempre i valori di $Q-13x^2$. Cerco dunque $k''<\frac{k'}{4}+1$ per aver $12k''+13=n'^2$, e trovo

$k''=-1,1,3$, onde $n'=1,5,7$, ed osservo pure che $12=2^2.3$, onde debbo esaminare anche l'equazione $3+13x'^2=Q'$. Il primo valor di $k''=-1$ dà II. $\pm\sqrt{Q'}=n'x'-k'x''=x'-12x''$, e quindi III. $\pm\sqrt{Q''}=k''x'-n'x''=-x'-x''$, d'onde l'equazione $k''+lx''^2=-1+13x''^2=Q''$, simile alla data, ove $k''=-1$ essendo tra i valori di $Q-13x^2$, dal suo corrispondente in M^v,N^v ricavo $x''=5$, $\pm\sqrt{Q''}=18$: da questi che pongo nella III., ho $x'=13$, -23; onde la II. dà $\pm\sqrt{Q'}=-47$, -83, e quindi dalla I. ottengo $x=34$, -74, ambedue interi. Gli altri valori di k'' e l'equazione $3+13x'^2=Q'$, danno per x dei rotti.

Del resto, senza tornare indietro per l'equazioni III, II, I, si hanno i valori di x dalle seguenti

per una equazione $x=\dfrac{nx'\pm\sqrt{Q'}}{k'}$

per tre $x=\dfrac{(n+n')(n'x''\pm\sqrt{Q''})}{k'k''}-x''$

per cinque $x=\dfrac{[(n+n')(n'+n'')-k'k''][n''x'''\pm\sqrt{Q'''}]}{k'k''k'''}-\ldots\dfrac{(n+n')x'''}{k'}$

per sette $x=\dfrac{[(n+n')(n'+n'')(n''+n''')-k'k''(n''+n''')-k''k'''(n+n')]}{k'k''k'''k^{\text{v}}}[n''x'^{\text{v}}\pm\sqrt{Q'^{\text{v}}}]-\dfrac{(n+n')(n'+n'')x'^{\text{v}}}{k'k''}-x'^{\text{v}}$

374. Se $k=1$, poichè 1 è sempre tra i valori di $Q-lx^2$ (365), la formula $1+lx^2=Q$ sarà sempre risolubile in interi: chiamati t,u i più piccoli, si avrà per tutti gli altri $x=\dfrac{(u+t\sqrt{l})^m-(u-t\sqrt{l})^m}{2\sqrt{l}}$, e $\sqrt{Q}=\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{(u+t\sqrt{l})^m+(u-t\sqrt{l})^m}{2}$, ove m è un intero qualunque positivo.

375. Coi valori $x^2=\dfrac{a^2}{c^2}$, $Q=\dfrac{f^2}{c^2}$, sarà $k=\dfrac{f^2-a^2l}{c^2}$, che posto in $k+lx^2$, dà $\dfrac{f^2}{c^2}+l(x^2-\dfrac{a^2}{c^2})=Q=(\dfrac{f}{c}+\dfrac{u}{t}(x-\dfrac{a}{c}))^2$, supposte u,t indeterminate: quindi $x=\ldots\ldots \dfrac{au^2-2ftu+alt^2}{c(u^2-lt^2)}$, e presi t,u interi, si avrà x rotto.

376. Se si voglia intero, fatto $c=1$ ed $u^2-lt^2=1$, si avranno i valori diversi di t, u (374), da cui verrà $x=a(u^2+lt^2)-2ftu=2u(au-ft)-a$.

377. Sia ora $y=\sqrt{(b+cx+dx^2+ex^3)}$; dunque $b+cx+dx^2+ex^3=Q$, ciò che si ottiene in due casi: 1°. se $b=m^2$, si ha $m^2+cx=Q-dx^2-ex^3$, ovvero (151) $(m+\frac{cx}{2m})^2=Q+\frac{c^2x^2}{4m^2}-dx^2-ex^3$; ora $\frac{c}{2m}=g$, $Q=(m+gx)^2$ dà $x=\frac{g^2-d}{e}$; si ha ancora $m^2+cx+dx^2=Q-ex^3$, ovvero (151) $\left(m+\frac{cx}{2m}+\frac{dx^2}{2m}\right)^2=Q+\frac{c^2x^2}{4m^2}+\frac{cdx^3}{2m^2}+\frac{d^2x^4}{4m^2}-ex^3$, ed eliminato $\frac{c^2x^2}{4m^2}$ (153), e fatto $\frac{c}{2m}=g, \frac{d-g^2}{2m}=h$, $Q=(m+gx+hx^2)^2$, viene $x=\frac{e-2gh}{h^2}$: 2°. se $b+cx+dx^2+ex^3$ abbia due radici eguali che si otterranno al solito (335), sarà $b+cx+dx^2+ex^3=(px+q)^2(gx+f)=Q$, onde $gx+f=Q$ (361) ed $x=\frac{Q-f}{g}=\frac{A^2-a^2f}{a^2g}$.

378. Se la formula sia $dx^2+ex^3=Q=d+ex$ (361), sarà $x=\frac{Q-d}{e}=\frac{A^2-a^2d}{a^2e}$. Se sia $ex^3=Q=ex$, sarà $x=\frac{Q}{e}=\frac{A^2}{a^2e}$.

379. Sia infine $y=\sqrt{(b+cx+dx^2+ex^3+fx^4)}$; dunque $b+cx+dx^2+ex^3+fx^4=Q$, ciò che si ottiene in tre casi: 1°. se $b=m^2$, sarà $m^2+cx+dx^2=Q-ex^3-fx^4$, e compito il quadrato, eliminato $\frac{c^2x^2}{4m^2}$, e fatti $\frac{c}{2m}=g, \frac{d-g^2}{2m}=h$, $Q=(m+gx+hx^2)^2$, si ha $x=\frac{e-2gh}{h^2-f}$: 2°. se $f=m^2$, sarà $m^2x^4+ex^3+dx^2=Q-cx-b$, e compito il quadrato, eliminato $\frac{e^2x^2}{4m^2}$, e fatti $\frac{e}{2m}=g, \frac{d-g^2}{2m}=h$, $Q=(mx^2+gx+h)^2$, si ha $x=\frac{h^2-b}{c-2gh}$: 3°. se $b=m^2$, $f=n^2$, sarà $m^2+cx+n^2x^4=Q-dx^2-ex^3$, e compito il quadrato e fatto $\frac{c}{2m}=g$, $Q=(m+gx+nx^2)^2$, si ha $x=\frac{d\mp 2mn-g^2}{\pm 2gn-e}$ (il segno $\pm$ e $\mp$ è perchè m^2, n^2 sono nell' equazione senza m, n);

si ha pure $n^2x^4+ex^3+m^2=Q-dx^2-cx$; e compito il quadrato e fatto $\frac{e}{2n}=g$, $Q=(nx^2+gx+m)^2$, sarà $x=\ldots$ $\frac{c\mp 2gm}{g^2\pm 2mn-d}$.

380. Si osservi 1°. che l'equazione $b+cx^3+fx^4=Q$ si risolve nel caso di $f=m^2$ compiendo il quadrato $cx^3+m^2x^4$ ed eliminandone $\frac{e^2x^2}{4m^2}$; allora $x=\frac{1}{8e^3m^2}(e^4-64bm^6)$; e se $b=m^2$, fatto $Q=m^2$, viene $x=-\frac{e}{f}$: 2°. che se in $cx+ex^3+fx^4=Q$ sia $f=m^2$, si ha (361) $m^2x^2+ex=Q-\frac{c}{x}$, e compito il quadrato e fatto $\frac{e}{2m}=g$, $Q=(mx+g)^2$, sarà $x=\frac{c}{g^2}$; e se $c=m^2$, $f=n^2$, fatto $x=z^2$, verrà $m^2+ez^4+n^2z^6=Q$ cioè $n^2z^6+ez^4=Q-m^2$, e compito il quadrato, e preso $\frac{e}{2n}=g$, $Q=(nz^3+gz)^2$, si ha $z^2=x=\frac{m^2}{g^2}$: 3°. e se in $cx-dx^2+fx^4=Q$ sia $f=m^2$, fatto $m^2x^4=Q$, sarà $x=\frac{-c}{d}$; se $c=m^2$, $f=n^2$, fatto $x=z^2$, verrà $m^2+dz^2=Q-n^2z^6$, e compito il quadrato e preso $\frac{d}{2m}=g$, $Q=(m+gz^2)^2$, si ha $z^2=x=\frac{g^2}{n^2}$.

381. Ma se $b+cx+dx^2+ex^3+fx^4=Q$ divenga $ex^3+fx^4=Q=\frac{e}{x}+f$, sarà $x=\frac{e}{Q-f}=\frac{a^2e}{A^2-a^2f}$; e se divenga $dx^2+fx^4=Q=d+fx^2$, si risolve come sopra (368).

382. Trovato un valor di $x=h$, sarà $b+cx+dx^2+ex^3+fx^4=b+ch+dh^2+eh^3+fh^4=Q=m^2$. Pongo $x=z+h$, e sostituendo viene

$$\begin{array}{rl}
b = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b \\
+cx = & \qquad\qquad\qquad\qquad + cz + ch \\
+dx^2 = & \qquad\qquad + dz^2 + 2dhz + dh^2 \\
+ex^3 = & \quad + ez^3 + 3ehz^2 + 3eh^2z + eh^3 \\
+fx^4 = & fz^4 + 4fhz^3 + 6fh^2z^2 + 4fh^3z + fh^4
\end{array}$$

$$\text{cioè } \begin{array}{l} fz^4 + 4fhz^3 + 6fh^2z^2 + 4fh^3z + m^2 = Q \\ \quad\;\; + e \quad + 3eh \quad + 3eh^2 \\ \qquad\qquad + d \quad + 2dh \\ \qquad\qquad\qquad + c \end{array}$$

formula, che avendo $+ m^2$ per ultimo termine, si risolve con le regole date, e il valor di z dà un nuovo valor di x.

Problemi indeterminati del terzo grado.

383. Sia in terzo luogo $m = 3$; sarà $y = \sqrt[3]{(b + cx + dx^2 + fx^3)}$; e perchè y sia razionale, bisognerà far $b + cx + dx^2 + fx^3 = C$ (intendo per C un *numero cubo*), e ciò si ottiene in tre casi: 1°. se $b = m^3$, sarà $m^3 + cx = C - dx^2 - fx^3$, ovvero (155) $(m + \frac{cx}{3m^2})^3 = C - dx^2 - fx^3 + \frac{c^2x^2}{3m^3} + \frac{c^3x^3}{27m^6}$, e fatto $\frac{c}{3m^2} = g$, $C = (m + gx)^3$, si ha $x = \frac{d - 3g^2m}{g^3 - f}$: 2°. se $f = m^3$, sarà $m^3x^3 + dx^2 = C - cx - b$, ovvero (155) $(mx + \frac{d}{3m^2})^3 = C - cx - b + \frac{d^2x}{3m^3} + \frac{d^3}{27m^6}$, e fatto $\frac{d}{3m^2} = g$, $C = (mx + g)^3$, si ha $x = \frac{b - g^3}{3g^2m - c}$: 3°. se $b = m^3$, $f = n^3$, sarà $m^3 + n^3x^3 = C - cx - dx^2$, ovvero (155) $(m + nx)^3 = C + 3m^2nx + 3mn^2x^2 - cx - dx^2$, e fatto $C = (m + nx)^3$, si ha $x = \frac{c - 3m^2n}{3mn^2 - d}$.

384. Si osservi 1°. che se nella formula $b + cx + fx^3$ sia $f = m^3$, fatto $m^3x^3 = C$, sarà anche $x = \frac{-b}{c}$: 2°. che se in $b + cx + dx^2 = C$ si contenga un quadrato, onde sia per esempio $b + cx + dx^2 = g(p + qx)^2 = C$, si avrà (361) $\frac{g(p + qx)^2}{(p + qx)^3} = \frac{g}{p + qx} = C$ ed $x = \frac{g - pC}{qC} = \frac{a^3g - A^3p}{A^3q}$: 3°. che

se in $b + dx^2 + fx^3 = C$ sia $b = m^3$, fatto $m^3 = C$, sarà anche $x = \frac{-d}{f}$.

385. Ma se la formula $b + cx + dx^2 + fx^3 = C$ divenga $dx^2 + fx^3 = C = \frac{d}{x} + f$ (361), sarà $x = \frac{d}{C - f} = \frac{a^3 d}{A^3 - a^3 f}$. Se divenga $b + cx = C$, sarà $x = \frac{C - b}{c} = \frac{A^3 - a^3 b}{a^3 c}$. Se divenga $dx^2 = C = \frac{d}{x}$ sarà $x = \frac{d}{C} = \frac{a^3 d}{A^3}$. Se divenga $cx = C$, sarà $x = \frac{C}{c} = \frac{A^3}{a^3 c}$. Del resto un valor di x, ne dà per lo più molti altri (382).

Problemi indeterminati di tutti i gradi a una o due incognite.

386. I°. Sia $y = \sqrt[m]{bx^{m \pm 1}}$ di grado pari o impari; poichè $bx^{m \pm 1} = P^m = bx^{\pm 1}$ (361), sarà $x = P^{\pm m} b^{\mp 1}$; e si osservi che se $m \pm 1$ è numero impari, sarà m numero pari; onde se voglia cangiarsi $bx^{m \pm 1}$ in quadrato, sarà $P^m = P^2$, $x = P^{\pm 2} b^{\mp 1}$ e $bx^{m \pm 1} = P^{\pm 2m + 2} b^{\mp m}$: 2°. sia $y = \sqrt[m]{(bx^m + z^n x^{m \pm 1})}$ di grado pari o impari; poichè $bx^m + z^n x^{m \pm 1} = P^m = b + z^n x^{\pm 1}$, sarà $x = z^{\mp n} (P^m - b)^{\pm 1}$: 3°. sia $y = \sqrt[m]{(b^m + dx^m + cx^{m \pm 1})}$ di grado pari o impari; poichè $b^m + dx^m + cx^{m \pm 1} = P^m$, fatto $P^m = b^m$, viene $x = -d^{\pm 1} c^{\mp 1}$.

387. La formula generale $b + cx + dx^2 + \ldots + \omega x^m$ diviene una potenza perfetta in più casi: I°. se è potenza del grado m, si cangia in potenza del grado n; infatti se $b + cx + \ldots + \omega x^m = (hx + f)^m$, posto $(hx + f)^m = P^n$, sarà $hx + f = \sqrt[m]{P^n}$, $x = \frac{\sqrt[m]{P^n} - f}{h}$, e preso $P = \frac{A^m}{a^m}$, sarà $x = \frac{A^n - a^n f}{a^n h}$: 2°. se è il prodotto di due poten-

ze del grado μ, $m-\mu$, si cangia in altre simili, e nell'espresse dai fattori di $\mu, m-\mu$; poichè sarà $b+cx+\ldots.+\omega x^m=(hx+f)^\mu(gx+k)^{m-\mu}=\text{P}^\mu=(gx+k)^{m-\mu}$ (361), che si tratta come il primo caso, ec., e se $\mu=qr$, si avrà $(hx+f)^{qr}(gx+k)^{m-\mu}=\text{P}^q=(gx+k)^{m-\mu}$ (361), che pur và come il primo caso, ec., ove osservo che se $m-\mu=1$, la formula si cangia in potenze dei gradi $m, m-1$, e nell'espresse dai fattori di $m, m-1$: poichè se $b+cx+\ldots\ldots+\omega x^m=(hx+f)^{m-1}(gx+k)=\text{P}^m=\frac{gx+k}{hx+f}$ (361), sarà $x=\frac{f\text{P}^m-k}{g-h\text{P}^m}=\frac{\text{A}^m f-a^m k}{a^m g-\text{A}^m h}$ ec.: 3°. se è la somma o la differenza di una potenza del grado μ e di un prodotto di fattori razionali, si cangia in quella potenza; poichè se $b+cx+\ldots,+\omega x^m=(hx+f)^\mu\pm(gx+k)(rx+s)$ ec. $=\text{P}^\mu$, fatto $(hx+f)^\mu=\text{P}^\mu$, sarà $x=\frac{-k}{g}$, $x=\frac{-s}{r}$ ec.: 4°. se $b+c+\ldots.+\omega=m^r$, si cangia in una potenza del grado r; infatti da $m^r+cx+\ldots+\omega x^m=\text{P}^r+c+\ldots+\omega$, posto $m^r=\text{P}^r$, viene $\ldots\ldots$ $\frac{cx\ldots+\omega x^m}{c\ldots+\omega}=1$, a cui evidentemente soddisfa $x=1$: 5°. se tentando si trovi un valore adattato di x.

388. La formula $z=\sqrt[2m]{(b^2x^2+dy^2)}$ di grado pari, si risolve in numeri interi. Poichè fatto $b^2x^2+dy^2=\text{P}^{2m}$, $\text{P}^{2m}-dy^2=b^2x^2=\text{Q}$, o $\frac{\text{P}^{2m}}{y^2}=\text{Q}+d$ (361), sarà $\frac{\text{P}^m}{y}=\ldots$ $\frac{\text{A}^2+a^2d}{2\text{A}a}$ ed $y=\frac{2\text{A}a\text{P}^m}{\text{A}^2+a^2d}=\frac{\text{A}a\text{P}^m}{\frac{1}{2}(\text{A}^2+a^2d)}=\ldots\ldots$,

$$\frac{2\text{AP}^m}{\frac{\text{A}^2}{a}+ad}=\frac{\text{AP}^m}{\frac{1}{2}(\frac{\text{A}^2}{a}+ad)}=\frac{2a\text{P}^m}{\text{A}+\frac{a^2d}{\text{A}}}=\frac{a\text{P}^m}{\frac{1}{2}(\text{A}+\frac{a^2d}{\text{A}})}=\ldots$$

$$\frac{2\text{P}^m}{\frac{\text{A}}{a}+\frac{ad}{\text{A}}}=\frac{b\text{P}^m}{\frac{1}{2}(\frac{\text{A}}{a}+\frac{ad}{\text{A}})}$$

.. Eguagliando P agli otto denominatori, si hanno otto formule, presi A, a in modo che x, y risultino interi, il che sempre può farsi. Ecco le prime due:

$y = 2Aa(A^2 + a^2d)^{m-1}$, $bx = (A^2 - a^2d)(A^2 + a^2d)^{m-1}$: e si noti 1°. che se le formule abbiano un fattor comune, come $x = \frac{nkP^m}{nf}$, $y = \frac{ngP^m}{nf}$, si dovranno divider per esso e poi ridurle: 2°. che se $A^2 + a^2d$, $\frac{1}{2}(A^2 + a^2d)$, $\frac{A^2}{a} + ad$ ec. sia potenza m^{sima}, si farà non più P ma $P^m = A^2 + a^2d$, $= \frac{1}{2}(A^2 + a^2d)$ ec.

389. La formula $z = \sqrt[2m+1]{(bx^2 + dy^2)}$ di grado impari, si risolve in numeri interi. Infatti sarà $bx^2 + dy^2 = P^{2m+1}$, ed $x^2 = \frac{P^{2m+1} - dy^2}{b} = Q = bP^{2m+1} - bdy^2$ (361), ovvero $y^2 = \frac{P^{2m+1} - bx^2}{d} = Q = dP^{2m+1} - bdx^2$: ma . . . . $bP^{2m+1} = \frac{P^{4m+2}}{b^{2m}}$ e $dP^{2m+1} = \frac{P^{4m+2}}{d^{2m}}$ (386); dunque sostituendo ed estraendo la radice, si troverà $y = \ldots$ $\frac{2AaP^{2m+1}}{b^m(A^2 + a^2bd)} = \frac{AaP^{2m+1}}{\frac{1}{2}b^m(A^2 + a^2bd)}$ ec, ovvero $x = \ldots$ $\frac{2AaP^{2m+1}}{d^m(A^2 + a^2bd)} = \frac{AaP^{2m+1}}{\frac{1}{2}d^m(A^2 + a^2bd)}$ ec. come sopra (388).
Fatto $P = b(A^2 + a^2bd)$ ec., ovvero $P = d(A^2 + a^2bd)$ ec., si hanno sedici formule: altre sedici se ne hanno osservando che i due fattori b, d di a^2bd posson distribuirsi tra i due quadrati A^2, a^2. Poichè se sia $A^2 + a^2bd = 2p$, $A^2 - a^2bd = 2q$, quadrando, sottraendo ed estraendo la radice, verrà $Aa = \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{bd}} = \sqrt{\frac{p+q}{b} \cdot \frac{p-q}{d}}$, onde se . . . $\frac{p+q}{b} = A'^2$, $\frac{p-q}{d} = a'^2$, sommando e sottraendo si avrà $2p (= A^2 + a^2bd) = bA'^2 + da'^2$, $2q (= A^2 - a^2bd) = bA'^2 - da'^2$ e $2Aa = 2A'a'$. Ecco le prime due formule: $y = 2Aab^{m+1}$

$(A^2 +$

$(A^2 + a^2bd)^{2m}$, $x = b^m(A^2 - a^2bd)(A^2 + a^2bd)^{2m}$. E quì pure hanno luogo le riduzioni di sopra (388).

390. Termineremo l' Algebra con alcuni Quesiti che attesa la loro varia natura dovranno sciogliersi dai Principianti parte nel primo e parte nel secondo anno dello studio.

I. Come dimostrerete che il comun divisore trovato con la data regola (56) è *massimo*?

II. Dimostrar le regole date ai numeri 78, 79, 83.

III. Uno mi dice: la metà de' miei scudi col loro terzo e quarto gli supera d' uno. Quanti scudi ho? *Risultato*. 12.

IV. L' età a di uno è m^{pla} di quella di suo figlio; tra quanti anni sarà n^{pla}? *Ris.* Tra anni $\frac{a(m-n)}{m(n-1)}$.

V. Dando 3 soldi per uno a dei poveri, mi mancano 9 soldi; ma dàndone 2, me ne avanzan 2. Quanti sono i soldi ed i poveri? *Ris.* I soldi son 24 e i poveri 11.

VI. Uno avea 6' quando tirò il salario di 5 mesi: 2 mesi dopo avea già spesi $\frac{3}{4}$ del suo denaro; ma riscosso il salario, si trovò con 99'. Quanto avea il mese? *Ris.* 30'.

VII. Uno lascia ai nipoti 120000', cioè 12000' a ciascun maschio, e 9000 a ciascuna femmina. Se avesse lasciate 9000' ai maschi e 12000 alle femmine, sarebbero avanzate 9000'. Quanti sono gli uni e l' altre? *Ris.* 7 maschi e 4 femmine.

VIII. C Cacciatore promette a B una somma b per ogni scarica in vano, e B promette a C una somma a per ogni scarica in pieno. Dopo un numero n di scariche o C, B nulla si debbono, o C deve a B una quantità d, o B la deve a C. Trovare in generale le scariche x a vuoto. *Ris.* $x = \frac{an \pm d}{a+b}$.

IX. Diviso un numero x in m ed in $m+1$ parti eguali, il lor prodotto si eguaglia. Cerco x. *Ris.* $x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

X. A raddoppia coi suoi i danari di B e di C, quindi B li raddoppia ad A e a C, e poi C ad A e a B, ed in fine ciascuno ha 16'. Quanto aveano in principio? *Ris.* Suppongo x, y, z; e trovo $z = 8$, e di quì x, y.

XI. Con a carte si fanno b monti d' egual numero c di punti, e la prima carta di ciascun monte val 10 se è figu-

ra, 11 se è asso, 12 se è due ec., ma l'altre carte del monte vaglion ciascuna un sol punto. Fatti i monti e rese le carte d avanzate, se ne avanzano, si chiede quanti punti x facciano le prime carte di tutti i monti. *Ris.* $x = d + b(c + 1) - a$.

XII. I crediti di 7 persone sommati a 6 a 6 sono 994, 1036, 840, 910, 896, 952, 882. Qual credito ha ciascuna? *Ris.* Il credito d'una $z = 91$, e di quì gli altri.

XIII. Quali sono i numeri x, y la cui somma è a, e quella dei lor cubi è b? *Ris.* $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$, e di quì x.

XIV. Qual è il numero x le cui potenze $m, m+2$ prese l'una p e l'altra g volte, si eguagliano? *Ris.* $x = \sqrt{\frac{p}{g}}$.

XV. Son 20 tra uomini e donne in una Locanda, e gli uni e l'altre spendono 24^l; ma ogn'uomo spende 1^l più d'ogni donna. Quanti son gli uni e l'altre? *Ris.* Gli uomini sono 8.

XVI. Dimostrare i teoremi dei numeri 8., 36., 44. IV. V., 55.

XVII. Un mobile fa miglia 9 nel primo giorno, 8 nel secondo ec., un altro ne fa nel primo giorno 27, nel secondo 18 ec., ambedue in progression geometrica. Qual è il loro viaggio per tutta l'eternità? *Ris.* $81.^{mig.}$

XVIII. Due Corrieri con le celerità m, n partono nel punto stesso l'uno da Firenze per Livorno, l'altro da Livorno per Firenze, e la distanza tra questi due luoghi è a. Ove s'incontreranno? *Ris.* Sia x la distanza tra Firenze e il punto d'incontro, e si avrà $x = \frac{am}{m+n}$.

XIX. Un orologio tra le 5 e le 6 ha la lancetta dei minuti su quella dell'ore. Che ora è? *Ris.* Ore $5, 27' \frac{3}{11}$.

XX. Tre cagioni separatamente producono i tre effetti e, e', e'' nei tempi t, t', t''. Qual tempo x impiegheranno a produrre insieme l'effetto e'''? *Ris.* $x = \frac{e'''tt't''}{et't'' + e'tt'' + e''tt'}$.

XXI. A pose in società il doppio di B e di più $5^{sc.}$: A ebbe di guadagno $660^{sc.}$ e B 300. Cerco i capitali e il frutto. *Ris.* Il capitale di B è $25^{sc.}$; il frutto è di 12 per 1.

XXII. Un peso, un numero o una misura di due materie vale p', p'' e con la mescolanza di pesi, numeri o misure m', m'' di esse vorrei fare i pesi, numeri o misure m di una materia media onde un suo peso, numero o misura vaglia p. Date quattro delle sei cose, trovar l'altre due. *Ris.* Si avranno l'equazioni $m' + m'' = m$, e $pm = p'm' + p''m''$.

XXIII. Dovendo A pagare a B una rendita a per t anni, compresa o non compresa quella che scade oggi, conviene di saldarlo interamente con abbonargli il frutto semplice ad m per 100. Qual somma x riscuoterà B? *Ris.* Nel primo caso $x = \frac{a(200 + mt)(t+1)}{2(mt+100)}$, nel secondo $x = \ldots \frac{at[200 + m(t-1)]}{2(mt+100)}$.

XXIV. Data al frutto semplice di m per 1 una sorte c, risolvo di consumare in t anni e sorte e frutti spendendo annualmente un' egual somma x. Cerco x. *Ris.* $x = \ldots \frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t - 1}$.

XXV. Col metodo dei coefficienti indeterminati calcolare i rotti 1°. $\frac{\pm(2ax + x^2)u + (a+x)u^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)u}$; 2°. $\ldots \frac{\sqrt{(ax + x^2 \pm ux)} - \sqrt{(ax + x^2 \pm au \pm ux)}}{\sqrt{(x^2 \pm ux)}}$. *Ris.* . . . . ; 1°. $\pm \frac{(2ax + x^2)u}{(a+x)^2} + \frac{a^2u^2}{(a+x)^3} \pm \frac{a^2u^3}{(a+x)^4}$ ec.: 2°. $\mp \ldots \frac{au}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3a^2+4ax)u^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3 + 12a^2x + 8ax^2)u^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.

XXVI. Sommare i rotti decimali 1°. 0,00330033 ec., 2°. 0,4059090 ec. *Ris.* Il 1°. è $\frac{1}{303}$; il 2°. $\frac{893}{2200}$.

XXVII. Sommare n termini della serie $\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4}$ ec. *Ris.* La somma è $\frac{x(x+1)(x^n - 1)}{(x-1)^3} - \ldots ; \frac{n}{x^n(x-1)}\left(\frac{2x}{x-1} + n\right)$.

XXVIII. Per la Regola di doppia falsa posizione calcolare il valor di r nell' equazione $r^r = 2000$. *Ris.* $r = 4,8278$.

XXIX. Le tre cifre d' un numero son tali che il loro

prodotto è 54, la somma dell' estreme divisa per la media è 6, e sottratto 594 dal numero, si han le tre cifre stesse in ordine inverso. Che numero è? *Ris.* 923.

XXX. Il Comandante d' una Fortezza assediata scrive al Generale che tante sono le centinaja de' suoi soldati quante le unità nella radice positiva dell' equazione $x^4+7x^3-2x^2-18x=28$. Come spiegherete la cifra? *Ris.* I soldati erano 200.

XXXI. Determinare i fattori della quantità $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$. *Ris.* I primi due sono $c=\pm(a-b)$, gli altri due $a+b=\pm c$.

XXXII. Estrar la radice quadra da $11+\sqrt{120}$, da $39+2\sqrt{5}$ e da $6\sqrt{-1}$. *Ris.* 1°. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$: 2°. $\sqrt{\left(\frac{39+\sqrt{1501}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{39-\sqrt{1501}}{2}\right)}$: 3°. $\sqrt{3}+\sqrt{-3}$.

XXXIII. Quali sono i due numeri la cui somma è a e il quoziente del minore diviso per la radice cuba del maggiore è g? *Ris.* Il minore è $g\left[\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{a^2}{4}+\frac{g^3}{27})}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2}-\sqrt{(\frac{a^2}{4}+\frac{g^3}{27})}\right)}\right]$.

XXXIV. Risolver l' equazioni $x^4+6x^2-12x+6=0$ ed $x^4-18x^2+25x+6=0$. *Ris.* I divisori della 1ª. sono $x^2\pm x\sqrt{-6}\mp\sqrt{-6}$; della 2ª. sono x^2-5x+6 ed x^2+5x+1.

XXXV. Trovar per approssimazione la radice dell' equazione $x^3-13x+5=0$. *Ris.* $x=-3,7843$.

XXXVI. Trovar la radice della generale equazione $x^n-n.\frac{n-1}{2}abx^{n-2}-n\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}ab(a+b)x^{n-3}-\ldots n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}ab(a^2+ab+b^2)x^{n-4}-$ ec. *Ris.* $x=\frac{a\sqrt[n]{b}-b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$.

XXXVII. Con monete di 10 e di 5 paoli in quanti modi può farsi la somma di paoli 405? *Ris.* In 40 modi.

XXXVIII. Quali sono i numeri multipli di 7 che divisi per 4, 5 e 6, danno 1 di resto? *Ris.* 301, 721, 1141 ec.

XXXIX. Certi forestieri spesero 20^{l} in una Locanda a ragione di 4^{l} per Padrone, di $40^{sol.}$ per Servitore e di $30^{sol.}$

per Cavallo: quanti erano i Padroni x, i Servitori y ed i Cavalli z? *Ris.* Se $x=1$, si avrà $y=2,=5$, e $z=8,=4$: se $x=2$, sarà $y=3,z=4$: se $x=3$, verrà $y=1,z=4$.

XL. E' egli possibile di far 19' con monete di $24^{sol.}$, di 12, e di 6? *Ris.* Impossibile.

XLI. Esprimere più semplicemente per approssimazione il rotto 0,5715. *Ris.* $\frac{4}{7}$.

XLII. Correndo 9 di Ciclo Solare e Lunare e 3 d'Indizione, apparve in Cielo una grande e singolar Cometa. Che anno era? *Ris.* Il 1680.

XLIII. Trovar due numeri x, y la cui somma sia il quadrato di x^2+y. *Ris.* $x=\frac{Aa}{(A-a)^2+a^2}$; di quì y.

XLIV. Trovar due rotti razionali la cui somma e il cui prodotto facciano due interi. *Ris.* E' impossibile.

XLV. Risolvere in rotti o in interi l'equazione $13x^2-159=Q$. Ris. $x=4, \frac{40}{9}, \frac{32}{3}, 20$ ec.

XLVI. Trovar le formule del n°. 374.

XLVII. Trovar tre numeri x, y, z tali che moltiplicandoli a 2 a 2 e aggiungendo a ciascun prodotto un numero dato b, si abbia sempre un quadrato. *Ris.* $z= \ldots\ldots \frac{A^2+a^2(r^2-b)}{2Aa}$, $y=\frac{z^2-r^2}{z}$, $x=\frac{r^2-b}{z}$, presa r ad arbitrio.

XLVIII. Fare un quadrato delle due formule $x^6-2p^2x^3(x+1)+x+p^6=Q$, $x^6-2p^2x^3+n^2x+p^4=Q$. *Ris.* 1^a. $x=-1$; 2^a. $x=\frac{n}{2p}$.

XLIX. Un Viaggiatore osservando le rarità di una Casa illustre di Toscana, s'invaghì di varj Quadri di due diverse Scuole e soprattutto di uno in Lavagna; opera antica ove è dipinta una Musa. Voleva acquistarli e ne offeriva in prezzo una Cassetta di fondo quadro piena di zecchini disposti vi in 144 piani: onde essendo le pitture di ciascuna Scuola tra 80 e 100, avrebbe dati per ogni pezzo tanti zecchini quanti erano i pezzi della Scuola respettiva, e tanti per la Musa quanti erano i pezzi delle due Scuole moltiplicati insieme. Determinare quante erano e quanto sarebbero importate le pitture di ciascuna Scuola, quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchini erano in ciascun piano del-

la Cassetta, e qual' era la loro somma totale. *Ris.* Chiamate x le pitture della prima Scuola, y quelle della seconda, si avrà $x = 4A^2 - 4Aa - 3a^2$, ed $y = 8Aa$, e fatto $A = 6, a = 2$, sarà $x = 84, y = 96$, onde il prezzo delle pitture x è di $7056^{z.}$, delle pitture y di $9216^{z.}$, della Musa di $8064^{z.}$, la somma degli zecchini 24336, gli zecchini di ciascun piano 169.

L. Nello scavo di certi fondamenti s' incontrò un pavimento antico di ambrogette quadre. Quella di mezzo era rossa; intorno a lei ne eran disposti quattro ordini tra verdi, bianche, gialle, e turchine; e col prodotto di tre ordini tra rosse, verdi e bianche in quattro ordini di turchine e gialle terminava il pavimento. Se ne volle ornare una sala quadrata, ma essendo troppe, ne fu escluso il prodotto di un ordine di turchine in uno di verdi e in uno di gialle. Si sa che ogn' ordine conteneva un egual numero di ambrogette; ditemi quante ne erano in ciascun ordine, quante se ne trovarono nel pavimento antico, e quante ne furono impiegate nella sala. *Ris.* Chiamato x il numero dell' ambrogette di ciascun ordine, la prima soluzione sarà $x = 8$, e perciò il numero totale dell' ambrogette 801, e le impiegate nella sala 289.

FINE DELL' ALGEBRA.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

391. La Geometrìa prende il nome dalla misura dei Terreni a cui forse fu impiegata in origine. Archimede ed altri Geometri Greci ne estesero l' uso, e fatte con una *Risoluzione* o *Analisi* loro propria molte scoperte, ne pubblicaron poi la *Composizione*, o la *Sintesi*. Euclide le raccolse in un' Opera, ove fissò le nozioni equivoche e poco familiari della Geometria; considerò l' Estensione nella sua origine, e dal Punto *che non ha dimensione*, giunse ai Solidi. Infatti l' estensione che è sempre con *lunghezza*, *larghezza* e *profondità*, può concepirsi con l' una senza l' altra; e si cerca la lunghezza d' una strada senza chiederne la larghezza, e si misura l' ampiezza d' un lago senza curarne la profondità. Questa *astrazione* rende più semplice la Geometrìa Elementare, e la divide in tre Parti: la prima considera la lunghezza, cioè le proprietà delle *Linee*, le qualità degli *Angoli*, e la descrizione delle *Figure*; la seconda esamina la lunghezza e la larghezza, e valuta le *Superficie*; la terza suppone le tre dimensioni riunite, e determina la *Superficie* e la *Solidità* dei corpi.

PRIMA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA.

FIG. 1. DA un punto A si può andare a un altro B per un' infinità di linee. Si vede però che una dee essere più corta d'ogn'altra, e questa, qualunque sia, si chiama *Linea retta*.

392. Dunque 1°. *la vera misura della distanza di due punti* A, B *è la linea retta* AB *che gli unisce*: 2°. *una sola retta può tirarsi da un punto a un altro*, e perciò *due punti bastano a determinar la posizione d'una retta*: tutte l'altre che si conducessero per gli stessi punti, si confonderebbero con la prima: 3°. *due rette si tagliano in un sol punto*, poichè tagliandosi in più, avrebbero comuni tutti i punti d'*intersezione*, e si è veduto che non possono averli senza confondersi.

393. Quando due rette s' incontrano nasce la *retta spezzata*. Tali sono ADB, AFB, terminate ai punti A, B come la retta AB. Ora AB è più corta d'ogn'altra linea terminata ai punti stessi: dunque *la retta è più corta d'ogni retta spezzata, condotta tra gli stessi punti*. Dunque anche tra le rette spezzate son più lunghe quelle che più si allontanano dalla retta, e può esservene un'infinità Vi sono anche infinite altre linee ACB, AMB ec. che terminando alle stesse estremità A, B, cangiano, per dir così, direzione a ogni punto: si chiamano *Linee Curve*, e tra esse la più nota e più facile a descriversi è la *Curva Circolare*.

2. 394. Se la retta AC mobile intorno al punto A, fa un'intera rivoluzione, la sua estremità C descrive una curva CEBDC che dicesi *Circonferenza*, e lo spazio da lei racchiuso si chiama *Circolo* (non biso-

gna

 FIG.

gna confonder queste due cose). Il punto A è il *Centro* del circolo; ogni retta AB tirata dal centro alla circonferenza si chiama *Raggio*; e BD, raggio prolungato alla circonferenza, si chiama *Diametro*. 2.

395. Segue da questa descrizione 1°. che tutti i raggi sono eguali: 2°. che lo sono anche tutti i diametri: 3°. che ogni diametro divide il circolo e la circonferenza in due parti eguali. Si chiama *Arco di circolo* una porzione CEB di circonferenza: *Settore*, lo spazio ACEBA tra l'arco CEB e i due raggi CA, AB: *Segmento*, lo spazio CEBC tra l'arco CEB e la retta CB che è la *Corda dell' arco* CEB.

396. Onde 1°. una corda CB è più piccola del diametro DB; poichè condotta AC, sarà la spezzata CAB > CB (393): ora CAB = DB; dunque DB > CB: 2°. nello stesso circolo o in circoli eguali, gli archi eguali hanno corde eguali, i maggiori corde maggiori, e reciprocamente 3°. la corda CB d'un arco CEB è corda anche del resto CHB; ma parlando d'arco sotteso, s'intende sempre il più piccolo: 4°. i gradi e minuti del circolo (95) non son quantità assolute, come un piede, un braccio, ma relative alle circonferenze di cui son parti simili.

Angoli.

397. Se due rette AC, CD si incontrano in C, la loro inclinazione forma l'*Angolo* ACD, che ha per *Vertice* il punto C d'incontro, e per *Lati* AC, CD. Se l'angolo si indica con tre lettere, si mette in mezzo quella del vertice; se con una, ella è sempre quella del vertice. 3.

Col centro C e con un raggio CK descritto l'arco KE, quest'arco sarà la misura dell' angolo ACD: poichè se l'angolo aumenti e divenga AC*d*, o scemi e divenga ACI, l'arco KE aumenterà o scemerà nello stesso rapporto. E benchè col centro C e con varj raggi possan descriversi infiniti archi tra i lati stes-

3. si CA, CD, tutti però son parti simili delle loro circonferenze. Onde dicendo che l'angolo ACD ha per misura l'arco KE, s'intende sempre il numero dei gradi di KE e non la sua lunghezza assoluta: quindi *la grandezza d'un angolo non dipende dalla lunghezza de' suoi lati:* e secondo che ha per misura o 90°, o più, o meno di 90°, è *retto* come ACI, o *ottuso* come ACD, o *acuto* come *BCd*.

2. 398. Dunque l'intere circonferenze BHCB $= \pi$ EKFE $=$
e π' misurano i 4 angoli retti che sono intorno ad A, C, co-
3. me gli archi DC $=$ A, EL $=$ A$'$ misurano gli angoli DAC $=$
a, ECL $= a'$: perciò $\pi : 4 :: A : a = \frac{4A}{\pi}$ e $\pi' : 4 :: A' : a' = \frac{4A'}{\pi'}$ e quindi $a : a' :: \frac{A}{\pi} : \frac{A'}{\pi'} ::$ (508) $\frac{A}{r} : \frac{A'}{r'}$, cioè *gli angoli son proporzionali agli archi divisi per i raggi*.

399. Il *Complemento* d'un angolo o d'un arco è ciò che loro manca per esser di 90°; così l'arco di 57° 31$'$ ha per complemento 32° 29$'$; dunque un angolo ottuso ha per complemento ciò che deve sottrarsi per ridurlo a 90°, onde quello di 119° 11$'$ 36$''$ è -29° 11$'$ 36$''$. Ma il *Supplemento* d'un angolo o d'un arco è ciò che loro manca per esser di 180°: così un angolo di 35° ha per supplemento 145°.

400. Onde *due angoli d'un medesimo complemento o supplemento sono eguali;* e perciò *gli angoli* ACD,
3. BCF *opposti al vertice*, col medesimo supplemento DCB, *sono eguali*.

401. Se una retta DC cada sopra un'altra AB, forma con essa due angoli ACD, DCB la cui somma è sempre due retti o 180°; poichè l'uno è supplemento dell'altro. E perciò la somma dei quattro angoli ACD, DCB, BCF, FCA vale quattro retti, o 360°. In generale se le rette ACB, DCI, ECH ec. si tagliano in un
4. punto C, la somma di tutti gli angoli ACD + DCE + ec. che son da una parte di AB, è 180°, e la somma da ambedue le parti è 360°.

Linee rette perpendicolari.

Chiamasi *perpendicolare* o *normale* la retta che fa retti gli angoli nell' incontro d' un' altra: così DC è normale ad AB se gli angoli intorno a C son retti. Le rette DE, DA diconsi *oblique*. 5.

402. I. *Se* AC *sia normale a* DF *e il punto* C *d' intersezione sia equidistante dai punti* D, F, *ogni punto di* AC *sarà equidistante dai punti stessi* D, F. Essendo C equidistante da D, F, sarà CD = CF (392), e il semicircolo DEF del centro C e raggio CD, passerà per F (395). Condotte dunque da E le corde ED, EF, poichè per ipotesi i due angoli in C son retti, sarà DHE = FIE = 90° (397); dunque ED = EF (396), ed E sarà equidistante come C dai punti D, F (392) ma due punti determinano la posizion d' una retta (392); dunque ogni punto di AC è equidistante da D, F.

II. Reciprocamente, *se ogni punto di* AC *sia equidistante dai punti* D, F *la retta* AC *sarà normale a* DF. Poichè descritto col centro C e raggio CD il semicircolo DEF e condotte le corde DE, FE, sarà DE = FE (392) e però DHE = FIE = 90° (396); dunque gli angoli in C son retti, ed AC è normale a DF.

III. E *se* AC *è normale a* DF *ed un suo punto* A *è equidistante dai punti* D, F, *lo sarà anche ogn' altro suo punto* E. Poichè se E non lo fosse, non sarebbe ED = EF, nè EHD = EIF = 90°, nè gli angoli in C sarebbero retti, nè AC sarebbe normale, contro l' ipotesi.

403. Dunque *data la retta su cui vuol condursi la normale, basta un sol punto per determinarne la posizione*: onde una sola normale può condursi da un punto sopra una retta data.

404. *La normale* DC *è più corta di tutte l' oblique che da un punto stesso* D *vanno alla stessa retta* AB. Descritto col centro C e raggio CD il semicircolo DEF e condotte le corde DE, FE, sarà DF < DEF (393);

5. ma DF = 2DC e DEF = 2DE (402.I.); dunque 2DC < 2DE, e DC < DE. Perciò *la normale* DC *misura la distanza di un punto* D *da una retta* AB. Sciolghiamo alcuni Problemi.

6. 405. I. *Dividere in mezzo la data retta* DC. Coi centri D, C e col raggio stesso DC descrivo due archi che si seghino in G, H, e la retta GH condotta per G, H dividerà in mezzo DC. Poichè condotti i raggi DG, DH, CG, CH, sarà DC = DG = DH = CG = CH, e i punti G, H saranno equidistanti da D, C: lo sarà dunque anche il punto F (392) e però DF = FC.

II. *Da un dato punto* G *fuori d' una retta* AB *condur sopra di essa una normale*. Presa un' obliqua GD come raggio, e descritto col centro G l' arco DMC, divido in mezzo in F la retta CD (405. I.), unisco CG, FG, e sarà GF la normale cercata. Perchè i due punti G, F sono equidistanti dai due D, C; dunque lo sono tutti i punti di FG (392); dunque GF è normale ad AB (402. II.).

III. *Da un punto* F *dato nella retta* AB *alzar sopra di essa una normale*. Presa FD = FC e coi centri D, C e col raggio stesso DC descritti due archi che si seghino in G, unisco DG, FG, CG, e sarà FG la normale richiesta. Perchè DC = DG = CG; dunque i due punti F, G sono equidistanti dai due D, C; dunque FG è normale ad AB.

Perpendicolari nel Circolo.

7. 406. I. *Se dal centro* C *oltre i raggi* CF, CG *si conduca sulla corda* FG *il raggio normale* CM, *egli dividerà in mezzo la corda* FG, *l' arco sotteso* FMG *e l' angolo contenuto* FCG. Conduco le corde FM, GM. Essendo per ipotesi CF = CG, il punto C sarà equidistante dai punti F, G; ma di più CD è normale ad FG; dunque anche i punti D, M saranno equidistan-

ti da F, G (402. III.) e però DF = DG, MF = MG, 7.
MIF = MLG (396) ed FCM = GCM (397).

II. Reciprocamente, *se la corda* FG *è divisa in mezzo dal raggio* CM, *egli sarà normale ad* FG *e dividerà in mezzo l'arco* FMG *e l'angolo* FCG. Perchè i due punti C, D sono equidistanti dai due F, G, lo è dunque anche M; dunque DF = DG, MF = MG, MIF = MLG ed FCM = GCM.

Nel modo stesso si prova che se l'arco FMG o l'angolo FCG è diviso in mezzo dal raggio CM, questo è normale ad FG, e divide in mezzo FG e l'angolo FCG o l'arco FMG.

III. E *se la corda* FG *sia divisa in mezzo dalla normale* MD, *questa prolungata passerà per il centro* C. Essendo MD normale ad FG ed un suo punto D equidistante dai punti F, G, lo sarà anche ogn' altro suo punto (402. I.): ma il centro C è equidistante dai punti stessi F, G; dunque C è un punto della normale MD prolungata.

Dunque *di queste tre cose, esser normale a una corda, dividerla in mezzo, e passar per il centro, datene due, si ha necessariamente la terza*. Sciolghiamo alcuni Problemi.

407. I. *Dividere in mezzo un angolo* DGC *o un arco* DMC. Condotta e divisa in mezzo la corda DC, 6.
il raggio normale GM dividerà in mezzo l'angolo DGC e l'arco DMC (406. III.).

Dividendo nel modo stesso l'Angolo DGM, e poi la sua metà ec., si avrà un quarto, un ottavo ec. dell' angolo DGC; onde può dividersi un angolo in 2, 4, 8, 16 ec. parti eguali: ma il dividerlo in 3, 5, 7, 9 ec. son problemi più alti.

408. II. *Far passare una circonferenza per tre dati*
punti A, B, D *non posti in linea retta*. Condotte AB, BD 8.
e divise in mezzo con le normali FL, GI, se si conducano CA, CB, CD, sarà (402. I.) CA = CB = CD, e la circonferenza descritta col raggio CA passerà per i tre punti A, B, D.

8. Dunque *tre punti* A, B, D *non posti in linea retta determinano la posizione d' un circolo*; onde due circonferenze non posson tagliarsi in più di due punti: se si tagliassero in tre, coinciderebbero.

409. III. *Trovare il centro d' un circolo o d' un arco*. Condotte due corde, e divise in mezzo con due normali, il punto del loro incontro sarà il centro cercato (408).

Tangenti.

7. Una retta MT che ha un sol punto M comune con la circonferenza FMG, si chiama *Tangente*, e il punto comune M si chiama *punto di contatto*.

410. I. *Se* MT *sia tangente in* M, *il raggio* CM *le sarà normale*. Poichè CM è più corta d'ogni altra linea COK (394): dunque ella misura la distanza di C da MT, dunque le è normale (404).

II. Reciprocamente, *se il raggio* CM *sia normale alla retta* MT, *sarà* MT *tangente in* M. Perchè CM normale è più corta d' ogn'altra COK (404); dunque tutti i punti K di MT son fuori del circolo fuorchè M; dunque MT è tangente in M.

411. Dunque se voglio una tangente al punto M d' una circonferenza, conduco ad M il raggio CM, e alzo in M la normale MT (405. III.).

9. 412. *Se due o più circoli si tocchino in un punto* o fuori o dentro, *la retta che passa per i centri, passa anche per il punto di contatto*. Poichè la stessa tangente MT è normale ai raggi CM, AM; questi dunque formano una sola retta $CA = CM \pm AM$ (402. III.)

Linee rette parallele.

10. 413. Coincidano le rette AB, CD e s' intenda CD allontanarsi da AB: se l'allontanamento dei suoi punti è ineguale, come in *cd*, le AB, *cd* sono inegualmente inclinate in F, *p* ad una stessa retta NQ, e diconsi *convergenti* o *divergenti* se prolungate si accostano o si

discostano sempre più. Se l'allontanamento d'ogni suo punto è eguale, come in CD, le AB, CD sono egualmente inclinate in F, G alla stessa NQ, e chiamansi *parallele* o *equidistanti*. FIG. 10.

414. Segue da ciò 1°. che le normali GE, HF condotte a CD tra le parallele, AB, CD, sono eguali: 2°. che due parallele prolungate, mai non s'incontrano: 3°. che l'angolo NFB = FGD o NFA = FGC, *esterno* ed *interno*: 4°. che anche AFG = FGD (400) o BFG = CGF, angoli *alterni interni*: 5°. che anche NFB = QGC o NFA = QGD, angoli *alterni esterni*: 6°. che BFG + FGD = 180°, angoli *interni dalla stessa parte*.

Reciprocamente, o gli angoli *corrispondenti* (esterno ed interno, o alterni) sieno eguali, o gl'interni dalla stessa parte eguaglino 180°, o sia la normale GE = HF, le rette AB, CD saranno sempre parallele, perchè non potranno convergere o divergere; ed essendo equidistanti in due punti, lo saranno in tutti gli altri (392).

415 Per condurre da un punto dato G la parallela GD ad AB, descrivo con un raggio GF e coi centri G, F gli archi FLM, GK. Prendo FL = GK; e GL condotta per G, L sarà la parallela cercata; poichè GK = FL dà AFG = FGD (414).

416. Dunque 1°. sono eguali i due angoli BAC, NLM che hanno i loro lati AB, LN e AC, LM paralleli; poichè prolungata NL fino ad AC, si avrà NLM = 11.
NDC = BAC: 2°. per condurre una normale AF all'estremità A della linea AB, si condurrà la normale CD 12.
sopra AB e poi AF parallela a DC: 3°. due corde parallele FG, IL tagliano due archi eguali FI, LG; perchè il 7.
raggio CM normale ad FG, lo è anche ad IL, atteso CDF = CHI (414): ora FIM = MLG ed IM = ML (406); dunque FIM — IM = MLG — ML, ovvero FI = GL. Lo stesso è se una delle parallele fosse tangente.

417. Più di due parallele hanno le proprietà stesse delle due che abbiamo considerate.

Misura degli Angoli.

418. *Determinar* l'arco del circolo AHGA che mi-
13. sura *l'angolo del segmento*, fatto dalla tangente AB e dalla corda AD, cioè BAD. Condotti il diametro HCG parallelo ad AD, il raggio CF perpendicolare ad AD, ed il raggio CA al punto di contatto, sarà l'angolo retto FCG = BAC: ma ACG = DAC (414); dunque $BAD = FCA = FA = \frac{AFD}{2}$; dunque *l'angolo del segmento* BAD *ha per misura la metà dell'arco sotteso dalla corda* AD.

419. Onde *l'angolo* DAK *tra due corde* DA, AK *ha per misura la metà dell'arco* DK *tra i suoi lati*: poichè $BAK = \frac{1}{2} AFDK$, $BAD = \frac{1}{2} AFD$, e $BAK - BAD = DAK = \frac{1}{2}(AFDK - AFD) = \frac{1}{2} DK$.

Dunque 1°. *L'angolo centrale* DCK *è doppio dell'*
14. *iscritto* DAK *appoggiato sullo stesso arco* DK; 2°. *l'an-*
e *golo iscritto appoggiato sul diametro è retto*; 3°. *gli an-*
15. *goli iscritti appoggiati sullo stesso arco dello stesso circolo sono eguali*; 4°. *e se sulla base comune* AB *avranno eguale un dei lati, per es.* AD = BG, *avranno necessariamente anche l'altro* BD = AG (396. 2°.).

Quindi può condursi una tangente da un punto
16. A dato fuori della circonferenza. Unisco A e C, e sulla retta AC descrivo un circolo che taglierà il dato ne' punti M, M'; e poichè condotte AM, MC, l'angolo CMA è retto, la MA normale a CM, è tangente in M (410. II.). Il problema ha due soluzioni, potendosi condurre da A anche la tangente AM'.

420. Determinar l'arco del circolo BEFB che misura
17. l'angolo *eccentrico* BAD col vertice dentro al circolo. Suppongo acuto l'angolo BAD e prolungando BA, AD in G, F, conduco GE parallela ad AD, ed ho $BAD = BGE = \frac{1}{2}(BD + DE) =$

DE) $= \frac{1}{2}$(BD + FG) (416). Se l'angolo eccentrico è ottu- 17.
so come BAF, sarà BAF $= 180° -$ BAD $= \frac{1}{2}$(BFGDB - BD $-$ FG) $= \frac{1}{2}$ (BF + GD); dunque *l'angolo eccentrico ha per misura la metà degli archi compresi tra i suoi lati e il loro prolungamento*.

421. Determinar l'arco del circolo BFMB che misura
l'angolo *circoscritto* BAD col vertice fuor del circolo. Con- 18.
dotta GE parallela ad AD, sarà BAD = BGE $= \frac{1}{2}$ BE $= \frac{1}{2}$(BD $-$ ED) $= \frac{1}{2}$(BD $-$ GI). Se AD divenga la tangente AF, sarà FAB $= \frac{1}{2}$(FB $-$ FG); onde se AM è l'altra tangente, sarà FAM $= \frac{1}{2}$(FBM $-$ FGM).

F I G U R E.

422. *Figura* è lo spazio terminato da linee per ogni parte. Se son rette, la figura è *rettilinea*; se son curve, *curvilinea*. Le linee sono i *lati* della figura, e la loro somma ne è il *contorno* o *perimetro*. Quì parliamo delle sole figure rettilinee o dei *poligoni*; e poichè per chiudere uno spazio son necessarie almeno tre rette, il più semplice poligono è il *triangolo*, figura di tre angoli e di tre lati; indi viene il *quadrilatero*, figura di quattro lati, il *pentagono* di 5, l'*esagono* di 6, l'*ettagono* di 7, l'*ottagono* di 8, l'*enneagono* di 9, il *decagono* di 10 ec. che tutti facilmente si riducono al triangolo.

Triangolo.

423. Un Triangolo coi tre lati uguali si chiama *equilatero*; con due, *isoscele* o *equicrure*; se tutti son diseguali, *scaleno*. Se abbia due angoli eguali, dice-

si *isogonio*, e se si consideri un suo angolo o acuto o ottuso o retto si chiama o *acuziangolo* o *ottusiangolo* o *rettangolo*: il lato opposto a quest' angoli si chiama *base*, e quando l' angolo è retto, anche *ipotenusa*. Ora due lati d' un triangolo facendo una linea spezzata, son sempre maggiori del terzo (393).

19. 424. Un triangolo ABC per i cui vertici A, B, C passa un circolo (408), si trova *iscritto* nel circolo, e l' angolo $ABC = \frac{1}{2} ADC$ (419), $ACB = \frac{1}{2} AEB$, $BAC = \frac{1}{2} BFC$: dunque $ABC + ACB + BAC = \frac{1}{2} AEFDA = 180°$, *somma dei tre angoli d' un triangolo*.

425. Onde 1°. prolungato un lato CA, *l' angolo esterno* BAF *eguaglia la somma de' due interni opposti* ABC, ACB; poichè $ABC + ACB + BAC = 180° = FAB + BAC$: dunque $FAB = ABC + ACB$.

426. 2°. Un angolo d un triangolo è il supplemento della somma dei due altri; perciò *data la somma* s *di due angoli d un triangolo*, *il terzo è* $180° - s$.

427. 3°. Un triangolo ha un solo angolo retto o ottuso, e i due altri son sempre acuti.

4°. Un angolo acuto d' un triangolo rettangolo è complemento dell' altro; onde se l' uno è a, l' altro sarà $90° - a$.

428. 5°. In un triangolo i lati opposti agli angoli eguali sono eguali, e reciprocamente. In fatti le corde eguali AB, BC sottendono archi eguali, e reciprocamente.

6°. In un triangolo il più grand' angolo è opposto al lato più grande, il più piccolo al più piccolo, e reciprocamente. Ma le corde non crescono come gli angoli; e un angolo doppio, per esempio, non è opposto a una corda doppia. La Trigonometria dà la proporzione di questi aumenti.

429. 7°. In un triangolo isoscele, dato un ango-

 FIG.

lo, si hanno i due altri. Infatti dato $A=C$, si avrà $B=180^\circ-2A$: e dato B, si avrà $2A=180^\circ-B$, 20.
ed $A=C=90^\circ-\frac{1}{2}B$.

8°. Gli angoli opposti ai lati eguali nei triangoli isosceli son sempre acuti.

9°. In un triangolo equilatero, essendo gli angoli tutti eguali, sarà ciascuno $=60^\circ$.

430. 10°. In qualunque triangolo DEF restando la stessa base DF e crescendo i lati DE, FE e perciò anche gli angoli FDE, DFE, scema continuamente l'angolo E, onde se il vertice E si allontani all'infinito da DF, l'angolo E diverrà infinitesimo o nullo, gli angoli FDE, DFE non differiranno da 180°, e i lati DE, FE saranno paralleli (414). 5.

11°. Se un angolo d'un triangolo sia infinitesimo o nullo, la somma degli altri due sarà 180°.

431. Se dal vertice B d'un triangolo isoscele ABC si abbassi la normale BF sulla base AC, ogni punto di FB sarà equidistante da A e C (402. III.), e perciò la base AC sarà divisa in mezzo in F. 20.

Osservazione. Se i due angoli della base sieno acuti, la normale abbassata dal vertice caderà dentro al triangolo, se un di essi sia ottuso, caderà fuori. La dimostrazione è facile. 21.

Similitudine ed egualità dei Triangoli.

432. Due triangoli ABC, *abc* son *simili* se han tutti gli angoli respettivamente uguali cioè se ABC = *dbf*, BAC = *bdf* e ACB = *dfb*. In essi i lati opposti agli angoli eguali si chiamano *omologhi*; e in generale *le dimensioni omologhe* di due figure son le linee dello stesso nome o condotte nella maniera stessa in ambedue: tali sono in due circoli i raggi, i diametri, le circonferenze, gli archi di un numero eguale di gradi, le loro corde ec. 22. e 23.

433. I. *Due triangoli con due angoli respettivamente eguali, son simili*, perchè anche il terzo è eguale

22. in ambedue (426): onde *due triangoli rettangoli con*
e *un angolo acuto eguale, son simili.*

23. 434. II. *Due triangoli son simili quando tutti i loro lati omologhi son paralleli*, perchè allora tutti i loro angoli son respettivamente eguali.

435. III. *Due triangoli son simili quando i lati dell' uno prolungati se occorra, son normali ai lati dell' altro che saranno omologhi ai primi.* Faccia l' un dei triangoli un quarto di rivoluzione intorno ad un punto fisso; tutti i suoi lati diverranno paralleli a quelli dell' altro.

436. IV. Se un numero qualunque di parallele DF, IL, AC taglia i lati d' un angolo ABC, tutti i triangoli BDF, BIL, BAC saranno simili; perchè oltre l' angolo comune B, tutti gli angoli BDF, BIL, BAC sono eguali (414).

437. Se il triangolo *bdf* s' immagini posto sul triangolo simile ABC in modo che l' angolo *b* cada sul suo eguale B, e i lati *bd*, *bf* sui loro omologhi BA, BC, il lato *df* rappresentato da DF, sarà parallelo alla base AC. In fatti il triangolo BDF (= *bdf*) è simile ad ABC; dunque l' angolo BDF = BAC; e DF, AC son parallele (414).

438. V. *Due triangoli con due lati e l' angolo contenuto eguali, sono eguali e simili.* Poichè se il triangolo BCE oltre l' angolo C e il lato BC comuni col triangolo BCA, abbia anche il lato CE = CA, i due triangoli si confonderanno.

439. VI. *Due triangoli che sopra basi eguali hanno eguali gli angoli corrispondenti, sono eguali e simili.* Poichè se il triangolo BCE oltre la base BC e l' angolo C comuni col triangolo BCA, abbia anche l' angolo CBE = CBA, i due triangoli si confonderanno.

22. 440. VII. *Due triangoli* ABC, abc *con tutti i loro*
e *lati omologhi eguali, sono eguali e simili.* Soprappo-
24. sti i triangoli, onde *ac* cada sopra AC, essendo AB = *ab* e BC = *bc*, il punto *b* si troverà su i due archi descritti l' uno col centro A e raggio AB, l' altro col

centro C e raggio CB; dunque sarà nella loro intersezione B, e il triangolo *abc* si confonderà con ABC. FIG. 22: e

441. VIII. *Due triangoli* abc, ABC *coi lati* ab = AB, bc = BC, *e con gli angoli eguali* a, A *opposti a uno dei lati eguali, sono eguali e simili, purchè gli angoli* C, c *opposti all' altro lato eguale, sieno ambedue acuti o ottusi*. Soprapposti i triangoli, essendo *ba* = BA, i punti *b*, *a* caderanno in B, A, e perchè l' angolo BAC = *bac*, il punto *c* caderà in qualche punto di AC. Ma *bc* = BC; dunque il punto *c* dee cadere altresì in qualche punto dell' arco CE descritto col centro B e raggio BC. Dunque caderà o in E o in C. Ma il triangolo BEC è isoscele, e però gli angoli eguali E, C sono acuti (426) e l' angolo BEA è ottuso; dunque se gli angoli C, *c* sono acuti, il punto *c* caderà in C, e *abc* si confonderà con ABC: e se gli angoli *c*, C, o *e*, E sono ottusi, il punto *c* caderà in E, ed *aeb* si confonderà con AEB. 24.

442. Onde 1°. *due oblique parallele* AB, CD *comprese tra due altre parallele* AD, BC, *sono eguali*. Poichè condotte AF, DE normali a BC, il triangolo ABF sarà simile al triangolo CDE: ma (414) AF = DE; dunque (439) il triangolo ABF è eguale al triangolo CDE; dunque AB = CD; e così si proverà AD = BC. È facile anche il provare che *due rette le quali comprendono due altre rette parallele ed eguali, sono eguali e parallele*. 25.

443. 2°. In qualunque triangolo ABD può *iscriversi* un circolo, cioè può farsi un circolo che tocchi tutti i suoi lati. Poichè divisi in mezzo due dei suoi angoli, e condotte dal punto C d' incontro le normali sopra i tre lati, i triangoli ACE, ACG e BCG, BCH sono eguali; dunque CE = CG = CH possono esser raggi d' uno stesso circolo iscritto nel triangolo. 26.

444. Si ha anche BG = BH, HD = ED, AE = AG, e chiamando q il semiperimetro del triangolo ABD sarà 1°. q = AE + ED + BH = AD + BH; 2°. q = BD + AE = AB + ED; onde sommando le due equazioni, 2AE + BD = AD + AB, cioè AE $= \frac{1}{2}$ (AD + AB − BD) = q − BD, e perciò DE = q − AB; dunque il punto E è determinato, e possono esserlo nel modo stesso i punti G, H; onde basterà far passare un circolo per questi tre punti.

26\. 445. Se il triangolo sia rettangolo in B, l'angolo CBH metà di ABD, ed il suo complemento BCH sarà di 45° e il triangolo BCH sarà isoscele; onde dalla prima equazione BH ($=$ CH) $= q -$ AD si vede che il circolo iscritto ha per raggio il semiperimetro meno l'ipotenusa.

Altri Poligoni e loro principali proprietà.

446. Vi son tre sorte di Poligoni: gli *irregolari* che hanno gli angoli e i lati ineguali; i *simmetrici* che hanno tutti i lati opposti paralleli ed eguali; e i *regolari* che hanno tutti i lati e tutti gli angoli eguali. I Poligoni diconsi *isoperimetri* quando hanno un egual contorno o perimetro.

Il quadrilatero simmetrico si chiama *Parallelogram-*
27\. *mo;* il regolare, *Quadrato;* il quadrilatero con due la-
28\. ti paralleli, *Trapezio*; il parallelogrammo con tutti i
29 lati eguali ma con angoli ineguali, *Rombo* o *Losanga;*
e il parallelogrammo coi lati non tutti eguali ma con
30\. tutti gli angoli retti, *Parallelogrammo rettangolo* o so-
31\. lamente *Rettangolo*.
32\. Una retta AD che attraversa un poligono da un
angolo all'altro si chiama *Diagonale*. L'*angolo salien-*
33\. *te* ha il vertice fuor della figura, come ABC; l'ango-
lo *rientrante* lo ha dentro, come CDE.
447. Le diagonali AC, AD, AE condotte da un
32\. angolo A dividono il poligono di lati n in un numero
$n-2$ di triangoli, come è chiaro, i cui angoli son gli angoli stessi del poligono: dunque la somma di questi angoli è $S = 180°\,(n-2)$.

Dunque 1°. in un quadrilatero, $S = 360°$; in un pentagono, $S = 540°$, ec.; 2°. l'angolo d'un poligono regolare che gli ha tutti eguali, sarà $\frac{S}{n} = \ldots \frac{180°(n-2)}{n} = 180°\left(1-\frac{2}{n}\right)$, tanto più ottuso o più prossimo a 180°, quanto n è più grande (268).

448. I supplementi degli angoli salienti son 360°.

Poichè i salienti coi lor supplementi son $180° \times n$, e i soli salienti son $180° (n-2)$; dunque i supplementi son $180° \times n - 180° (n-2) = 360°$. FIG. 32.

449. Se il Poligono abbia un numero s d'angoli salienti ed uno r di rientranti CDE, FHI ec. sarà (447) $n = s + r$, e la somma di tutti $S = (s + r - 2)\pi$ posto $\pi = 180°$; e poichè un rientrante interno *abc* equivale a $2\pi -$ CDE (401), la somma di un numero r di rientranti interni sarà $\sigma = 2\pi r -$ CDE $-$ FHI ec.; perciò la somma dei soli salienti $\Sigma = S - \sigma = (s + r - 2)\pi - 2\pi r +$ CDE $+$ FHI ec., e la differenza tra i salienti e i rientranti $D = \Sigma -$ CDE $-$ FHI ec. $= (s - r - 2)\pi$. 33.

Onde 1°. se $s > r + 2$ ovvero $s < r + 2$, la somma in gradi dei salienti supererà quella dei rientranti o ne sarà superata: 2°. se $s = r + 2$ e perciò $s + r = n = 2(r + 1)$, la somma degli uni eguaglierà quella degli altri, e i lati o angoli del poligono saranno in numero pari: 3°. se $s = r$ e perciò $s + r = n = 2r$, sarà $D = -2\pi = -360°$, e il poligono avrà pure un numero pari di lati o d'angoli: 4°. se alla somma $\int = 2\pi = s\pi - \Sigma$ dei supplementi (448) si aggiungano gli angoli rientranti, sarà $\int +$ CDE $+$ FHI ec. $= s\pi - \Sigma +$ CDE $+$ FHI ec. $= s\pi - D = (r + 2)\pi$.

Poligoni simmetrici.

450. I lati opposti d'un poligono simmetrico dovendo esser paralleli ed eguali, è chiaro 1°. che il numero di questi lati è sempre pari; 2°. che ogni poligono regolare di numero pari di lati è simmetrico. Onde condotte da ogn'angolo d'un poligono simmetrico le diagonali agli angoli opposti, i triangoli opposti al vertice, come AFB, DFC, sono eguali. Poichè il lato AB è eguale e parallelo all'omologo DC; dunque l'angolo FDC = FBA, FCD = FAB, e i triangoli AFB, DFC son simili: ma il lato omologo AB = DC; dunque sono eguali. 34. e 35.

451. Onde AF = FC, BF = FD ec., e tutte le diagonali AC, DB ec. si tagliano in due parti eguali in un punto stesso F che può chiamarsi il *centro* del poli-

34. gono: perciò qualunque diagonale AC lo divide in
e due parti eguali e simili: e in generale ogni retta IL
35. che passa per il centro F, è divisa in mezzo in F e divide il poligono in due parti eguali e simili, attesa l'eguaglianza e similitudine dei triangoli FIB, DFL, ed AIF, LCF.

452. Quindi per descrivere un poligono simmetri-
35. co di un numero dato di lati, per esempio di sei, condotte comunque per un punto F tre rette EFG, DFB, AFC, prendo FB = DF, AF = FC, EF = GF e per i punti A, B, G, C, D, E conduco AB, BG ec., lati del poligono: perchè i triangoli AFB, DFC con due lati eguali intorno ad angoli eguali, sono eguali e simili; onde AB è eguale e parallela a DC ec.

Poligoni regolari.

453 Divisi in mezzo con le rette BC, DC gli
36. angoli eguali ABD, BDF d'un poligono regolare, e congiunte FC, GC ec., i triangoli CBD, CDF ec. sono isosceli (428) ed eguali (438); dunque il circolo del raggio CB passa per tutti i vertici del poligono che perciò vi resta *iscritto*. E poichè nei triangoli ACB, BCD isosceli, le normali CK, CL dividono in mezzo i lati AB, BD (431), e l'angolo CBK = CBL, saranno eguali e simili i triangoli rettangoli CBK, CBL; dunque CK = LC: così si proverà CL = CM ec.; dunque il circolo del raggio CK tocca tutti i lati del poligono, che perciò gli è *circoscritto*.

454. Quindi il lato di un poligono regolare iscritto è la corda d'un arco di $\frac{1}{n}.360°$, posto n il numero de' lati: così il lato di un triangolo equilatero iscritto è la corda d'un arco di $\frac{1}{3}.360° = 120°$.

455. I. Iscrivere in un dato circolo un triangolo equilatero. Col punto B della circonferenza come centro, e col raggio BC, descrivo l'arco ACD che taglia

FIG.

glia in A, D la circonferenza: per A, D conduco AD, e presa AG = AD, il triangolo ADG sarà equilatero. Poichè condotte AB, BD, i triangoli ACB, BCD sono equilateri: dunque gli archi AB, BD son di 60°, e l'arco totale ABD di 120°, la cui corda è il lato del triangolo equilatero (454). 36.

456. Poichè l'arco ARB è di 60°, la sua corda AB è il lato dell'esagono regolare: ma AB = CB; dunque *il lato dell'esagono regolare iscritto è eguale al raggio*. Se l'arco AB si divida in mezzo, la corda di questa metà sarà il lato del dodecagono; il che può dirsi di tutti gli altri poligoni.

457. Nel triangolo isoscele BAC la normale AQ divide in mezzo il raggio CB $= r$; dunque CQ $= \frac{1}{2} r$ e $\sqrt{(AC^2 - CQ^2)} = AQ = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$; dunque $2AQ = r\sqrt{3}$, lato del triangolo equilatero.

458. II. Iscrivere un quadrato in un dato circolo. Condotti i diametri AD, BF normali l'uno all altro, essi taglieranno la circonferenza nei punti A, B, D, F, e le corde AB, BD, DF, FA daranno il quadrato, per esser gli archi AB = BD = DF = AF = 90°. 37.

459. Onde fatto il raggio AC $= r$, si avrà il lato del quadrato AF $= \sqrt{(CA^2 + CF^2)} = r\sqrt{2}$. Del resto anche applicando nel circolo i lati AK dell'esagono e KF del dodecagono (456) si avrebbe il lato AF del quadrato; poichè essendo l'arco AK = 60° e l'arco KF = 30° (454), sarebbe AKF = 60° + 30° = 90°.

460. III. Iscrivere in un circolo dato un decagono regolare. Sia AB il lato richiesto, e si conducano i raggi AC, BC e la retta BE che divida in mezzo l'angolo ABC. Ora l'angolo ACB = 36°; dunque l'angolo ABC = BAC = 72°; ma BE divide in mezzo l'angolo ABC; dunque ABE = 36° = ACB; dunque i triangoli ABE, ACB son simili; dunque AE: AB :: AB : AC; ma l'angolo EBC = 36° = ACB; dunque il triangolo CEB è isoscele, e perciò EB o AB = EC, ed AE : EC :: EC : AC: se dunque di divida il raggio AC *in media ed estrema ragione* nel punto E (494), il maggior segmento EC sarà il lato AB del decagono regolare. Fatto AC $= r$, EC = AB $= x$, sarà AE $= r - x$, e si a- 38.

38. vrà $r-x:x::x:r$: onde $xx+rx=rr$, e $x=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$, lato del decagono.

461. IV. Iscrivere in un circolo un pentadecagono regolare. Presa AB eguale al raggio e condotta AD eguale
39. al lato del decagono, la corda BD sarà il lato del pentadecagono. In fatti l'arco ADB $=60°$, l'arco AD $=36°$, e $60-36=24$, arco del pentadecagono (454). Potrà dunque aversi anche un arco di 12°, e di 6°, e di 3° (407), e una circonferenza sarà divisibile in 120 parti, ciascuna di 3°.

462. Colla Geometria Elementare iscrivonsi dunque in un circolo i poligoni regolari di 3, 6, 12 lati ec. (456), di 4, 8, 16 ec. (458), di 5, 10, 20 ec. (460), di 15, 30, 60 ec. (461). Ma gli altri non posson iscriversi senza risolver dell' equazioni tanto più alte, quanto è maggiore il numero dei lati, come vedremo.

40. 463. Per circoscrivere a un cerchio dato un poligono regolare, vi si iscriva; e dal centro C abbassata sopra AD la normale CB, si faccia passar per B la tangente EBF che incontrerà in E ed F i raggi CA, CD prolungati; quindi da F si conduca la tangente FMG fino al raggio CT prolungato, e così successivamente; saranno EF, FG ec. i lati del poligono cercato. Poichè condotto il raggio CM, i triangoli rettangoli (410) FCB, FCM colla base comune CF e col lato CB $=$ CM, avranno anche FB $=$ FM (419.4°) e perciò gli angoli BFC $=$ CFM (440), BCF $=$ FCM $=$ MCG, onde FM $=$ MG ed EF $=$ FG $=$ ec.; dunque ciascun lato del poligono EFGH ec. tocca il circolo BMN ec. ed è perciò circoscritto.

464. Se CA $=r$ e AD $=b$, lato del poligono iscritto d'uno stesso numero di lati, si avrà AQ $=\frac{1}{2}b$, QC $=$ .... $\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}b^2)}$ e per i triangoli CAQ, CEB simili, QC ($=\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}b^2)}$): AQ ($=\frac{1}{2}b$) :: CB ($=r$) : EB; dunque $2EB=\frac{2rb}{\sqrt{(4rr-bb)}}=$ EF, lato del poligono circoscritto. Onde il lato del quadrato circoscritto è $2r$, quello del triangolo equilatero è $2r\sqrt{3}$, doppio del lato dell' iscritto ec.

Linee rette proporzionali.

465. Se una prima retta sta ad una seconda, come una terza ad una quarta, queste rette son *proporzionali* fra loro *direttamente*: ma se la prima sta alla seconda come la quarta alla terza, le due prime son proporzionali *reciprocamente* alle seconde. Se la prima sta alla seconda come la seconda alla terza, la proporzione è *continua*, e diverrà una *progressione* se la prima sta alla seconda come la seconda alla terza, come la terza alla quarta, ec. In generale tutte le proprietà dimostrate delle quantità, convengono anche alle linee rette proporzionali. Del resto, qui si tratta di proporzioni e progressioni geometriche.

466. Prese sulla retta AB le parti AD = DG =
GI ec. e condotte le parallele DF, GH, IK ec. sulla 41.
retta AC, saranno le parti AF = FH = HK ec. Poichè condotte DE, GR, IS parallele ad AC, i triangoli ADF, DGE, GIR saranno eguali; dunque AF = DE = GR = FH = HK = ec.; dunque AD : AF :: DG : FH :: GI : HK, e perciò AP somma di tutti gli antecedenti, sta ad AQ somma di tutti i conseguenti, come un antecedente AD al suo conseguente AF, o come un numero di parti di AB al numero stesso di parti simili di AC, per esempio AG : AH :: AI : AK :: DI : FK ec. (212).

467. Dunque 1°. *Se due rette* AE, AD *son tagliate da due o più parallele* ED, CB, *le loro parti* 42.
CE, BD *son proporzionali alle rette intere* AE, AD.

468. 2°. *Se due triangoli* ABC, abc *son simili, tutti i loro lati omologhi son proporzionali*. Poichè se
l'angolo B = *b*, presa sopra AB la parte DB eguale 43.
al lato omologo *ab*, e condotta DF parallela ad AC, e
i triangoli BDF, *abc* saranno eguali (439): ma AB : 44.
BC :: BD : BF; dunque AB : BC :: *ab* : *bc*. Si proverà egualmente che AB : AC :: *ab* : *ac*, che AC : CB :: *ac* : *cb*.

43. 469. Reciprocamente, *due triangoli* ABC, abc *son*
e *simili se hanno tutti i loro lati omologhi proporziona-*
44. *li*. Per la costruzione passata, i triangoli DBF, ABC son simili; dunque $AB:BD::AC:DF::CB:BF$; ma per ipotesi $AB:ab\ (=DB)::AC:ac::BC:bc$; dunque $DF=ac$ e $BF=bc$; dunque i triangoli BDF, *abc* sono eguali e simili; e poichè il primo è simile ad ABC, lo sarà anche il secondo.

470. *Due triangoli* ABC, abc *son simili se hanno un angolo eguale* B *e* b, *ed i lati intorno a quest' angolo proporzionali*. Fatta la solita costruzione, $AB:BC::ab:bc::BD\ (=ab):BF$: dunque $BF=bc$, onde $DF=ac$; dunque il triangolo *abc* è eguale e simile a BDF e perciò ad ABC.

46. 471. Diviso un angolo A d' un triangolo ABC
in mezzo con la retta AD, i lati BA, AC saranno proporzionali ai *segmenti* BD, DC. Poichè se BF parallela ad AD incontri in F il lato AC prolungato, si avrà $BD:DC::FA:AC$: ma l' angolo $DAC = DAB = ABF = BFC$; dunque il triangolo FAB è isoscele, onde $FA = AB$, e $BD:DC::BA:AC$.

472. E le parti di due rette che si tagliano tra
34. le parallele, son proporzionali alle rette intere.
e
473. *Se dal vertice dell' angolo retto* A *si abbas-*
35. *si sull' ipotenusa* BC *la normale* AD, 1°. *i triangoli*
47. BAD, ADC *saranno simili tra loro e al triangolo totale* BAC: 2°. *la normale* AD *sarà media proporzionale tra i segmenti* BD, DC: 3°. *ciascun lato* AB *o* AC *sarà medio proporzionale tra l' ipotenusa* BC *e il* segmento adjacente *a questo lato*, *cioè* $BC:AB::AB:BD$, e $BC:AC::AC:DC$. I°. I triangoli rettangoli BAD, BAC hanno l' angolo B comune, e i triangoli rettangoli ADC, BAC hanno comune l'angolo C; dunque son simili, e due triangoli simili ad uno stesso triangolo, lo sono anche tra loro. II°. I triangoli simili BAD, ADC danno $BD:AD::AD:DC$, e però $AD^2 = BD \times DC$. III°. i triangoli simili BAD, BAC danno $BD:BA::BA:BC$, e i trian-

 FIG.

goli simili BAC, ADC danno DC : AC :: AC : BC. 47.

474 Dunque $BA^2 = CB.BD, CA^2 = BC.CD$, e $BA^2 + CA^2 = CB(BD + CD) = CB^2$, cioè *nel triangolo rettangolo il quadrato dell ipotenusa eguaglia la somma de' quadrati dei lati.*

475. Sia $AB = a, AC = b, BC = c$, e sarà $c^2 = a^2 + b^2$; onde dati due lati d'un triangolo rettango- 48.
lo, si ha il terzo: così $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$, $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$. Se $a = b$, sarà $c = a\sqrt{2}$: ma c è la diagonale del quadrato AD; dunque *la diagonale è incommensurabile col lato del quadrato.*

476. Se dal vertice A d'un triangolo qualunque ABC si abbassi sulla base BC la normale AD, e sia 49.
$BC = a$, $AB = b$, $AC = d$ e $b < d$, avremo $b^2 - DB^2 = AD^2 = d^2 - DC^2 = d^2 - (a \mp DB)^2$, preso il segno di sopra se la normale è dentro: dunque $DB = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{\pm 2a}$ e $DC = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2a}$.

Dunque $d^2 = b^2 - DB^2 + (a \mp DB)^2 = b^2 + a^2 \mp 2a.DB$, cioè nei triangoli acuziangolo e ottusiangolo il quadrato della base AC eguaglia i quadrati dei lati AB, BC meno o più il doppio rettangolo del lato BC su cui cade la normale, nella retta DB compresa tra la normale e l'altro lato AB.

Proporzionali nel Circolo.

477. *La normale o ordinata* MP *condotta da un punto qualunque* M *della circonferenza* AMB *sul dia-* 50.
metro AB, *è media proporzionale tra i segmenti o ascisse* AP, PB, *e dà* $PM^2 = AP \times PB$. Condotte AM, MB, il triangolo AMB è rettangolo, onde $MP^2 = AP \times PB$.

478. Sia il diametro $AB = 2r$, l'*ascissa* $AP = x$, onde l'altra ascissa $BP = 2r - x$, e l'*ordinata* $PM = y$; avremo generalmente $y^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2$, equazione fondamentale che esprime la proprietà del circolo d'aver sempre il quadrato d'ogni

50. sua ordinata eguale al prodotto dell'ascisse corrispondenti. Perciò si chiama questa l *equazione al circolo*; dal cui punto M conducendo la tangente MT fino all incontro dell'*asse* AB, si avrebbe la *normale* $CM = r$, la *sunnormale* $CP = r - x$, la *suttangente* $PT = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx - x^2}{r-x}$ atteso il triangolo rettangolo CMT; ec. ec.

479. Se sia $CP = x$; posta nel centro C l'*origine* dell'ascisse, il triangolo rettangolo CPM darà l'equazione $y^2 = r^2 - x^2$, che esprime la stessa proprietà del circolo; ma la suttangente diverrà $PT = \frac{r^2 - x^2}{x}$, e $PT + CP = CT = \frac{r^2}{x}$; di quì la proporzione CP:CA::CA:CT, onde è facile conoscere il punto T e condurre al dato punto M la tangente TM, la cui espressione si hà dal triangolo rettangolo TMC che dà $TM = AS$ (418) $= \pm\sqrt{(CT^2 - CM^2)} = \pm\sqrt{\left(\frac{r^4}{x^2} - r^2\right)} = \pm\frac{r}{x}\sqrt{(r^2 - x^2)}$.

480. Da questa doppia espressione della tangente AS si raccoglie 1°. che come il negativo si oppone al positivo, così la tangente negativa dee opporsi alla positiva; onde se AS presa al di sopra di AB sia la positiva, AS′ presa al di sotto sarà la negativa: e ordinariamente (108) *il valor negativo d'una linea dee prendersi in un senso contrario a quello in cui si prese il positivo*: 2°. che fatta per esempio, $CP = x = \frac{4r}{5}$, verrà $AS = \pm\frac{3r}{4}$; e fatta $x = 0$, verrà $AS = \pm\infty$: ma presa x negativa, cioè da C verso B, e fatta $CP' = -x = -\frac{4r}{5}$, verrà $AS = \mp\frac{3r}{4}$; e fatta $-x = -r$, verrà $AS = 0$: cioè la tangente AS ha successivamente i valori $+\frac{3r}{4}, \infty, -\frac{3r}{4}, 0, +\frac{3r}{4}, -\infty, -\frac{3r}{4}$ ec., e cominciando positiva, passa per l'infinito e divien negativa, passa per zero e torna positiva, ripassa per l'infinito e ritorna negativa ec.: quindi in generale *le quantità che continuamente variando, passano per l'infinito o per zero, si cangiano di positive in negative e di negative in positive*: onde giacchè le linee variabili posson passare per l'infinito o per zero

senza prender sempre un' opposta situazione, la contrarietà dei segni non sarà sempre un indizio della diametrale opposizion delle linee.

481. *Le parti di due corde che si tagliano in un circolo son reciprocamente proporzionali*, e si ha CF: 51.
AF::FB:FD, ovvero $CF \times FD = AF \times FB$. Poichè condotte AC, BD, i triangoli ACF, FBD in cui l' angolo CFA = DFB, e CDB = CAB (419) son simili, onde CF : AF :: FB : FD.

Con ciò posson risolversi i due seguenti problemi.

I°. Condurre per il dato punto A la corda BAD tale 52.
che sia AD : AB :: m : n. Conduco per A il diametro FG, ed essendo dato il punto A, è nota la sua distanza AC dal centro C. Sia dunque $AC = b$, $CF = r$, $AD = x$, e sarà $AB = \frac{nx}{m}$, $BA \times AD = \frac{nx^2}{m} = FA \times AG = r^2 - b^2$; onde $AD = x = \sqrt{\left[\frac{m}{n}(r^2 - b^2)\right]}$, e $AB = \sqrt{\left[\frac{n}{m}(r^2 - b^2)\right]}$.

II°. Condurre per un punto A una corda BAD eguale alla data retta c. Ritenute le denominazioni di sopra, sarà $AB = c - x$ e $AB \times AD = cx - x^2 = r^2 - b^2$; onde $AD = x = \frac{c + \sqrt{(c^2 + 4b^2 - 4r^2)}}{2}$ e $AB = \frac{c - \sqrt{(c^2 + 4b^2 - 4r^2)}}{2}$,

482. *Le parti esteriori AD, AE di due secanti AB, AC condotte da un punto A fuori d' una circon-* 53.
ferenza, son reciprocamente proporzionali alle intere secanti, e si ha AD : AE :: AC : AB. Poichè condotte BE, DC, i triangoli simili ABE, ADC, che oltre l' angolo comune A hanno eguali gli angoli B, C, danno AD : AE :: AC : AB, onde $AD \times AB = AE \times AC$.

483 Se una delle secanti divien la tangente AM, questa sarà media proporzionale tra la secante intera 54.
AB e la sua parte esteriore AD. Condotte MD, MB, i triangoli simili AMD, AMB, che oltre l' angolo comune A hanno eguali gli angoli AMD, ABM (418. 419), danno AD; AM :: AM : AB, e $AM^2 = AD \times AB$.

484. Nel quadrilatero formato da quattro corde, il prodotto $BD \times AC$ delle diagonali eguaglia i pro- 55.
dotti $BA \times DC + BC \times DA$ dei lati opposti. Poichè condotta DF onde sia l' angolo ADF = BDC, i tri-

55. angoli AFD, BCD in cui ADF = BDC e DAF = DBC, danno DB : BC :: DA : AF, e i triangoli BAD, FDC in cui ABD = FCD e ADB = ADF − BDF = BDC − BDF = FDC, danno DB : BA :: DC : CF. Dunque $CF + FA = AC = \frac{BA \times DC + BC \times DA}{DB}$ e DB ×
56. AC = BA × DC + BC × DA. Quindi se sia $AC = m$, $CB = n$, $BA = d$, e un diametro $CD = 2r$, condotte le corde BD, DA, avremo $2rd = m . BD + n . AD$: ma $BD = \sqrt{(4r^2 - n^2)}$ e $AD = \sqrt{(4r^2 - m^2)}$; dunque $2rd = m\sqrt{(4r^2 - n^2)} + n\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, equazione che scioglie i seguenti problemi.

485. I. Date le corde $AC = m$, $CB = n$ di due archi, trovar la corda $AB = d$ della loro somma. Si avrà $d = \frac{m}{2r}\sqrt{(4r^2 - n^2)} + \frac{n}{2r}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$.

Onde se AC, CB sieno i lati del dodecagono e dell' esagono, sarà AB quello del quadrato (459), e fatto $AC = m = r(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})$ come troveremo or ora, $BC = n = r$ (456) e $\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ (171), verrà $AB = d = 2r\sqrt{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$ (459).

486. II. Date le corde $AB = d$, $BC = n$ di due archi, trovar la corda $CA = m$ della lor differenza. Si avrà $m = \frac{d}{2r}\sqrt{(4r^2 - n^2)} - \frac{n}{2r}\sqrt{(4r^2 - d^2)}$.

Onde se AB, BC sieno i lati dell' esagono e del decagono, sarà CA quello del pentadecagono (461), e fatto $AB = d = r$, $BC = n = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (460), verrà $CA = m = \frac{r}{4}[\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} + \sqrt{3} - \sqrt{15}]$.

487. III. Data la corda AC d' un arco, trovar la corda $AB = d$ del suo doppio. Sarà dunque $AC = m = CB = n$, e perciò $d = \frac{m}{r}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$.

Onde se AC, CB sieno i lati del decagono, sarà BA quello

 FIG.

quello del pentagono, e fatto $AC = CB = m = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (460), verrà $BA = d = \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{2}$ (146). 56.

488. IV. Data la corda $AB = d$ d'un arco, trovar la corda AC della sua metà. Sarà dunque $AC = m = CB = n$, e perciò $dr = m\sqrt{(4r^2 - m^2)}$ ed $m = \sqrt{[2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - d^2)}]}$.

Onde fatto il lato dell'esagono $AB = d = r$ (456), quello del dodecagono sarà $AC = m = r\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = r(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})$ (174): fatto $AB = d = r\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$, il lato del poligono di 24 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2 - \sqrt{(2 + \sqrt{3})}]}$ ec. Parimente fatto il lato del quadrato $AB = d = r\sqrt{2}$ (485), quello dell'ottagono sarà $AC = m = r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$: fatto $AB = d = r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$, il lato del poligono di 16 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2})}]}$ ec. Così fatto il lato del decagono $AB = d = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (460), quello del poligono di 20 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2 - \frac{1}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}]}$ ec.

489. V. Trovare il raggio del circolo, che passa per tre punti A, B, C. Si avrà $r = \frac{dmn}{\sqrt{(4d^2m^2 - [d^2 + m^2 - n^2]^2)}}$. Se il triangolo ABC è rettangolo, si ha $r = \frac{1}{2}d$; dunque il centro del circolo cade allora nel mezzo di AB, ciò che è evidente per altra parte.

Problemi sulle proporzionali.

490. I. Date tre rette a, b, c, trovare una quarta proporzionale $\frac{bc}{a}$. Condotte due rette AD, AE in angolo, prendo sopra AD le parti $AB = a$, $AD = c$, e sopra AE la parte $AC = b$; condotte CB, e DE parallela a CB, sarà AE la quarta proporzionale cercata. Poichè i triangoli simili ACB, AED danno $AB : AC :: AD : AE = \frac{bc}{a}$. Si ha lo stesso coll' inter- 57.

57. sezione di due rette fra due parallele (472). Che se si voglia una terza proporzionale a due date a, b, la costruzione sarà la stessa, e solo bisognerà prendere $AD = AC$.

58. 491. II. Trovar tra due rette a, b una media proporzionale $\sqrt{ab}$. Condotta l'indefinita APB, prendo in essa le parti $AP = a$, $BP = b$, e descritto un semicircolo del raggio $AC = \frac{1}{2} AB$, la perpendicolare PM condotta dal punto di divisione P, sarà la media proporzionale; poichè $PM^2 = AP \times PB$ (477).

59. 492. III Dividere una data retta a nella ragione in cui è divisa un' altra AB. Da A conduco AC eguale alla data a, che faccia con AB un angolo. Unisco i punti C, B, e dai punti di divisione I, F, D di AB conduco parallele a CB le rette DE, FG, IH che divideranno AC nella stessa maniera in cui è divisa AB. In fatti (467) $AB : AC :: AI : AH :: IF : HG :: FD : GE :: DB : EC$.

60. 493. IV. Dividere una retta AB in un numero n di parti eguali. Da A conduco l'indefinita AC, e preso sopra di essa un numero n di parti eguali AE, EG ec., conduco CB e le rette LK, IH ec. parallele a CB: dunque $AB : AC :: AD : AE :: DF : EG :: FH : GI$ ec. Ora $AE = EG = GI$ ec. $= \frac{AC}{n}$; dunque $AD = DF = FH$ ec $= \frac{AB}{n}$.

61. 494. V. Dividere una retta data AB in *media ed estrema ragione*, cioè in modo che il maggior segmento FB sia medio proporzionale tra l intera AB e il minor segmento AF Si alzi da A la normale $AC = \frac{1}{2} AB$, e condotta CB, prendasi $FB = CB - AC$. Avremo dunque $CB^2 = (FB + AC)^2 = AC^2 + AB^2$ cioè $FB^2 = AB^2 - 2AC \times FB = AB^2 - AB \times FB = AB \times AF$; dunque $AB : FB :: FB : AF$.

Costruzion geometrica dell' Equazioni determinate del primo e secondo grado.

Costruire geometricamente un'equazione è un trovare in linee i valori dell'incognita. Se l'equazione è del primo grado, il valor dell'incognita si determina sempre coll'intersezione di linee rette: se è del secondo grado, i due valori dell'incognita si trovano coll' intersezioni della circonferenza del circolo e d'una retta: ma se l'equazione è più alta, bisogna servirsi di differenti curve la cui descrizione è sì difficile, che i risultati danno radici assai meno approssimate di quelle de' metodi puramente algebrici.

495. Se si ha $\frac{ac}{b}=x$, si prenderà (420) una quarta proporzionale dopo b, a, c e si avrà il valore di x. Se $x=\frac{abc}{de}$, si prenderà $m=\frac{ab}{d}$, e dipoi $n=\frac{cm}{e}$, e si avrà $n=x$; e nel modo stesso si costruirà $\frac{aa}{b}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a^4}{b^3}$ ec. Ma se il numerator della frazione sia complesso, come .... $\frac{abc+ccd+mnp}{rq}$, si prenderà come sopra, $k=\frac{abc}{rq}$, $i=\frac{ccd}{rq}$ ed $f=\frac{mnp}{rq}$, ed unendo insieme k, i, f, si avrà una retta eguale alla frazione proposta. Se poi sieno complessi il numeratore e il denominatore, come $\frac{abc+cfg}{mk+nh}$, si prenderà $l=k+\frac{nh}{m}$ e la frazione diventerà $\frac{abc+cfg}{lm}$, che si costruirà come sopra. Parimente avendo da costruire $x=\frac{abcc+q^3h+noqk-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$, si prenderà $f=i-\frac{kl}{q}+\ldots\frac{cmd}{qq}$, e si avrà $x=\frac{abcc}{fqq}+\frac{qh}{f}+\frac{okn}{fq}-\frac{m^3p}{fqq}$ che si sa costruire.

Talora la costruzione è più facile. Sia $x=\frac{ab+bc}{c+d}$: una quarta proporzionale dopo $c+d, a+c, b$ dà il valor di x. Sia $x=\frac{a^2-b^2}{c}$: una quarta proporzionale dopo c, $a+b$,

$a - b$ dà x. Sia anche $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$, prendo $m = \frac{ab}{c}$, ed ho $x = \frac{cm - mm}{m + c}$, quarta proporzionale dopo $m + c$, $c - m$, m.

496. Passiamo al secondo grado. Se sia $xx = am$, cioè $x = \sqrt{am}$, prendo una media proporzionale tra a ed m, e questa dà x. Se $x = \sqrt{(ab + bc)}$, prendo una media proporzionale tra b e $a + c$; se $x = \sqrt{(a^2 + bc)}$, fatto $m = \frac{bc}{a}$, sarà $x = \sqrt{a(a + m)}$ che si sa costruire.

497. Sia ora $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; una media proporzionale tra $a + b$ ed $a - b$ darà x. Si può anche costruirla descrivendo col diametro $AB = a$ un semicircolo ACB; applica-
62. tavi la corda $AC = b$ ed unita CB, questa sarà $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, per esser rettangolo il triangolo ACB. Dovendo costruire $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ si prenda $m = \frac{b^2}{a}$, e poi una media proporzionale tra a ed $a + m$: ma è più semplice il valersi d'un triangolo rettangolo ACB, i cui lati AC, CB sieno a e b; l'ipotenusa AB sarà $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Essendovi più termini sotto il radicale proposto, come $\sqrt{(ab + bc + df)}$, si prenderà (495) $m = \frac{ab}{d} + \frac{bc}{d} + f$, e il radicale diventerà $\sqrt{dm}$. Se $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, si prenderà $n = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, e si avrà $x = \sqrt{an}$.

63. 498. Per costruir $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{ec.})}$ si prenda $AB = a$, e condotta $BC = b$ normale ad AB, sarà $CA^2 = a^2 + b^2$; condotta pure $CD = c$ normale a CA, sarà $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2$; condotta $DE = d$ normale a DA, sarà $AE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ec. ec.; onde l'ultima ipotenusa $AF = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \text{ ec.})}$. Se alcuni dei quadrati sieno negativi, si prenda un sol quadrato m^2 eguale ai positivi, e un altro n^2 eguale ai negativi, e si avrà $\sqrt{(m^2 - n^2)}$.

499. Posson ridursi a queste tutte l'altre quantità radicali. Sia $\sqrt{(bc + am + dn - cq)}$: si farà $bc = i^2$, $am = k^2$, $dn = l^2$, $cq = p^2$, e dovrà costruirsi $\sqrt{(i^2 + k^2 + l^2 - p^2)}$. Se il radical proposto ha dei rotti, è facile di liberarsene. Data $\sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$, si farà $\frac{ab}{b + c} = m$, $\frac{cd^2}{b(b + c)} = n$, e si avrà $\sqrt{b(m + n)}$. Se si abbia . . . .

$\sqrt{\left(a^2 - \frac{c^2f^2 + d^2f^2}{ab + cd}\right)}$, si farà $c^2 + d^2 = m^2$, $\sqrt{(ab + cd)} = n$, e si avrà $\sqrt{\left(a^2 - \frac{f^2m^2}{n^2}\right)} = \sqrt{(a^2 - p^2)}$ fatto $\frac{fm}{n} = p$.

500. Avendo più radicali come $\sqrt{[f^2 + g\sqrt{(k^2 - b^2)}]}$, si fa $\sqrt{(k^2 - b^2)} = c$, quindi $\sqrt{(f^2 + gc)} = n$. Per costruire $\sqrt[4]{a^3c}$, farei $ac = m^2$, e avrei $\sqrt[4]{a^2m^2} = \sqrt{am} = \sqrt[4]{a^3c}$. Così $\sqrt[4]{abcd}$ si costruisce prendendo $ab = m^2$, $cd = n^2$ onde $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{mn}$. Infine $\sqrt[4]{(a^2fg + bcfk - a^3f)}$, fatto $m = \frac{fg}{a} + \frac{bcfk}{a^3} - f$, diviene $\sqrt[4]{a^3m}$. In generale ogni quantità composta di radicali del secondo grado, del quarto, dell'ottavo ec., può sempre costruirsi col circolo.

501. Si è supposto fin quì 1°. che la quantità data fosse omogenea; non lo essendo, come $\frac{a^3 + b}{a^2 + c}$, si renderà tale col moltiplicarne i termini per diverse potenze di $f = 1$, ciò che non cangia il valor della data, e si avrà $\frac{a^3 + f^2b}{a^2 + fc}$.

502. Abbiam supposto 2°. che la quantità data abbia una sola dimensione; se ne ha più, sarà facile di ridurla a una sola quantità monomia della stessa dimensione. Sia $\frac{abc + cfg}{m + n}$; prendo (495) $p = \frac{ab + fg}{m + n}$, ed ho $pc = \ldots \frac{abc + cfg}{m + n}$.

503 Prima di venire agli esempj, si noti che le quantità geometriche, come linee, superficie ec., son *date* o *di posizione*, o *di grandezza*, o *di posizione e di grandezza*, quando o la loro situazione, o la lor misura, o l'una e l'altra sono invariabilmente assegnate. Se una quantità dicasi solamente *data*, s' intende *di grandezza*; e se dicasi *dato* un punto, s' intende data la sua distanza da una quantità che è data almeno di posizione.

504. Debba dunque condursi dal punto dato A fuor delle parallele EB, CD la retta AK in modo che la parte KI intercetta 64.
da esse eguagli una data retta c. Condotta AF normale sopra le parallele EB,CD, pongo AF $= a$, FG $= b$, FK $= x$, e sarà AK[$\sqrt{(a^2 + x^2)}$]: AF (a) :: IK (c) : FG (b), onde $\frac{ac}{b} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$,

64. ed $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(c^2 - b^2)}$, il che dà questa costruzione. Col centro G e col raggio c si descriva un arco che tagli in H la retta FB, ed AK parallela a GH sarà la retta cercata. Poichè FG (b) : AF (a) :: FH $(\sqrt{[c^2 - b^2]})$: FK $(x) = \frac{a}{b}\sqrt{(c^2 - b^2)}$. Quanto al valor negativo di x, osservo che l'arco HM taglia EB in M, H; onde anche AK' parallela ad MG, serve come AK a risolvere il problema; e però FK' eguale e direttamente opposta ad FK, dà $x = -\frac{a}{b}\sqrt{(c^2 - b^2)}$ (480).

65. 505. Debba anche descriversi un circolo che passi per due punti dati A, B, e tocchi la retta CF data di posizione. Il problema si riduce a trovare il punto M di contatto, dopo di che basta far passare un circolo per A, B, M. Condotta ABF, che incontri in F la data CF, si divida AB in mezzo in D. Fatta FM $= x$, FD $= a$, AD $=$ DB $= b$, sarà $x^2 =$ BF $\times$ AF $= a^2 - b^2$ (482) onde $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, il che dà questa costruzione. Sul diametro DF si descriva il semicircolo DGF, e vi si applichi la corda DG $=$ DB; sarà FG eguale alla cercata FM; poichè FG $= \sqrt{(a^2 - b^2)} =$ FM.

Figure simili.

506. Due figure son *simili* quando con un numero eguale di lati hanno tutti gli angoli respettivamente eguali, e tutti i lati omologhi proporzionali. Onde i poligoni regolari di un egual numero di lati, e perciò i circoli riguardati come poligoni regolari di un' infinità di lati, son figure simili.

66. 507. *I perimetri di due figure simili* ABCDE, abcde *son tra loro come i lati omologhi* AB, ab, *o come un egual numero di lati omologhi* AB + AE + DE ec., *ab* + *ae* + *de* ec. Essendo AB : *ab* :: BC : *bc* :: DC : *dc* :: DE : *de* ec., la somma degli antecedenti o il perimetro della prima figura, è alla somma de' conseguenti o al perimetro della seconda, come AB : *ab*, o come AB + AE + DE ec. : *ab* + *ae* + *de* ec. (212).
67. Onde i contorni di due poligoni regolari ABDEFG, *abdefg* son tra loro :: il lato AG all' omologo *ag* :: la

 FIG.

porzione BAGF all' omologa *bagf* dei perimetri; e se 67.
C è il centro dei poligoni, attesi i triangoli isosceli e simili *aCg*, ACG, si avrà AG : *ag* :: CG : C*g* :: ABDEFG : *abdefg* :: BAGF : *bagf*.

508. Dunque *le circonferenze son tra loro come i raggi*, o come due archi qualunque compresi tra due 68.
raggi CA, CM; ma CM : CN :: AM : BN; dunque AMF : BND :: AOM : BoN :: AM : BN :: CM : CN.

509. Gli angoli A, B essendo tanto più distanti tra loro 67.
quanto AB è più grande, il poligono sarà tanto men curvo quanto son maggiori i suoi lati, cioè le curvature dei poli- 68.
goni simili e perciò anche dei circoli, sono in ragione inversa dei lati o dei raggi (507. 508).

510. Se dunque il raggio sia infinito, la curvatura sarà zero: ma un circolo di raggio infinito ha il centro ad infinita distanza dalla circonferenza; dunque (430) i raggi di un tal circolo son paralleli tra loro e perciò tutti normali alla tangente (410), che si confonde in tal caso con la circonferenza.

511. *In due figure simili* ABCDE, abcde *le diagonali* AD, AC, ad, ac, *son proporzionali tra lo-* 66.
ro e a lati omologhi AE, ae. I triangoli ADE, *ade* son simili avendo un angolo E = *e*, e intorno ad esso i lati proporzionali; dunque AD : *ad* :: AE : *ae*; così si troverà AC : *ac* :: BC : *bc* :: DE : *de* :: AD : *ad* ec. In generale *le figure simili hanno proporzionali tut-* 69.
te le lor dimensioni omologhe Onde per descriver sopra un lato omologo ad AB un poligono simile al dato ABCDEF, si prenderà in AB, prolungata se occorra, la retta A*b* eguale al dato lato, e condotte dal punto A le diagonali AC, AD, AE, le parallele *bc* a BC, *cd* a CD, *de* a DE, *ef* ad EF formeranno il poligono cercato: poichè le figure ABCDEF, A*bcdef* hanno gli angoli respettivamente eguali e i lati proporzionali, attesi i triangoli simili ABC, A*bc*, e ACD, A*cd* ec.

SECONDA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA

512. SI chiama *Superficie*, o *Area* tutto ciò che si concepisce con la sola lunghezza e larghezza. Se si supponga questo Libro diviso in due parti, e ognuna in altre due ec., si giungerà a dividerlo in ogni foglio, e se l'arte non possa più suddividere, si concepiranno però possibili altre divisioni senza fine, per cui il foglio diverrebbe sempre più sottile, benchè sempre eguale al primo in lunghezza e in larghezza. Ma le molte suddivisioni confondon l'idee e non si comprende bene ciò che chiamasi *infinitamente grande* e *infinitamente piccolo*. È però assai chiaro 1° che col suddividere, uno si accosta sempre al termine ove quel foglio non avrebbe più grossezza alcuna: 2°. che per giungere a questo termine vi vorrebbe un numero veramente infinito di divisioni: 3°. che questo numero è impossibile e che non si arriverà mai al termine per quanto uno vi si accosti sempre. Ora diconsi *Limiti* della divisione quelle quantità verso cui altre tendono senza potervi mai giungere: così *la superficie è il limite del corpo*, la linea è il limite della superficie, e il punto è il limite della linea. Può dirsi ancora che la superficie d'un corpo è l'inviluppo esteriore che lo ricuopre, e su cui cadono i nostri sguardi. Per determinarne la grandezza, cerchiamo la misura naturale delle superficie.

Bisogna 1°. che sia essa medesima una superficie a cui possano riferirsi l'altre, e serva in certo modo di base a tutte le valutazioni, come l'unità è la base di tutti i calcoli: 2°. che sia la più semplice di tutte ed abbia perciò lunghezza e larghezza eguali; or la larghezza si misura prendendo la distanza dell'estremità parallele, che è la perpendicolare (404);

(404); dunque *la misura della superficie è un quadrato più o men grande, che sempre si prende per unità di superficie:* così la superficie di un pollice in lungo e in largo è la misura delle superficie valutate a pollici quadri, e la superficie di un piede quadro ha 144 pollici quadri. Di quì è che si nomina *Quadratura* la valutazion d' una superficie qualunque, ed il problema sì celebre della quadratura del circolo consiste in trovare un quadrato eguale in superficie ad un dato circolo. In generale quando vuol misurarsi una superficie, si dee cercar quante volte essa contiene il *quadrato unità*.

513. *Misurare il quadrato* ABCD, diverso da *abcd* che è il *quadrato unità*. Presa BF $=bc$ e condotta a BA la parallela FE, il rettangolo BE contiene tante volte il quadrato *abcd*, quante la base AB contiene la base *ab*. Dunque se $abcd=s$, sarà BE: s::AB:1, e BE$=$AB$\times s$: ma la superficie del quadrato totale AC contien tante volte il rettangolo BE, quante la linea AD o AB contiene AE o *ad*; dunque AC : BE ($=$AB$\times s$)::AB:1, e però AC $=$ AB$^2\times s$, e poichè $s=1$, sarà AC $=$ AB^2: cioè *il quadrato è il prodotto del* quadrato unità *per il quadrato delle unità di un de' suoi lati*. Non eguaglia dunque *il quadrato d' un de' suoi lati*, mentre non si moltiplica mai una linea per un' altra: ma poichè quest' espressione è usata, noi pure l' adopreremo. 70.

514. Posto ciò, *il rettangolo AD è il prodotto della sua base* AB *per la sua altezza* AC; poichè il quadrato AE descritto sul lato maggiore AB, conterrà tante volte il rettangolo AD, quante AF contiene AC; dunque AE:AD::AF:AC, ed AD $=$ . . . $\frac{AE\times AC}{AF}=\frac{AB^2\times AC}{AB}=AB\times AC$. Così se AB $=7$ pollici, AC $=3$ poll., sarà AD $=21$ pollici quadri. 71.

515. Onde 1°. il triangolo rettangolo ABC è il prodotto della sua semialtezza per la base, perchè il triangolo BDC $=$ABC (450): 2°. *un triangolo qua-*

lunque ABC *è il prodotto d' un de' suoi lati* AC *per*
72. *la seminormale* BD *condotta dall' angolo opposto* B *su questo lato prolungato, se è necessario;* perchè $ABD = \frac{1}{2} BD \times AD$, e $CDB = \frac{1}{2} BD \times DC$; dunque $CDB \pm ABD = ABC = \frac{1}{2} BD (DC \pm AD) = \frac{1}{2} BD \times AC$.

516. Dunque *un parallelogrammo* AD *è il prodot-*
73. *to della base* AE *per la distanza* BC *dei lati paralleli* AE, BD. Infatti condotta la diagonale BE, si ha $AD = 2AEB$ (451) $= AE \times BC$.

517. *Il trapezio* ABCD *è il prodotto della semi-*
74. *somma de'le sue basi parallele* AD, BC *per la lor distanza* CF; poichè condotta la diagonale AC, si avrà $ABC = \frac{1}{2} AE \times BC = \frac{1}{2} BC \times CF$, e $ACD = \frac{1}{2} AD \times CF$; dunque $ABC + ACD = \frac{1}{2} CF (BC + AD) = ABCD$.

518. *Il poligono regolare è il prodotto del suo perimetro per la seminormale condotta dal centro sopra un de' lati;* poichè i raggi dal centro agli angoli dividono il poligono in tanti triangoli eguali e simili quanti sono i lati: ma ciascun di questi triangoli è il prodotto del lato del poligono per la seminormale; dunque il poligono è il prodotto del perimetro per la seminormale stessa. Onde una porzione BCG del po-
67. ligono, compresa tra due raggi CB, CG e i lati BA, AG, è il prodotto di $BA + AG$ per la seminormale.

519. Dunque *il circolo è il prodotto della circonferenza per il semiraggio, e il settore è il prodotto del semiraggio per l' arco che lo termina*. Perciò per aver la quadratura del circolo bisognerebbe conoscer la ragione del raggio alla circonferenza, la quale non si è potuta determinare che per approssimazione; e si è trovato che il diametro d' un circolo sta alla sua cir-

conferenza presso a poco come 7 a 22, o come 113 a 355, o più esattamente come 1 a 3,14159265358 9793238462643383279502884197169399375105820974 9445923078164062862089986280348253421170679 8 21480865132723066470938446, approssimazione quasi infinita.

Poichè l' uso di questo numero è frequentissimo, ne aggiunghiamo il logaritmo, cioè

$l3,1415$ ec. $= 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435$

520. Sia $\pi = 3,14159$ ec.; sarà $1 : \pi$ la ragion del diametro alla circonferenza. Sia r il raggio d' un circolo qualunque, e si avrà $1 : \pi :: 2r : 2r\pi$, sua circonferenza. La superficie è πr^2 (519).

521. Come per il diametro 1 si ha la circonferenza $\pi = 3,1415926$, così per il raggio 1 si avrà una semicirconferenza espressa parimente per π. Chiamato dunque γ il numero dei gradi o minuti o secondi ec. della semicirconferenza, g il numero dei gradi ec. di un arco dato, ed x l' arco stesso in parti di raggio, sarà $\gamma : \pi :: g : x = \frac{g\pi}{\gamma}$. Perciò fatto $\gamma = 180, = 10800, = 648000$, secondochè g sarà espresso in gradi o minuti o secondi, avremo $\frac{\pi}{\gamma} = arc.\ 1^\circ, = arc.\ 1', = arc.\ 1''$, in parti del raggio 1, ed $x = g\,arc.\ 1^\circ$. ec. La Tavola degli archi ridotti in parti di raggio si troverà sul fine di questo Libro, pag. XXXVI. Osservisi però, che se il raggio è a, si ha $x = ag.arc.\ 1^\circ$. ec. Così troveremo $360^\circ = 360\ a.arc.\ 1^\circ$. ec.

522. All'incontro se dato l' arco x in parti di raggio, si cerchi l' arco stesso in gradi e minuti, si avrà $g = \frac{\gamma x}{\pi}$.

Chiamando r°, r', r'' il raggio 1 espresso in gradi o minuti ec. ed essendo $\pi : 1 :: \gamma^\circ : r^\circ :: \gamma' : r' :: \gamma'' : r''$, ovvero generalmente $r = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{1}{arc.}$ (521), si avrà $g = xr^\circ, = xr'$ ec. oppure se il raggio è a, $g = \frac{xr^\circ}{a}, = \frac{xr'}{a}$ ec. come è chiaro. Per facilitar questi calcoli, ecco i logaritmi degli archi ridotti in parti di raggio, e del raggio ridotto in archi

$l\,arc.\ 1^\circ = 8{,}24187\ 73675\ 90827\ 78455$	$l\,r^\circ = col.\ arc.\ 1^\circ = 1{,}75812\ 26324$
$l\,arc.\ 1' = 6{,}46372\ 61172\ 07184\ 15204$	$l\,r' = col.\ arc.\ 1' = 3{,}53627\ 38827$
$l\,arc.\ 1'' = 4{,}68557\ 48668\ 23540\ 51953$	$l\,r'' = col.\ arc.\ 1'' = 5{,}31442\ 51331$

Di quì si trova, fatto $x = 1$, che il raggio 1 diventa $g = 57^\circ,296 = 57^\circ, 17', 44'', 8 = 206265''$.

523. Un poligono irregolare si divide in triangoli, e la loro somma è il poligono proposto; ciò è evidente. Ma se si voglia un triangolo eguale al dato
75. poligono ABCDE, condotta la diagonale CE, la parallela CE a DG che incontri in G il lato AE prolungato, e poi CG, sarà il triangolo CGE = CDE per la base ed altezza eguali; dunque ABCDE = ABCG. Condotta ora la diagonale CA, la parallela BF e congiunta CF, si proverà egualmente il triangolo FCG = BCGA, e perciò eguale al pentagono dato: e poichè con questo metodo si può ridurre qualsivoglia poligono in un triangolo, ed è facile di far d'un triangolo un parallelogrammo, d'un parallelogrammo un rettangolo, e d'un rettangolo un quadrato, *può sempre trovarsi la quadratura esatta di tutte le figure rettilinee*. Ecco ora alcuni evidenti teoremi, molto utili nella Sintesi.

I. *Se la retta* FE *sia divisa comunque in* A, *il rettangolo* FE×EA *sarà eguale al rettangolo* FA×AE *col quadrato di* AE; cioè fatta FA $= a$, AE $= b$, sarà $(a + b)b = ab + b^2$.

II. Poste le stesse cose, *il quadrato di* FE *sarà eguale ai quadrati di* FA, AE *col doppio rettangolo* FA×AE; cioè $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Onde se sia $b = a$, verrà $(a + a)^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2$, cioè *se* FE *sia divisa in mezzo, il quadrato di* FE *sarà quadruplo del quadrato di* FA, *e i quadrati di* FA, AE *saranno eguali al doppio rettangolo* FA×AE.

Ma se $a > b$, fatto $a - b = c$, si avrà $a^2 - 2ab + b^2 = c^2$, onde $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, e quindi $a^2 + b^2 > 2ab$: cioè *se* FE *non sia divisa in mezzo, i quadrati di* FA, AE *saranno maggiori del doppio rettangolo* FA×AE.

 FIG.

III. Poste le stesse cose, *il quadrato di* FE *sarà eguale ai rettangoli* FE × EA *ed* EF × FA: cioè $(a + b)^2 = (a+b)a + (a+b)b$. 73.

IV. Poste le stesse cose, *i quadrati di* FE, AE *saranno eguali al doppio rettangolo* FE × EA, *e al quadrato di* FA: cioè $(a+b)^2 + b^2 = 2b(a+b) + a^2$.

V. *Se la retta* DA *sia divisa in mezzo in* G *e comunque in* F, *il rettangolo* AF × FD *col quadrato di* FG 74.
sarà eguale al quadrato della metà DG: cioè fatto $AG = a$, $GF = b$, sarà $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$.

VI. Poste le stesse cose, *i quadrati* di AF, FD *saranno doppj dei quadrati di* AG, GF: cioè $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

VII. E *la differenza dei quadrati di* AF, FD *sarà quadrupla del rettangolo di* AG × FG: cioè $(a + b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

VIII. *Se alla retta* FE *divisa in mezzo in* A *si* 75.
unisca la retta EG, *i quadrati di* FG, GE *saranno doppj dei quadrati di* FA, AG: cioè fatta $FA = a$, $EG = b$, sarà $(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$.

IX. Poste le stesse cose, *il rettangolo* FG × GE *col quadrato di* AE *sarà eguale al quadrato di* AG: cioè $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2$.

Paragone delle superficie.

524. Se B, b sono le basi, ed A, a l'altezze di due triangoli, la loro superficie sarà $S = \frac{BA}{2}$, $s = \frac{ba}{2}$; dunque $S : s :: BA : ba$. Onde I°. le superficie di due triangoli sono in ragion composta delle basi e delle altezze: II°. due triangoli con la stessa base o basi eguali son come l'altezze; poichè $B = b$ dà $S : s :: A : a$. III°. due triangoli con altezze eguali son come le basi; poichè $A = a$ dà $S : s :: B : b$. IV°. due triangoli sono eguali in superficie 1°. se tra due lati eguali a due lati abbian l'angolo supplemento l'un

dall' altro; poichè uniti i due angoli insieme, sarà $BA = ba$, onde $S = s$: 2°, se le lor basi e le loro altezze sono in ragione inversa; poichè $B : b :: a : A$ dà $ba = BA$ ed $S = s$. V°. *due triangoli simili stanno come i quadrati delle lor dimensioni omologhe*; poichè in questo caso $B : b :: A : a$; dunque $S : s :: B^2 : b^2 :: A^2 : a^2$.

525. Onde 1°. il triangolo equilatero circoscritto è quadruplo dell' iscritto, poichè il lato dell' uno è doppio del lato dell' altro (464): 2°. il quadrato circoscritto è doppio dell' iscritto, perchè chiamato r il raggio del circolo, i lor lati sono $2r, r\sqrt{2}$ (459.464); ora $(2r)^2$ è doppio di $(r\sqrt{2})^2$.

76. 526. Se due triangoli BAC, bac hanno un angolo eguale A, a, saranno tra loro come i prodotti de' lati intorno all' angolo eguale. Poichè condotte le normali BD, bd sui lati AC, ac, sarà $BAC : bac :: BD \times AC : bd \times ac :: AC : ac \times \frac{bd}{BD}$; ma i triangoli simili ABD, abd danno $\frac{bd}{BD} = \frac{ab}{AB}$; dunque $BAC : bac :: AC : \frac{ac \times ab}{AB} :: AC \times AB : ac \times ab$.

77. Per farne un' applicazione, debba condursi dal dato punto B la retta BF in modo che il triangolo ACD resti diviso in due parti AEF, EFDC nella ragione di $m : n$. Poichè $AEF : EFDC :: m : n$, sarà $AEF + EFDC$ ($= ACD$) $: AEF :: m + n : m :: AC \times AD : AE \times AF$. Condotta ora BI parallela ad AC, e fatte $BI = a$, $AI = c$, $AC = b$, $AD = d$ e $AF = x$, i triangoli simili AEF, BIF daranno FI $(x + c)$: IB (a) :: FA (x) : $AE = \frac{ax}{x + c}$; onde $m + n : m :: bd : \frac{ax^2}{x + c}$ e però $x^2 - \frac{bdmx}{a(m + n)} = \frac{bdcm}{a(m + n)}$; dunque $x = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{bdm \pm \sqrt{[b^2d^2m^2 + 4abdmc(m + n)]}}{2a(m + n)}$. Di questi due valori il solo positivo scioglie il Problema. Per saper ciò che l' altro significa, si osservi che se AC, AD (b, d) fossero negative, cioè divenissero AC', AD', non si cangierebbe l' equazione trovata; onde ella insegna anche a condurre dal punto B la retta $BF'E'$ che divida il triangolo $A'D'C'$ nella ragione di $m : n$. Dunque il valor negativo significa AF' direttamente opposta ad AF (480). Se il punto B fosse sul lato AC come in E, sarebbe AI $(c) = 0$, e $AF = x =$

$\frac{bdm}{a(m+n)}$; e se questo punto fosse dentro al triangolo, si farebbe c negativa.

527. *In due figure simili l' aree son proporzionali ai quadrati delle loro dimensioni omologhe.* Poichè se A, B ed a, b sieno le due dimensioni omologhe il cui prodotto dà l' aree S, s delle figure, sarà S : s :: AB : ab: ma per la natura delle figure simili, A : a :: B : b; dunque S : s :: $A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$.

528. Onde 1°. *I circoli sono come i quadrati de' raggi, de' diametri, delle circonferenze, in generale delle loro dimensioni omologhe*: 2°. Una figura qualunque ALMNC (a) costruita sull' ipotenusa AC d' un triangolo rettangolo, eguaglia la somma delle due figure simili ADFGB (b), BHIKC (c) costruite sui lati. Poichè $a : AC^2 :: b : AB^2 :: c : BC^2$; dunque $a : b + c :: AC^2 : AB^2 + BC^2$: ma $AC^2 = AB^2 + BC^2$; dunque $a = b + c$ Onde il semicircolo ACB sull' ipotenusa AB eguaglierà i semicircoli ACD, BCF sui lati AC, CB, e tolte le parti comuni AECA, CGBC, gli spazj curvilinei ADCEA + CFBGC sono eguali al triangolo ABC. Questi spazj si chiamano le *Lunule d' Ippocrate*. Ecco altri teoremi. 78. 79.

I. *Di due poligoni regolari* 2mCZX, 2nCZF *circoscritti ad un circolo, il maggiore è* 2mCZX *che ha il minor numero* m *di lati*. Chiamo T, t, t' i triangoli CZX, CZF, CFX, ed S, s, s' i settori CZr, CZf, Cfr, onde $T = t + t'$, $S = s + s'$: e poichè $t' >$ CFR e CTF $> t$, sarà (180) $t' : t >$ CFR : CTF; ma CFR : CTF :: $s' : s$ (528); dunque $t' : t > s' : s$ e $t' + t : t > s' + s : s$, cioè $T : t > S : s$ ovvero $2mT : 2nt > 2mS : 2ns$; ed essendo $2mS = 2ns$ perchè i poligoni son circoscritti allo stesso circolo, avremo $2mT > 2nt$. 36.

II. *Il circolo è medio proporzionale tra due poligoni regolari simili, l' uno circoscritto, l' altro isoperimetro.* Posto r il raggio del circolo e $2q$ il perimetro del poligono circoscritto, saranno $r^2\pi$, qr le lor superficie. Sia p l' isoperimetro al circolo, e chiamata r' la sua normale dal centro, sarà $p = \frac{qr'^2}{r}$ (527) $= rr'\pi$ (518), onde $r' = \frac{r^2\pi}{q}$ e $p = \ldots \frac{r^3\pi^2}{q}$: ora $\div qr : r^2\pi : \frac{r^3\pi^2}{q}$. Onde come $qr > r^2\pi$, anche

$r^2\pi > \frac{r^3\pi^2}{q}$, cioè *il circolo è il massimo di tutti i poligoni isoperimetri*.

III. *Di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha più lati è maggiore*. Sieno p, p' due isoperimetri d'uno stesso circolo $r^2\pi$, e P, P' due a lui circoscritti relativamente simili agli isoperimetri: avremo (II) $(r^2\pi)^2 = Pp = P'p'$ e supposti i più lati in p, P, sarà (I) $P' > P$; dunque $P' : P'p' > P : Pp$, cioè $1 : p' > 1 : p$ e $p > p'$. D' onde pur si deduce che il circolo avendo infiniti lati, è il massimo de' suoi isoperimetri.

78. 529. Sciogliamo ora alcuni problemi. I. *Trovare una figura* ALMNC *simile a due date* ABFGB, BHIKC *e loro somma*. Posti in angolo retto i lati omologhi AB, BC, sarà AC il lato omologo della figura cercata, che con ciò si descriverà facilmente (511). Onde un circolo è eguale a due dati se essendo AB, BC i lor diametri, l' ipotenusa AC sia il suo.

II. *Trovare una figura simile a due date e loro differenza*. Sul lato AC della maggiore si descriva un semicircolo, in cui si applichi il lato omologo BC della minore, e sarà AB l' omologo della cercata; poichè $AB^2 = AC^2 - BC^2$. Onde può aversi un circolo eguale alla differenza di due dati.

III. *Trovare una figura simile a molte date e loro somma o differenza*. Sieno A, B, D ec. i lati delle figure da sommarsi, omologhi ad a, b, d ec. di quelle da sottrarsi, ed x l'omologo della richiesta; sarà $x^2 = A^2 + B^2 + D^2$ ec. $- a^2 - b^2 - d^2$ ec. quantità facile a costruire (498). Può dunque farsi un circolo che sia somma o differenza di quanti circoli si vorrà.

IV. *Trovare una figura simile a una data che sia a quella nella ragione* m:n. Chiamo a un lato della data, ed x l' omologo della cercata: dunque $a^2 : x^2 :: m : n$, ed $x = \sqrt{\frac{a^2 n}{m}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn}$. Onde possono aversi due circoli in una ragione anche incommensurabile $m : n$.

78. V. *Dato il perimetro* p *e la diagonale* a *d' un rettangolo* AD, *trovarne la superficie e i lati*. Sia $AB = x$, $BD = y$, e si avrà $x + y = \frac{p}{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, onde $y = \frac{p}{2} - x = \sqrt{(a^2 -}$

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$; quadrando e risolvendo si trova $x = \frac{p}{4} + \sqrt{(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16})}$, $y = \frac{p}{4} - \sqrt{(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16})}$.

VI. *Dati i tre lati d' un triangolo, trovarne la super-* 80.
ficie. Sia AC $= a$, AB $= b$, BC $= c$, la normale BD $= x$, sarà AD $= \sqrt{(b^2 - x^2)}$, DC $= \sqrt{(c^2 - x^2)}$, AD + DC $= a = \sqrt{(b^2 - x^2)} + \sqrt{(c^2 - x^2)}$, e però $x = \frac{1}{2a}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}$, e la superficie cercata $\frac{ax}{2} = s = \frac{1}{4}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]} =$ (390. XXXI.) $\frac{1}{4}\sqrt{[(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)]}$. Sia la semisomma dei tre lati $\frac{a+b+c}{2} = q$, e sarà $2q - 2a = b + c - a$, $2q - 2b = a + c - b$, $2q - 2c = a + b - c$; onde $s = \sqrt{[q(q-a)(q-b)(q-c)]}$. Se C'N è il raggio del circolo iscritto nel triangolo ABC, condotte C'B, C'A, C'C e le normali C'M, C'P, sarà il triangolo ABC $=$ AC'B + BC'C + CC'A $= s =$ C'N $\frac{(a+b+c)}{2}$; dunque C'N $= \frac{s}{q} =$ . . . . $\sqrt{\frac{[(q-a)(q-b)(q-c)]}{q}}$, e poichè se l' angolo A è retto, C'N $= q - c$ (445), sarà $q : q - a :: q - b : q - c$.

VII. *Data l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo e la ragion dei due lati, trovarne l' area*. Sia AC $= a$, BC : AB ::
$m : n$, AB $= x$, sarà BC $= \frac{mx}{n}$ e si avrà $x^2 + \frac{m^2x^2}{n^2} = a^2$, 81.
onde $x^2 = \frac{a^2n^2}{m^2 + n^2}$, e l' area richiesta $\frac{mx^2}{2n} = \frac{a^2mn}{2(m^2 + n^2)}$.

VIII. *Data la ragione e la somma dei tre lati d' un triangolo, trovar l' area*. Sia AC $= x$, AB $= y$, BC $= z$, il
perimetro $p = x + y + z$, la ragione dei lati $x : y : z :: a : b : c$, 80.
sarà $x + y + z (= p) : a + b + c :: x : a :: y : b :: z : c$, e perciò $x = \frac{ap}{a+b+c}$, $y = \frac{bp}{a+b+c}$, $z = \frac{cp}{a+b+c}$, e di quì l' area (VI).

IX. *Dato il perimetro d' un triangolo rettangolo e la ragion dell' ipotenusa alla somma dei lati, trovar l' area*. Sia p il perimetro, AC $= x$, AB $= y$, BC $= z$; sarà $x : y + z :: m :$
n; e però $x + y + z (= p) : x :: m + n : m$, onde $x =$ 81.

$\frac{mp}{m+n}$, $y+z=\frac{np}{m+n}$, $y^2+2yz+z^2=\frac{n^2p^2}{(m+n)^2}$; ma $y^2+z^2=$ $x^2=\frac{m^2p^2}{(m+n)^2}$; dunque l'area cercata $\frac{yz}{2}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{n-m}{m+n}\right)$.

Superficie Piane.

530. *La superficie piana* o il *Piano* è quello in cui posson condursi per ogni verso delle linee rette: onde il piano è tra le superficie ciò che la retta è tra le linee. Ma per farne un'idea distinta, concepisco il triangolo rettangolo *sublime* ABF che giri in-
82. torno ad AB: se nella sua rivoluzione la retta BF lasci le vestigia del suo passaggio, queste saranno tutte in un piano circolare, mentre quelle dell'obliqua AF formeranno una superficie convessa.

531. Da questa descrizione risulta 1°. che se una retta ha due punti comuni con un piano, tutti gli altri ancora son nel medesimo piano, e che perciò la retta e il piano prolungati son sempre confusi: 2°. che una retta AB normale a un piano, lo è a tutte le rette FB, GB, DB, HB, LB che sono in esso e passano per l'estremità B della retta; onde da un punto A fuori del piano una sola normale AB può condursi sul piano stesso, altrimenti si potrebbero dal medesimo punto A condurre due normali AB, AF sulla medesima retta FB, il che è assurdo: si proverà egualmente che da un punto B del piano una sola normale può alzarsi sopra di esso: 3°. che la distanza da un punto a un piano si misura dalla normale condotta da questo punto sul piano: 4°. che due rette AB, MN inclinate egualmente dalla medesima parte sul piano PQ, son parallele, perchè gli angoli ABC, MNC sono eguali.

532. *Se due piani si tagliano, la loro intersezione comune è una linea retta:* è una linea, perchè i due piani son superficie e non hanno grossezza; ed
83. è retta, perchè se per due punti A, B comuni ai pia-

ni si conduca la retta AB, questa dovrà essere nell' uno e nell' altro piano; dunque è la loro intersezione comune. 83.

533. Dunque *tre punti* B, A, C *non posti in linea retta determinano la posizione d' un piano* BC; poichè può esservi un' infinità di piani diversi HA, BC, coi due punti comuni A, B, ma un solo di questi piani può passar per il punto determinato C. Onde 1°. tre punti non posson esser comuni a più d' un piano, se non sieno in linea retta: 2°. due rette CA, AD che si tagliano, sono in un medesimo piano PQ; poichè i tre punti C, A, D determinano la posizione delle due rette CA, AD; onde un angolo CAD determina la posizione d' un piano: 3°. una retta AB normale a due rette FB, GB nel loro punto d' intersezione, è normale al piano PQ che esse determinano. 82.

534. Suppongo ora che due piani si seghino nella retta AB, e condotte CA, DA normali ad AB nei piani CG, DH, l' angolo CAD misurerà l' inclinazione dei due piani DH, CG, la quale perciò si misura come quella delle rette; onde 1°. un piano che ne incontra un altro, fa con esso due angoli, la cui somma è 180°: 2°. nell' intersezion di due piani gli angoli al vertice son eguali: 3°. se più piani si taglino sulla stessa retta, la somma di tutti gli angoli sopra e sotto l' intersezione è di 360°: 4°. un piano che ne taglia due o più paralleli, fa con essi gli angoli alterni eguali ec. 83.

535. Se un piano tagli due o più piani paralleli, le rette d' intersezione saran tutte parallele, altrimenti prolungate s' incontrerebbero, e i loro piani non sarebbero più paralleli.

536. Se il piano CG è normale al piano PQ, e da un punto B di CG si conduca la normale BA sull' intersezione comune FC, sarà BA normale al piano PQ; poichè se nel piano PQ si conduca da A la DA normale a CA, l' angolo BAD sarà retto a 83.

83. cagione dei piani normali: dunque BA sarà normale alle due rette CA, AD, e perciò (533) al loro piano PQ.

537. *Se due piani* DH, CG *son normali ad un terzo* PQ, *lo sarà anche la loro intersezione* BA; poichè in tal caso BA è normale alle due rette CA, AD; dunque anche al piano PQ.

Linee rette tagliate da Piani paralleli.

84. 538. Se da un punto A si conducano a traverso di due piani paralleli PQ, *pq* quante rette si voglia A*d*D, A*f*F ec., saranno tutte tagliate proporzionalmente; e le figure DFGEH, *dfgeh* saranno simili; poichè 1°. fatto passare un piano per i tre punti A, D, F, le sue intersezioni coi piani paralleli PQ, *pq* saranno le rette parallele DF, *df* (535); dunque i triangoli ADF, A*df* saranno simili. Lo stesso si proverà de' triangoli AFG, A*fg*, AEG, A*eg* ec.; onde AD : A*d* :: DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: AG : A*g* ec. :: le perpendicolari AB, A*b* condotte da A sui piani PQ, *pq*; 2°. essendo DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: ec., si ha DF : *df* :: FG : *fg* :: EG : *eg*, ec. Ora se si conducano DG, *dg*, si proverà (470) che i triangoli ADG, A*dg* son simili, e perciò AD : A*d* :: DG : *dg* :: DF : *df* :: FG : *fg*; dunque i triangoli DFG, *dfg* hanno tutti i lati omologhi proporzionali, e perciò son simili, onde l'angolo F = *f*; si proverà lo stesso degli angoli G, *g*, ed E, *e*, ec.; dunque tutti gli angoli della figura DFGEH son respettivamente eguali a quelli della figura *dfgeh*: ma per altra parte tutti i loro lati omologhi son proporzionali; dunque esse son simili.

539. Dall'esser l'angolo F = *f* si deduce che se due angoli DFG, *dfg* hanno i loro lati respettivamente paralleli, saranno eguali benchè situati in diversi piani. E dall'esser simili le figure DFGEH, *dfgeh* segue che le lor superficie stanno fra loro ::

 FIG.

$DF^2 : df^2 :: AD^2 : Ad^2$ :: il quadrato BA^2 della distanza del punto A dal piano PQ, al quadrato bA^2 della distanza del medesimo punto A dal piano pq; e perchè la ragione di $AB^2 : Ab^2$ è costante per lo stesso punto A qualunque sia il numero delle rette AD, AF ec., le superficie delle figure DFGEH, $dfgeh$ saranno sempre fra loro nella ragione costante di $AD^2 : Ab^2$, e i loro perimetri nella ragione parimente costante di $AB : Ab$. Che se le rette AdD, AfF ec. in vece di partir dal punto A sieno parallele, tutte le rette dD, fF, gG ec. saranno eguali, e le figure diverranno eguali e simili. 84.

TERZA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA.

540. SI chiama *Solido* ciò che ha le tre dimensioni dell' estensione. Un solido può formarsi con varj piani talmente uniti ne' loro angoli, da chiuder per ogni parte uno spazio; allora si avrà un *Poliedro* le cui *faccie* saranno i piani che concorrono a formarlo, e i cui *angoli solidi* risulteranno dal concorso degli angoli piani. Se il poliedro ha quattro faccie, si nomina *Tetraedro*, se ne ha sei, *Esaedro* ec. Quando tutti gli angoli d' un poliedro son eguali, e tutte le sue faccie son piani eguali e simili, il poliedro è *regolare*.

541. Si misurano gli angoli solidi col prender la somma degli angoli piani che gli formano. L' angolo solido B per esempio, ha per misura la somma dei gradi degli angoli piani ABC, CBD, DBE, EBA. Bisognano per lo meno tre angoli piani per formarne un solido C, e la somma di due di questi angoli ACB + BCD è sempre maggiore del terzo ACD, poichè i due piani ABC, CBD unendosi nella retta su- 85.

85. blime CB, necessariamente si soprapporranno se si abbassino sull' angolo o sul piano ACD.

542. Dunque *un angolo solido è minore di 360°:* poichè nel solido quadrangolare BACDE i due angoli AEB + DEB son maggiori dell' angolo AED con cui formano l' angolo solido E (541); dunque il lor supplemento è minore di quello dell angolo AED. Lo stesso è del supplemento di EAB + CAB relativamente a quello dell' angolo CAE ec. Dunque la somma de' supplementi degli otto angoli inferiori delle faccie del solido (somma eguale all' angolo solido B) è minore della somma de' supplementi dei quattro angoli della base che è 360°; dunque l' angolo solido è minor di 360°.

543. Onde *cinque soli sono i Poliedri regolari, cioè tre le cui faccie son triangoli equilateri, uno le cui faccie son quadrati, ed uno le cui faccie son pentagoni.* Poichè bisognando almeno tre angoli per fare un angolo solido, che intanto non può esser di 360°, in cinque soli casi può farsi un angolo solido con piani di poligoni regolari: 1°. l' angolo d' un triangolo equilatero essendo di 60°, tre de' suoi angoli fanno un angolo solido di 180°, e quattro di questi triangoli posson fare un *Tetraedro*: 2°. quattro triangoli equilateri fanno un angolo solido di 240°, e formano un corpo regolare d' otto faccie detto *Ottaedro*: 3°. cinque triangoli equilateri fanno un angolo solido di 300°, e può comporsene un corpo regolare di 20 faccie chiamato *Icosaedro*; ma sei farebbero 360°, e questo non può essere un angolo solido: 4°. l' angolo del quadrato essendo 90°, tre faranno un angolo solido di 270°, e potrà comporsene un corpo regolare di sei faccie che si chiama *Esaedro*; ma quattro farebbero 360°, i quali non posson formare un angolo solido: 5°. l' angolo del pentagono regolare valendo 108°, tre formeranno un angolo solido di 324°, e potrà farsene un corpo regolare di 12 faccie nominato *Dodecaedro*; ma quattro farebbero 432°, angolo solido impossibile. In fine l' angolo dell' esagono essendo 120°, tre fanno 360°, che non può essere un angolo solido: molto meno tre Ettagoni, tre Ottagoni ec.; dunque i corpi regolari non son più di cinque.

544. Occorrendo almen tre angoli per fare un angolo solido, e lasciando essi un vuoto nella base, vi vuole un altro piano per chiuderli. Perciò il più

 FIG.

semplice de' poliedri è la piramide triangolare o il tetraedro. Se ella abbia per base un poligono d' un maggior numero di lati, le faccie cresceranno, finchè la base divenuta un circolo, la piramide diventa un *Cono*. La piramide ed il cono son *retti* quando una perpendicolare partendo dal vertice passa per il 86.
centro della base, e sono *obliqui* se non vi passa.

545. Altro modo di formare i solidi. Se la base DGKH salga parallelamente a se stessa lungo una 87.
linea DA, la somma di tutti gli elementi eguali a questa base forma un solido che si chiama *Prisma*. Egli è *retto* o *obliquo* secondo che DA è perpendicolare o inclinata sulla base. Dunque *il prisma è un solido terminato da basi eguali e parallele, e da faccie che son parallelogrammi: è triangolare* quando il poligono generatore è un triangolo, *quadrangolare* 91.
quando è un quadrilatero; e se questo quadrilatero è un parallelogrammo, il prisma si chiama *Parallélepipedo*, 87.
che sarà *rettangolo* quando la base è rettangola, e la linea lungo la quale si fa il movimento, è normale a questa base. Se la base fosse un quadrato, il cui lato fosse eguale alla linea d'altezza, il prisma sarebbe un esaedro regolare, che si chiama anche *Cubo*: onde il cubo è un prisma di sei faccie eguali e quadrate. 96.
Ma se il poligono generatore è un circolo, il prisma divien rotondo e si chiama *Cilindro*, 88.
che è *retto* o *obliquo* secondo la posizion della linea e
di movimento riguardo alla base. 89.

546. Terzo modo di formare i solidi. Se intorno a una linea immobile CA giri una figura qualunque AFBC, ella genererà un solido chiamato *solido di rivoluzione*, 90.
il cui *asse* è la linea CA: onde un punto qualunque B di questa figura segna nel muoversi la circonferenza d'un circolo, il cui raggio BP è normale all' asse e il cui centro è P; perciò *tutte le sezioni fatte in un solido di rivoluzione con piani normali al suo asse, son circoli*. Se il poligono generatore è un rettangolo, il solido sarà un cilindro retto;

se è un triangolo rettangolo, sarà un cono retto; se è la metà d'un poligono di molti lati, sarà una *Sferoide*; e se è la metà d'un circolo, sarà una *Sfera*.

547. *La sfera* è dunque *un solido, tutti i punti della cui superficie sono egualmente lontani da un punto interno, che si chiama* centro. Onde ogni retta che passa per il suo centro e termina da ambedue le parti alla sua superficie, è eguale all'asse. Può dunque prendersi per asse della sfera ogni retta che passando per il centro, ha le sue estremità nella superficie. Onde tutte le sezioni fatte in una sfera con piani che passano per il centro, son circoli eguali e si chiamano *circoli massimi*.

548. In generale, la sezione d'una sfera tagliata da un piano sarà sempre un circolo: poichè un diametro normale al piano segante può riguardarsi come l'asse della sfera, nel qual caso la sezione è un circolo (546). Questi circoli che non passano per il centro, diconsi *minori*, e sono tanto più piccoli quanto più son lontani dal centro.

Misura delle superficie de' Solidi.

549. La superficie d'un solido senza le basi si chiama semplicemente *superficie*, e *superficie totale* quella delle basi e delle faccie.

550. La superficie d'un prisma è il prodotto della lunghezza BC nel contorno GIHG della sezione fat-
91. ta nel prisma da un piano normale a BC: poichè ella
risulta dai parallelogrammi $BCED + ABCF + AFED = BC \times GI + BC \times IH + BC \times GH = BC \times GIHG$.

551. Onde *la superficie d'un prisma retto, e però anche quella di un cilindro retto, è il prodotto del contorno della sua base per la sua altezza.*

La superficie del cilindro obliquo ABCD è pure il pro-
89. dotto della sua lunghezza AB nel contorno GMIMG della
sezione fatta da un piano normale ad AB, e questa sezione è un' *ellisse*; poichè se per un punto P dell' asse GI passi il circolo LMK parallelo ad AD, la sua intersezione col pia-

no GMI

 FIG.

no GMI sarà la retta MPM normale all'asse GI. Sia dunque $GP = x$, $PM = y$, $LP = z$, $GI = a$, $LK = BC = AD = b$, e per la proprietà del circolo si avrà $y^2 = bz - z^2$: ma i triangoli simili LPG, PKI danno $z = \frac{bx}{a}$; dunque $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, equazione all'*ellisse*. Vedete le Sezioni Coniche. 89.

552 La superficie della piramide *regolare* retta è eguale al semiperimetro del poligono *regolare* che le serve di base, moltiplicato per la normale o *apotema* condotto dal vertice sopra un lato della base. Ciò è manifesto. Onde la superficie del cono retto è il prodotto della semicirconferenza della sua base per l'apotema condotto a qualunque punto della circonferenza.

553. Debba misurarsi la superficie del *cono retto troncato* ACED il cui piano DE è parallelo alla 92. base AC. Fatta $AC = a$, $DE = b$, EC (resto dell'apotema BC) $= d$, $BE = x$, sarà $x + d : a :: x : b$, onde $x = \frac{bd}{a - b}$ ed $x + d = BC = \frac{ad}{a - b}$. Sia π il numero 3,141 ec. (520) e saranno $b\pi$, $a\pi$ le circonferenze dalle basi DE, AC, e $BC \times \frac{a\pi}{2}$, $BE \times \frac{b\pi}{2}$ le superficie de' coni retti ABC, BDE (552); perciò la lor differenza o la superficie del cono troncato $= \ldots$ $\frac{ad}{a - b} \times \frac{a\pi}{2} - \frac{bd}{a - b} \times \frac{b\pi}{2} = \frac{\pi d}{2} \times \frac{a^2 - b^2}{a - b} = d \times \frac{1}{2}\pi(a + b)$; ma $\frac{1}{2}\pi(a + b)$ è la circonferenza del circolo medio tra le basi DE, AC; dunque *la superficie del cono troncato è eguale al prodotto del resto dell'apotema per la circonferenza media proporzional-aritmetica tra quelle delle basi*.

554. Giri il semipoligono regolare SAN intorno all'asse SN e cerchiamo la superficie della sferoide 93. da lui generata. Condotte sull'asse SN le normali BQ, AR, EK, IL, è chiaro che i due lati BS, IN del poligono descrivono dei coni retti (546), il lato AE descrive un cilindro, e gli altri BA, IE descrivon

93. tronchi di cono retto: onde se dal centro C si conducano sui lati SB, BA, AE le normali CV, CM, CZ che gli dividono in mezzo e son tutte eguali (453), i triangoli rettangoli CVS, BQS con l' angolo in S comune, saranno simili e si avrà VS : QS :: CV : BQ :: $2CV\pi : 2BQ\pi$ (520), e però $VS \times 2BQ\pi$ (cioè la superficie del cono descritto da BS (552)) $= QS \times 2CV\pi$. Di nuovo condotte da B, M sopra AR, SC le normali BD, MP, i triangoli CMP, ABD con tutti i lati omologhi normali, son simili. (435), e però AB : BD ($=$ QR) :: CM ($=$ CV) : MP :: $2CV\pi : 2MP\pi$, ed $AB \times 2MP\pi$ (cioè la superficie del cono troncato descritto da AB (553)) $= QR \times 2CV\pi$. Infine il cilindro descritto da $AE = RK$ e da $EK = CV$, ha per superficie $RK \times 2CV\pi$. Perciò *la superficie della sferoide* $= (SQ + QR + RK + KL + LN)\, 2CV\pi = SN \times 2CV\pi$, cioè *è eguale al prodotto del suo asse per la circonferenza del circolo al quale è circoscritta*. Or la sfera è una sferoide d' infiniti lati; dunque *la superficie della* sfera è $4r^2\pi$, *prodotto dell' asse* $2r$ *per la circonferenza* $2r\pi$ *d' un suo circolo massimo. E la superficie d' un* segmento sferico *nato dalla rivoluzione del*
90. *semisegmento circolare* BCP, *è* $2r\pi x$, *prodotto dell' altezza* $CP = x$ *de' segmento per la circonferenza* $2r\pi$ *del circolo massimo della sfera*.

555. Dunque la superficie della sfera 1°. è quadrupla di quella del suo circolo massimo; poichè un circolo massimo del diametro $2r$ è $r^2\pi$ (520): 2°. è
94. eguale alla superficie del cilindro circoscritto; perchè questa è $FA \times 2AK\pi = 2r.2r\pi = 4r^2\pi$: 3°. sta alla superficie totale del cilindro circoscritto :: 2 : 3; poichè le due basi del cilindro sono ciascuna $r^2\pi$.

556. La superficie totale del cono equilatero DIL circoscritto alla sfera, sta a quella della sfera :: 9 : 4; poichè nel cono avendosi $DI = IL = 2r\sqrt{3}$ (464), la sua base sarà $3r^2\pi$ (520), la sua superficie $6r^2\pi$ (552), e la totale $9r^2\pi$; ora $9r^2\pi : 4r^2\pi$ :: 9 : 4. Perciò le superficie totali della sfera, del cilindro e del cono equilatero circoscritti sono :: 4 : 6 : 9. Si proverebbe nel modo stesso che le superficie totali

 FIG.

della sfera e del cilindro e cono equilateri iscritti stanno ∷ 94.
16:12:9. E se concepito il cono ACB e il solido scavato HAKBMKH, si conduca una retta qualunque NT parallela ad AB, sarà $NQ^2\pi = r^2\pi$, $OQ^2\pi = (2rx - x^2)\pi$ (478), ed $NQ^2\pi - OQ^2\pi = (r-x)^2\pi = CQ^2\pi = PQ^2\pi$, cioè la base del solido generato dalla rivoluzion del curvilineo HNO, eguaglierà la base del cono corrispondente PCR.

557. Il paragone delle superficie di due solidi è facile. Poichè chiamando S, s queste superficie, A, B i fattori della prima, a, b quelli della seconda, si avrà sempre $S:s::AB:ab$. Onde 1°. se $A = a$, si avrà $S:s::B:b$; 2°. se $A:a::b:B$, avremo $S = s$; 3°. se $A:a::B:b$, sarà $S:s::A^2:a^2::B^2:b^2$. Quest' ultimo caso ha luogo nei solidi *simili*, le cui dimensioni omologhe son proporzionali: per esempio le superficie delle sfere, che son solidi simili, stanno tra loro come i quadrati dei raggi o delle circonferenze o in generale delle dimensioni omologhe dei loro circoli massimi.

Misura dei Solidi.

558. La *solidità* d' un corpo è la porzion d' estensione compresa tra le sue faccie. Così due cilindri della grossezza ed altezza medesima, hanno una stessa solidità, qualunque sia la materia di cui son fatti, come per esempio, l' uno di piombo e l' altro di sughero. Non bisogna dunque confonder la *massa* nè il *peso* d' un corpo colla sua solidità.

559. Per misurar la solidità bisogna prender per unità di misura il solido più semplice, quello cioè le cui tre dimensioni sono eguali all' unità di lunghezza: *il cubo* perciò *è la misura naturale della solidità*. Quindi si dice indifferentemente o la *cubatura* o la solidità d' un corpo, la cui determinazione perciò si riduce a trovar quante volte il *cubo unità* si contenga nel dato corpo: così per valutare un solido in piedi cubi, basta determinar quante volte egli contenga 95.
il *piede cubo unità*. e

560. *Misurare il cubo* ABCDF, diverso da $abcdf$ = 96.

95 e 96. s che prendo per *cubo unità*. Tagliato nel cubo un parallelepipedo P eguale in base ad ac, è chiaro che egli contien tante volte il cubo s, quante l' altezza DI o AD contiene l' altezza di o ad; dunque $ad:s::AD:P=\frac{AD.s}{ad}$: ma il cubo AG contien tante volte il parallelepipedo P, quante la base AC contiene la base HM o ac; dunque $AG:P\left(=\frac{AD.s}{ad}\right)::AC:ac::AD^2:ad^2$, onde $AG=\frac{AD^3.s}{ad^3}$, e poichè $s=1=ad^3$, sarà $AG=AD^3$, cioè *il cubo è il prodotto del* cubo unità *per il cubo delle unità di un de' suoi lati*. Così un piede cubo $=1728$ pollici cubi; una tesa cuba $=216$ piedi cubi $=216\times1728$ pollici cubi ec.

96. Dunque *il parallelepipedo rettangolo è il prodotto della sua base per la sua altezza*. Poichè il cubo AG descritto sul maggior lato DI contien tante volte il parallelepipedo HN, quante AC contiene HM; dunque $AG\ (=DI^3):HN::AC\ (=DI^2):HM\ (=DH.DM)$, ed $HN=\frac{DI^3.DH.DM}{DI^2}=DI\times DH\times DM$.

561. Onde *un prisma retto o obliquo è il prodotto della sua base per la normale abbassata dalla base superiore sull' inferiore, prolungata se bisogni*. Infatti
97. ridotta la base del prisma ABCDEF retto o obliquo ad un rettangolo $abcd$, sul quale si formi un parallelepipedo rettangolo $abcdf$ dell' altezza GO del prisma, posson dividersi due solidi con piani paralleli alle basi per aver delle sezioni IKLMNI, $ikli$ eguali alle basi e fra loro. Ma la somma di queste sezioni è eguale in ambedue i solidi; dunque il prisma è eguale al parallelepipedo, e si misura come lui. Dunque anche il cilindro la cui base è un circolo, è il prodotto della sua altezza per questo circolo.

Onde poste a, a' l'altezze di due cilindri, r, r' i raggi delle lor basi, saranno $2ar\pi, 2a'r'\pi$ le lor superficie, $ar^2\pi$,

$a'r'^2\pi$ le lor solidità; dunque 1°. se $ar^2\pi = a'r'^2\pi$ onde $r' = r\sqrt{\frac{a}{a'}}$, avremo $2ar\pi : 2a'r'\pi :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$; 2°. se $2ar\pi = 2a'r'\pi$ onde $r' = \frac{ar}{a'}$, avremo $ar^2\pi : a'r'^2\pi :: a' : a$, cioè due cilindri eguali in solidità, hanno le superficie come le radici dell'altezze, ed eguali in superficie, hanno le solidità in ragione inversa dell'altezze.

562. Due piramidi SABCDE, *sabc* d'altezze e-
guali stanno fra loro come le basi ABCDE, *abc*. In- 98.
fatti tagliandole in egual distanza dai vertici parallelamente alle basi, si avrà (539) $SF^2 : SP^2 ::$ ABCDE : IKLMN $:: sf^2 : sp^2 :: abc : ikl$; onde ABCDE : abc :: IKLMN : ikl e però la somma di tutti gli elementi IKLMN o la prima piramide, sta alla somma di tutti gl'*ikl* o alla seconda, come la base ABCDE alla base *abc*.

563. Date ora due piramidi d'una stessa altezza a, sieno X, x le lor solidità, B, b le lor basi; ed avremo $X : x :: B : b$, e però $X = \frac{Bx}{b}$, onde conosciuta la solidità d'una sola piramide, si avrà subito quella di tutte l'altre egualmente alte. Ora un cubo è l'aggregato di sei piramidi eguali che col vertice si uniscono nel centro del cubo, ed hanno ciascuna per base una delle sue faccie. La loro altezza sarà dunque la metà di quella del cubo, che supposta $2a$, dà $8a^3$ per la solidità del cubo, e perciò $\frac{8a^3}{6} = \frac{4a^3}{3}$ per la solidità x di ciascuna piramide: e poichè la base $b = 4a^2$, la formula $X = \frac{Bx}{b}$ diviene $X = \frac{1}{3}aB$, cioè *la piramide, e perciò anche il cono, è il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza*. Onde la piramide e il cono sono il terzo del prisma o del cilindro di egual base ed altezza.

564. Per misurare il cono troncato ADEC, con-
dotta la normale BF sulle sue basi, e fatta $AC = a$, 92.
$DE = b$, $GF = d$, la ragion del diametro alla circon-

92\. ferenza $1:\pi$, e $BG = x$, si avrà $x : x+d :: b : a$, onde $x = \frac{db}{a-b}$, $x+d = BF = \frac{ad}{a-b}$, e i circoli delle basi DE, AC saranno (520) $\frac{b^2\pi}{4}$, $\frac{a^2\pi}{4}$; dunque i coni ABC, BDE sono $\frac{ad}{a-b} \times \frac{a^2\pi}{3\cdot 4}$ e $\frac{bd}{a-b} \times \frac{b^2\pi}{3\cdot 4}$, onde la lor differenza o il cono troncato ACDE = ... $\frac{d\pi}{3\cdot 4}\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right) = \frac{\pi d}{3\cdot 4}(a^2+b^2+ab)$.

565\. Un Poliedro si divide in piramidi, che si calcolano separatamente, e la somma di esse è la solidità del poliedro. Se egli è regolare, condotte dal centro a tutti gli angoli del poliedro delle rette che lo dividano in tante piramidi eguali quante ha faccie, una di queste piramidi è il prodotto del terzo della sua base (che è una faccia del poliedro) per la normale condotta dal centro su questa faccia; onde il poliedro è il prodotto del raggio della sfera iscritta per il terzo della sua superficie.

566\. Dunque anche *la sfera*, poliedro regolare d'infinite faccie, *è il prodotto del terzo della sua superficie per il suo raggio*.

567\. Fatto r il raggio della sfera, sarà $r^2\pi$ il suo circolo massimo (520) e $\frac{4}{3}r^2\pi$ la sua solidità: ma quelle del cilindro e cono equilatero circoscritti sono $2r^3\pi$ (561) e $3r^3\pi$ (464. 563); dunque le tre solidità son tra loro :: $\frac{4}{3}r^3\pi$: $2r^3\pi : 3r^3\pi :: 4:6:9$, appunto come le superficie. Se il cono abbia l'altezza e base stessa del cilindro, sarà il terzo di esso (563), e il cilindro, la sfera e il cono staranno :: $2r^3\pi$: $\frac{4}{3}r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi :: 6:4:2::3:2:1$; onde il cilindro AM meno l'emisfero HKM, cioè il solido scavato HAKBMKH, eguaglia
94\. il cono ACB.

568\. Un settore sferico è dunque il prodotto della
90\. superficie descritta da BC nel terzo del raggio BD (566). Onde fatta $BD = r$, $CP = x$ altezza del *segmento sferico* BCM, ed $1:\pi$ la ragione del diametro alla circon-

 FIG.

ferenza, sarà $2r\pi x$ la superficie descritta da BC (554); 90.
dunque il settore sferico BCDM $= \frac{2r^2\pi x}{3}$. Perciò in una stessa sfera, i settori son tra loro come l' altezze de' segmenti su cui posano.

569. Onde essendo PD $= r - x$ e BP $= \sqrt{(2rx - x^2)}$, sarà il cono retto BDM $= \frac{\pi}{3}(2rx - x^2)(r-x)$, e BCMD — BDM, cioè il segmento sferico BPMC $= \frac{\pi}{3}(2r^2x - (2rx - x^2)(r-x)) = \pi x^2 (r - \frac{x}{3})$.

570. Dunque fatta DP $= z$, altezza del trapezio DPBF, si ha CP $= x = r - z$, e sottraendo dall' emisfero $\frac{2r^3\pi}{3}$ il segmento, viene $\pi z (r^2 - \frac{z^2}{3})$, solidità della porzione sferica generata dal trapezio DPBF. Così si trova che fatta l' altezza DQ $= u$, la porzione sferica descritta dal trapezio DQNF ha per espressione $\pi u (r^2 - \frac{u^2}{3})$. Onde la solidità della *zona* generata dal trapezio QPBN è $\pi (r^2(z-u) + \frac{u^3 - z^3}{3})$, e fatta la sua altezza PQ $= g$, il suo maggior raggio QN $= y$, il minore PB $= y'$, si ha $z = u + g$, il che dà la sua solidità $\pi g (r^2 - u^2 - gu - \frac{g^2}{3})$. Si ha poi $y^2 = r^2 - u^2$, e però $y^2 + u^2 = r^2 = y'y' + u^2 + 2gu + g^2$; onde $gu = \frac{y^2 - y'y' - g^2}{2}$, e però una zona qualunque $= \pi g \left(\frac{y^2 + y'y' + g^2}{2} - \frac{g^2}{3}\right) = \frac{\pi g}{6}(3y^2 + 3y'y' + g^2)$: onde la zona può conoscersi benchè sia ignoto il raggio della sua sfera. Del resto, poichè il trapezio HOQC genera la porzione $\pi z (r^2 - \frac{z^2}{3})$, ed è il cilindro NM $= rz^2\pi$, il cilindro meno la porzione, cioè la parte NHO del solido scavato 94.
HAKBMKH, sarà $\frac{z^3\pi}{3}$, eguale al cono corrispondente PCR, come le loro basi (556).

571. Ora per paragonar due solidi insieme, chiamo S, s le lor solidità, e A, B, C, a, b, c i loro fatto-

ri; dunque $S:s::ABC:abc$; onde 1°. se $A=a, S:s::BC:bc$; 2°. se $A:a::bc:BC, S=s$; 3°. nei solidi simili $S:s::A^3:a^3::B^3:b^3::C^3:c^3$. Onde, per esempio, *le sfere sono come i cubi dei raggi, de' diametri, o delle loro dimensioni omologhe.*

Ecco alcuni Problemi per esercizio dei Principianti che potranno scioglierli o nel primo o nel secondo anno dei loro Studj, or per sintesi or per analisi ed or nell' una e nell' altra maniera.

77. 572. I. Dati gli angoli contigui e contrariamente posti $DCA=a, CAD=b, ADC=c$ ec., trovar l' espressione dell'angolo fatto sull' ultimo lato AD o DC da MN normale al lato DC del primo. *Ris.* Se l'angolo è uno, l' espressione cercata sarà $90° \mp a$; se son due, $90° \mp a \pm b$; se son tre, $90° \mp a \pm b \mp c$ ec.: i segni di sopra son per l'angolo superiore, quei di sotto per l' inferiore.

573. II. Supposto ora che MN si pieghi in V per VP e si accosti ad VO normale sopra EC, e poi di nuovo si pieghi per PQ e si scosti da PR normale sopra AD, e così continui a scostarsi per un numero qualunque d' angoli, determinare in qual caso sarà PQ sopra o sotto la normale PR, e l'angolo che faranno tra loro le due MN, PQ: si osservi che oltre gli angoli a, b, c ec. dati come nel passato problema, si suppongon dati anche gli angoli $PVO=r'$, $QPR=r''$ ec. *Ris.* Se i dati angoli son due e si abbia $b>r'$, la retta PQ sarà sotto PR: se $b<r'$ sarà sopra, e l' angolo che fanno tra loro le due MN, PQ, sarà nei due casi $b-a\mp r''$. Se i dati angoli son tre e si abbia $c>r''$, la retta sarà sopra la normale; se $c<r''$, sarà sotto, e l' angolo cercato sarà nei due casi $b-a-c\pm r'''$. Non importa che questi angoli si trovino negativi.

81. 574. III. Condotte sui lati CA, CB d' un angolo $C=a$ le normali FI, DI e la retta FD che fa con esse gli angoli $DFI=r$, $FDI=i$, supponendo noti gli angoli a, r, trovare in tutti i casi l' espressione dell' angolo i. *Ris.* Vi sono cinque casi: 1°. se $a>r$ ed FD è sopra la normale IF, sarà $i=a+r$: 2°. se $a>r$ ed FD è sotto FI, sarà $i=a-r$: 3°. se $r=0$, FD si confonderà con IF e sarà $i=a$; 4°. se $a=r$, FD sarà sotto IF e si avrà $i=0$; 5°. se $a<r$, FD sarà sotto IF e si avrà $i=r-a$.

575. IV. Condotte nell' angolo stesso $C=a$ due altre normali I'F', I'D' con un'altra retta F'D' onde si abbiano gli angoli $DFI=p$, $D'F'I'=u$, $FDI=g$, $F'D'I'=h$, supponendo p, u dalla parte medesima delle loro normali, $g+h$ un angolo assai grande, $p-u$ un angolo piccolissimo, e $p>u$, determinare

nare i casi in cui sarà g maggiore o minore di h, e la ra- 81.
gion degli angoli $p-u$ e $\pm h \mp g$. *Ris.* Di 11 combinazioni, 5 sole non si oppongono alle condizioni del problema: 1ª. quando FD, F'D' son di là dalle loro normali FI, F'I', si avrà $g=a+p$, $h=a+u$ e $g>h$: 2ª. quando sono al di quà, se $g=a-p$ ed $h=a-u$, sarà $g<h$: 3ª. se $g=0$ ed $h=a-u$, sarà $g<h$: 4ª. se $g=p-a$ ed $h=0$, sarà $g>h$: 5ª. se $g=p-a$ ed $h=u-a$, sarà $g>h$. In generale si avrà sempre $p-u=\pm h \mp g$.

576. V. Condotte da un punto qualunque d' un triangolo equilatero tre normali ai tre lati, assegnar la ragione della lor somma alla normale che dal vertice del triangolo va alla base. *Ris.* La ragione è d' egualità.

577. VI. Descritti tre quadrati sui lati d' un triangolo qualunque e congiunte le loro estremità con linee rette, e di nuovo sopra queste descritti tre altri quadrati, e unite con tre rette le quattro estremità corrispondenti di ciascuna lor coppia, assegnar la ragione del dato triangolo a ciascun dei nove che ne risulteranno. *Ris.* Ciascun dei nove triangoli eguaglia il dato.

578. VII. Data la media m di tre proporzionali e la differenza d dell'estreme, trovar l'estreme. *Ris.* La più piccola è $x=\frac{-d\pm\sqrt{(4m^2+d^2)}}{2}$.

579. VIII Data l'altezza a d'un triangolo e le differenze b, c dei lati e dei segmenti dalla base, trovare il triangolo. *Ris.* Chiamato x il segmento minore, sarà $x=-\frac{c}{2}\pm\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^2+c^2-b^2}{c^2-b^2}\right)}$.

580. IX. Dato un lato a intorno all' angolo retto d'un triangolo rettangolo e l' aggregato b degli altri due, trovar questi lati. *Ris.* L' ipotenusa $x=\frac{a^2+b^2}{2b}$.

581. X. Determinar la figura contenuta dalle quattro 29.
rette che partono dal mezzo di ciascun lato d' un quadrilatero, e la sua ragione al quadrilatero. *Ris.* La figura è un parallelogrammo che è metà del quadrilatero.

582. XI. I quadrati dei lati d' un parallelogrammo qual ragione hanno ai quadrati delle diagonali. *Ris.* D' egualità.

583. XII. In un parallelogrammo ABDE trovare un pun- 73.
to P tale, che unite agli angoli le rette PA, PD, PB, PE sia $PA^2+PD^2=PB^2+PE^2$. *Ris.* Se il parallegrammo è rettangolo, ogni punto sodisfà al problema; se non è rettangolo, il problema è impossibile.

27. 584. XIII. Condotte da un punto E della diagonale AD d'un parallelogrammo BC le normali EF, EI sui lati AB, AC, assegnar la ragione del rettangolo DA $\times$ AE ai rettangoli CA $\times$ AF + BA $\times$ AI. *Ris.* La ragione è d'egualità.

73. 585. XIV. Per un punto P preso dentro un angolo BAE condurre una retta BPE tale, che l'area BAE eguagli una data superficie m^2. *Ris.* Condotte PM, PN parallela e normale ad AE e chiamandole a, b, si avrà AE $= x = \ldots\ldots$ $\dfrac{m^2 \pm m\sqrt{(m^2 - 2ab)}}{b}$.

64. 586. XV. Prolungati i lati KI, IG d'un parallelogrammo HI, e da un punto qualunque come vertice descritti tre triangoli sui lati KI, IG e sulla diagonale HI condotta per l'angolo contenuto dai lati KI, IG, assegnar la ragione di quelli a questo 1°. quando il vertice è dentro l'angolo CIA o DIK; 2°. quando è dentro l'angolo KIG o DIA: 3°. quando è in uno dei due lati, o nella diagonale, o nel prolungamento degli uni o dell'altra. *Ris.* 1°. il triangolo sulla diagonale eguaglia la somma di quelli sui lati: 2°. ne eguaglia la differenza: 3°. i tre triangoli divengon due e sono eguali.

587. XVI. Iscrivere in un dato triangolo un rettangolo che eguagli un poligono dato. *Ris.* Fatto ac il poligono, a la base del triangolo, d la sua normale dal vertice, b un suo lato, la parte cercata di esso, presa dal vertice, sarà $x = \dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b^2}{4} - \dfrac{b^2 c}{d}\right)}$.

588. XVII Descrivere un quadrato in un semicircolo. *Ris.* Chiamato $2a$ il diametro, l'incognita presa dal vertice sarà $x = a \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{5}}$.

589. XVIII. Il quadrato del lato del trigono regolare iscritto nel circolo, qual ragione ha al quadrato del raggio? *Ris.* Tripla.

590. XIX. I quadrati del lato del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari iscritti in un circolo qual ragione hanno tra loro? *Ris.* Il quadrato dell'uno eguaglia quelli degli altri due.

591. XX. Qual ragione hanno tra loro le differenze degli esagoni regolari circoscritto ed iscritto ad un circolo, dell'esagono e trigono iscritti, del trigono ed esagono circoscritti, e dell'esagono circoscritto e trigono iscritto? *Ris.* Continua aritmetica.

592. XXI. Qual ragione hanno tra loro tre poligoni re-

golari di lati $m, 2m, m$, il primo circoscritto e gli altri due iscritti al circolo? *Ris.* Continua geometrica.

593. XXII. Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di lati $m, 2m, 2m$, i primi due circoscritti e il terzo iscritto al circolo? *Ris.* Continua armonica.

594. XXIII. Iscritto e circoscritto al circolo uno stesso poligono regolare, trovare il raggio del circolo a cui circoscrivendo o iscrivendo un poligono simile, il nuovo poligono eguagli la differenza dei dati. *Ris.* Il raggio cercato è nel primo caso la metà del lato del dato poligono iscritto, nel secondo la metà del lato del circoscritto.

595. XXIV. Alzata nel semicircolo AMB l' ordinata PM per cui passi una corda NB condotta dall' estremità del diametro, trovar la ragione dei rettangoli AB × BP ed NB × BD. *Ris.* La ragione è d' egualità. 58.

596. XXV. Condotte da un punto M della circonferenza il cui centro è C, la tangente MT e l' ordinata MP, assegnar la ragione delle quattro linee TA, TP, TC, TB prese sul diametro dall' origine della tangente. *Ris.* La ragione è geometrica. 50.

597. XXVI. Data l' area AN $= a$ ed il solo contorno laterale ALMNC $= c$ d' una figura, trovare un rettangolo che la eguagli in area e con tre de' suoi lati anche in contorno. *Ris.* Se l, p sieno la larghezza e l' altezza del rettangolo cercato, si avrà $p = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 8a)}}{4}, l = \frac{4a}{c + \sqrt{(c^2 - 8a)}}$. 78.

598. XXVII. Da un dato punto in un lato dividere un triangolo in qualunque numero n di parti eguali. *Ris.* La soluzione dipende dal num°. 526.

599. XXVIII. Dividere un triangolo in n parti eguali con rette parallele ad un lato. *Ris.* Fatto a questo lato, la parte dell'altro da cui deve condursi la prima parallela sarà $x = \sqrt{\frac{a^2}{n}}$.

600. XXIX. Costruir la fotmula $x = \frac{bdm}{a(m+n)}$ nel caso del n°. 526. *Ris.* Si trovi in un lato del triangolo $\frac{bm}{m+n}$ e la costruzione è fatta.

601. XXX. Trovare un circolo eguale alla superficie d' un dato cilindro o cono retto. *Ris.* Se a sia il lato del solido, r il raggio della sua base, x quello del circolo cercato, si avrà $x = \sqrt{2ar}$ per il cilindro, $x = \sqrt{ar}$ per il cono.

602. XXXI. Dato un tronco di cono retto CD con le 92.

FIG. 92. basi AC, DE parallele, farvi una sezione HI parallela alle basi in modo che la circonferenza di essa sia media proporzionale aritmetica tra le circonferenze delle basi. *Ris.* Se sia $EC = d$, $EI = x$, si avrà $x = \frac{d}{2}$.

603. XXXII. Trovare un circolo eguale alla superficie d'un dato segmento sferico. *Ris.* Se sia a l'altezza del segmento, r il raggio della sua sfera, quello del circolo cercato sarà $x = \sqrt{2ar}$.

604. XXXIII. Trovare una sfera eguale in solidità ad un dato segmento sferico. *Ris.* Prese le denominazioni del passato problema, il raggio della sfera sarà $x = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt[3]{\left(\frac{3a^2r - a^3}{4}\right)}$, equazione che con la seguente s' insegna a costruire a suo luogo.

605. XXXIV. Trovare una sfera eguale alla somma d'un cono e d'un tronco di cono retti. *Ris.* Se a, a' sieno l' altezze del cono e del tronco, ed r, r', r'' i raggi delle lor basi, quello della sfera cercata sarà $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt[3]{\left[\frac{ar^2 + a'(r'^2 + r''^2 + r'r'')}{4}\right]}$.

606. XXXV. Data una sfera formarne un cono retto 1°. della data base, 2°. della data altezza, 3°. o un tronco di cono retto delle date basi, o d' una base e d' una altezza date. *Ris.* 1°. Se r, r' sieno i raggi della sfera e del cono, l' altezza di esso sarà $x = \frac{4r^3}{r'^2}$: 2°. se sia a l' altezza del cono, il raggio della sua base sarà $y = 2r\sqrt{\frac{r}{a}}$: 3°. se r', r'' sieno i raggi delle basi del tronco, la sua altezza sarà $z = \frac{4r^3}{r'^2 + r''^2 + r'r''}$; 4°. se sia r' il raggio della base del tronco, a la sua altezza, il raggio dell' altra base sarà $u = -\frac{r'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4r^3}{a} - \frac{3r'^2}{4}\right)}$.

FINE DELLA GEOMETRIA.

La Trigonometria 1805

TRIGONOMETRIA RETTILINEA

607. LA *Trigonometrìa* misura le parti dei triangoli e scioglie quando è possibile, questo general problema: *date tre delle sei cose che compongono un triangolo* (422), *trovar l' altre tre*. Ella è *rettilinea* se son rettilinei i triangoli da risolversi, ed è *sferica* se sono sferici. FIG.

608. Condotte nel quadrante CAB le tangenti in A, B, e dai varj raggi CM, CO ec. prolungati fino alle tangenti in X, T, in S ec., calate le varie ordinate MH, OG ec. sul raggio CA, ed MQ, OL ec. sul raggio CB, se a sia un angolo qualunque MCA, o il suo arco MA, chiamo MH il *seno* di a, e scrivo MH $= sen\, a$; AX la *tangente* di a, ed AX $= tang\, a$; CX la *secante* di a, e CX $= sec\, a$; AH il *seno verso* di a, ed AH $= sen\ v.\, a$; quattro rette, che con nome comune diconsi *funzioni* d' un angolo o d' un arco a: e poichè MCB o MB è il complemento di a (399), le quattro funzioni di MB diverranno *co-funzioni* di a, onde QM $=$ CH sarà il *coseno* di a, e CH $= cos\, a$; BT la *cotangente* di a, e BT $= cot\, a$; CT la *coseccante* di a, e CT $= cosec\, a$; BQ il *coseno verso* di a, e BQ $= cos\ v.\, a$. 99.

609 È chiaro che queste funzioni e co-funzioni variano col raggio CA $= r$: cosicchè il quadrante FQ del raggio CF $= r'$ dà mh per seno di a e non più MH ec.: ma essendo MH $: mh ::$ MC $: m$C $:: r : r'$, si avrà $mh = \frac{MH.r'}{r}$ o (se il raggio primitivo $r = 1$) $mh =$ MH$.r'$; per aver dunque la funzione mh basterà moltiplicar la primitiva MH per il nuovo raggio r'. Noi

99 faremo sempre $r=1$; e se non lo sia, le funzioni, perchè linee rette o potenze di esse, dovranno moltiplicarsi o partirsi per quella potenza di r che le renda omogenee (107).

610. Ciò supposto, si ha MH($=$QC$=\cos$ BM)$=$

1ª. $\text{sen}\, a = \cos(90^\circ - a)$ ... CH ($\cos a$) : HM ($\text{sen}\, a$) :: CA (1) : AX $=$

2ª. $\text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}$ ... CH ($\cos a$) : CA (1) :: CM (1) : CX $=$

3ª. $\sec a = \frac{1}{\cos a}$ ... AH $=$ AC $-$ CH $=$

4ª. $\text{sen}\, v.\, a = 1 - \cos a$ ... CH ($=$QM$=\text{sen}$ BM)$=$

5ª. $\cos a = \text{sen}(90^\circ - a)$ ... MH ($\text{sen}\, a$) : CH ($\cos a$) :: CB (1) : BT $=$

6ª. $\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a} = \frac{1}{\text{tang}\, a}$ ... QC ($\text{sen}\, a$) : BC (1) :: MC (1) : TC $=$

7ª. $\text{cosec}\, a = \frac{1}{\text{sen}\, a}$ ... BQ $=$ BC $-$ CQ $=$

8ª. $\cos v.\, a = 1 - \text{sen}\, a$ ... $CM^2 = MH^2 + HC^2 =$

9ª. $1 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a$ ... $CX^2 = CA^2 + AX^2 =$

10ª. $\sec^2 a = 1 + \text{tang}^2 a$ ... $CT^2 = CB^2 + BT^2 =$

11ª. $\text{cosec}^2 a = 1 + \cot^2 a$; formule fondamentali da cui ne avremo poi molt' altre.

611. Per ora osservo che da A a B i seni crescono e i coseni scemano, ambedue positivi; in A si ha $\text{sen}\, a = 0$ e $\cos a = r$; in B, a 90° da A, $\text{sen}\, a = r$ e $\cos a = 0$. Da B a D i seni scemano e son positivi, ma i coseni crescono e son negativi; in D, a 180° da A $\text{sen}\, a = 0$ e $\cos a = -r$. Da D ad E i seni crescono e i coseni scemano, ambedue negativi; in E, a 270° da A, $\text{sen}\, a = -r$ e $\cos a = -0$. Da E ad A i seni scemano e son negativi, e i coseni crescono e son positivi: in A, a 360°, tutto ricomincia come prima quando $a > 360^\circ$; e fatto, per esempio, $a = 90^\circ$, e supposto n un numero qualunque ed m il resto di

 FIG.

$\frac{n}{4}$, sarà *sen* na = *sen* ma, *cos* na = *cos* ma: così *sen* 7.90° = *sen* 3.90°, *cos* 14.90° = *cos* 2.90° ec.

612. Dunque anche l'altre funzioni, che come si è visto (610), dipendon tutte dal seno e dal coseno, varieranno in valore ed in segno per l'intera circonferenza: così la tangente alternativamente positiva e negativa nei quattro quadranti, sarà $tang\,a = \frac{sen\,a}{cos\,a} = \frac{0}{r} = 0$ in A, $= \frac{r}{0} = \infty$ in B, $= \frac{0}{-r} = -0$ in D, $= \frac{-r}{-0} = \infty$ in E, ricominciando anch'essa col primo ordine se $a > 360^\circ$. Ecco in compendio i cangiamenti delle quattro principali funzioni.

	a 0°	da 0° a 90°	a 90°	da 90° a 180°	a 180°	da 180° a 270°	a 270°	da 270° a 360°
sen	0	+	$+r$	+	0	−	$-r$	−
cos	$+r$	+	0	−	$-r$	−	-0	+
tang	0	+	$+\infty$	−	$-\rho$	+	$+\infty$	−
cot	∞	+	0	−	$-\infty$	+	-0	−

613. Osservo ancora che il seno MH d'un arco MA è la metà della corda MZ d'un arco doppio MAZ (406): onde 1°. come MZ è corda di MAZ e di MBDEZ, così MH è seno di MA e del suo supplemento MBD: 2°. come MAZ = 60° dà MZ = $r = 1$ (456), così MA = 30° dà MH = *sen* 30° = $\frac{1}{2}$; allora CH = *cos* 30° = (form. 9^a) $\sqrt{(1 - sen^2 30^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$: 3°. come OAZ′ = 90° dà OZ′ = $\sqrt{2}$ (459), così OA = 45° dà OG = *sen* $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$ = GC = *cos* 45°; allora anche CA = AS = *tang* $45^\circ = 1$ = SB = *cot* 45°: perciò gli archi equidifferenti da 45° in − ed in +, avranno reciprocamente i seni eguali ai coseni, ed MH = *sen* 30° = *sen* $(45^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{2}$ = 99.

99. $CF = \cos 60^\circ = \cos(45^\circ + 15^\circ)$, e $CH = \frac{1}{2}\sqrt{3} = PF$.

614. Datì ora i seni o metà di corde $\frac{m}{2} = sen\, a$, $\frac{n}{2} = sen\, b$ di due archi a, b, se si voglia il seno $\frac{d}{2} = sen\ (a \pm b)$ della lor somma o differenza, si avrà (form. 9ª.) $\cos a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}m^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, e $\cos b = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}n^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)}$; dunque (485.486) $\frac{d}{2} = \frac{m}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)} \pm \frac{n}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, cioè, fatto $r = 1$,

12ª. $sen\ (a \pm b) = sen\, a \cos b \pm sen\, b \cos a = \pm sen(b \pm a)$.

615. Dunque $\cos(a \pm b) =$ (form. 5ª.) $sen\ (90^\circ - (a \pm b)) = sen((90^\circ - a) \mp b) = sen(90^\circ - a) \cos b \mp sen\, b \cos(90^\circ - a)$: ma (form. 1ª. 5ª.) $sen\ (90^\circ - a) = \cos a$ e $\cos(90^\circ - a) = sen\, a$; dunque

13ª. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp sen\, a\, sen\, b = \cos(b \pm a)$: e se la form. 12ª. si divida per la 13ª, e il numeratore e denominator del secondo membro per $\cos a \times \cos b$, avremo

14ª. $tang\ (a \pm b) = \frac{tang\, a \pm tang\, b}{1 \mp tang\, a\, tang\, b}$; lasciando fin d'ora di notare (toltone qualche caso) la cotangente che si ha subito dalla tangente (form. 6ª.). Le formule dell'altre funzioni, e le varie espressioni di quelle medesime che abbiam trovate, si avrebbero nel modo stesso: ma basta a noi di dar le fondamentali da cui nascono tutte l'altre. Fermiamoci a considerar la 12ª. e la 13ª. che tanto importano.

616. Giacchè (614.615) $sen\ (a - b) = -sen(b - a)$ e $\cos(a - b) = \cos(b - a)$, combinando le formule 2ª, 3ª, 6ª, 7ª, si troverà $tang\ (a - b) = - tang\ (b - a)$, $\cot(a - b) = - \cot(b - a)$ ec.

617. Se gli angoli a, b sieno piccolissimi ed ab-

bian per seni s, σ, sarà prossimamente (form. 9ª.) $sen\,(a \pm b) = s\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sigma^2)^2} \pm \sigma\sqrt{(1 - \frac{1}{2}s^2)^2} = s(1 - \frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sigma(1 - \frac{1}{2}s^2) = (s \pm \sigma)(1 \mp \frac{1}{2}s\sigma) = s \pm \sigma = sen\,a \pm sen\,b$, per esser $s\sigma$ assai piccolo.

618. Facendo $a = 90°, = 180°, = 270°, = 360°$, le form. 12ª, 13ª, 14ª daranno

$$sen\begin{cases} 90° \pm b = + \cos b \\ 180° \pm b = \mp sen\,b \\ 270° \pm b = - \cos b \\ 360° \pm b = \pm sen\,b \end{cases} \qquad cos\begin{cases} 90° \pm b = \mp sen\,b \\ 180° \pm b = - \cos b \\ 270° \pm b = \pm sen\,b \\ 360° \pm b = + \cos b \end{cases}$$

$$tang\begin{cases} 90° \pm b = \mp \cot b \\ 180° \pm b = \pm tang\,b \\ 270° \pm b = \mp \cot b \\ 360° \pm b = \pm tang\,b \end{cases} \qquad cot\begin{cases} 90° \pm b = \mp tang\,b \\ 180° \pm b = \pm \cot b \\ 270° \pm b = \mp tang\,b \\ 360° \pm b = \pm \cot b \end{cases}$$

ove si noti 1°. che le funzioni negative $-sen\,b$, $-\cos b$ ec. appartengono ad archi che posson sempre determinarsi; infatti

$-sen\,b = sen\,(180° + b) = sen\,(360° - b)$
$-\cos b = \cos\,(180° \pm b)$
$-tang\,b = tang\,(180° - b) = tang\,(360° - b)$
$-\cot b = \cot\,(180° - b)$: 2°. che essendo $\cos\,(180° - b) = \cos b$ (astraendo dal segno), se un arco $b + m$ sia medio tra b e il suo supplemento, sarà $b + m < 180° - b$, $\cos\,(b + m) < \cos\,(180° - b)$ cioè $\cos\,(b + m) < \cos b$; e quando pur si moltiplichi $\cos\,(b + m)$ per n seni o coseni, sarà sempre (64) $n \cos\,(b + m) < \cos b$: 3°. che una stessa funzione appartiene a molti archi, come $sen\,b = \pm sen\,(180° \mp b) = \pm sen\,(360° \pm b)$, o in generale $sen\,b = \pm sen((2n + 1)\,180° \mp b) = \pm sen\,(n \,.\, 360° \pm b)$, espressione che si riduce alla prima; poichè $\pm sen\,((2n + 1)\,180° \mp b) = \pm sen\,(n \,.\, 360° + (180° \mp b)) = \pm sen\,(180° \mp b)$; e fatto $n = m + 1$, $\pm sen\,((m + 1)\,360° \pm b) = sen\,(m \,.\, 360° +$

$(360^\circ \pm b)) = \pm sen(360^\circ \pm b) = \pm sen(180^\circ + (180^\circ \pm b)) = \mp sen(180^\circ \pm b)$, onde tutti quei valori si ristringono a $sen\, b$, $sen(180^\circ - b)$, $- sen(180^\circ + b)$.

619. Sommate ora e sottratte le form. 12ª e 13ª, verrà

15ª. $sen\, a \cos b = \frac{1}{2} sen(a+b) + \frac{1}{2} sen(a-b)$
16ª. $sen\, b \cos a = \frac{1}{2} sen(a+b) - \frac{1}{2} sen(a-b)$
17ª. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$
18ª. $sen\, a\, sen\, b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$, formule che trasforman prodotti di seni in seni semplici.

620. Se in queste si faccia $a+b=p$, $a-b=q$, onde $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$, si avrà
19ª. $sen\, p \pm sen\, q = 2 sen \frac{1}{2}(p \pm q) \cos \frac{1}{2}(p \mp q)$
20ª. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$
21ª. $\cos q - \cos p = 2 sen \frac{1}{2}(p+q) sen \frac{1}{2}(p-q)$, ed anche

22ª. $tang\, p \pm tang\, q = (2^a.\ 12^a) \frac{sen(p \pm q)}{\cos p \cos q}$

23ª. $\cot q \pm \cot p = (6^a.\ 12^a.) \frac{sen(p \pm q)}{sen\, p\, sen\, q}$, formule che cangiano i seni semplici in prodotti di seni.

621. Se nella form. 19ª. sia $p = na$, $q = (n-2)a$, troveremo in generale
24ª. $sen\, na = 2\cos a\, sen(n-1)a - sen(n-2)a$
25ª. $\cos na = 2\cos a \cos(n-1)a - \cos(n-2)a$, con che i seni e coseni degli archi multipli si hanno dai loro inferiori: così fatto in particolare $n=2$, verrà
26ª. $sen\, 2a = 2 sen\, a \cos a$, ove se $2a = m$, viene $sen\, m = 2 sen \frac{1}{2} m \cos \frac{1}{2} m$.
27ª. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - sen^2 a$, che divise l' una per l' altra e diviso pure il numeratore e denominator del secondo membro per $\cos^2 a$, danno

28ª. $tang\, 2a = \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a}$.

622. Che se nella form. 19ª. sia $p = 90^\circ$, e nella 20ª. e 21ª. sia $q = 0$, verrà
29ª. $1 \pm sen\, q = 2 sen(45^\circ \pm \frac{1}{2} q) \cos(45^\circ \mp \frac{1}{2} q)$

30ª. $1 + \cos p = 2\cos^2 \frac{1}{2} p$

31ª. $1 - \cos p = 2 sen^2 \frac{1}{2} p$, e perciò

32ª. $sen \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{1 - \cos p}{2}}$

33ª. $\cos \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{1 + \cos p}{2}}$ } formule, che, divise l'una per l'altra e moltiplicato al solito il secondo membro per $1 - \cos p$ ovvero per $1 + \cos p$, danno

34ª. $tang \frac{1}{2} p = \frac{1 - \cos p}{sen\, p} = \frac{sen\, p}{1 + \cos p} = \sqrt{\frac{1 - \cos p}{1 + \cos p}}$.

623. Dividendo l'une per l'altre le formule del n°. 620, si troverà facilmente

35ª. $\frac{sen\, p + sen\, q}{sen\, p - sen\, q} = \frac{tang \frac{1}{2}(p+q)}{tang \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{sen \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)\, sen \frac{1}{2}(p-q)}$

36ª. $\frac{sen\, p \pm sen\, q}{\cos p + \cos q} = tang \frac{1}{2}(p \pm q)$

37ª. $\frac{sen\, p \pm sen\, q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{1}{2}(p \mp q)$

38ª. $\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{tang \frac{1}{2}(p-q)}$.

39ª. $\frac{tang\, p \pm tang\, q}{tang\, p \mp tang\, q} = \frac{sen(p \pm q)}{sen(p \mp q)}$

40ª. $\frac{tang\, p \pm tang\, q}{\cot q \pm \cot p} = tang\, p\, tang\, q$

41ª. $\frac{tang\, p \pm tang\, q}{\cot q \mp \cot p} = \frac{sen(p \pm q)\, tang\, p\, tang\, q}{sen(p \mp q)}$

624. Dividendo anche l'une per l'altre le form. 29ª, 30ª, 31ª, si ha

42ª. $\frac{1 \pm sen\, q}{1 \mp sen\, q} = tang^2 (45° \pm \frac{1}{2} q)$

43ª. $\frac{1 \pm sen\, q}{1 + \cos p} = (613 . 3°.) \frac{sen^2 (45° \pm \frac{1}{2} q)}{\cos^2 \frac{1}{2} p}$

44ª. $\frac{1 \pm sen\, q}{1 - \cos p} = \frac{sen^2 (45° \pm \frac{1}{2} q)}{sen^2 \frac{1}{2} p}$

45ª. $\frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\cot^2\frac{1}{2}p$: e se nella form. 39ª. si faccia $p=45°$, verrà (613.3°.)

46ª. $\frac{1\pm tang\,q}{1\mp tang\,q}=tang(45°\pm q)$. E tanto si ha dal sommare e sottrarre le formule 12ª. e 13ª.

625. Se queste ora si moltiplichino, è facile il dedurne

47ª. $sen(a+b)\,sen(a-b)=\cos^2 b-\cos^2 a=sen^2 a-sen^2 b$

48ª. $sen(a\pm b)\cos(a\pm b)=\frac{1}{2}sen\,2(a\pm b)$

49ª. $sen(a\pm b)\cos(a\mp b)=\frac{1}{2}(sen\,2a\pm sen\,2b)$

50ª. $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a-sen^2 b=\cos^2 b-sen^2 a$.

E se si dividano l'una per l'altra col divider pure al solito il secondo membro per $\cos a\cos b$, avremo

51ª. $\frac{sen(a+b)}{sen(a-b)}=\frac{tang\,a+tang\,b}{tang\,a-tang\,b}$

52ª. $\frac{sen(a\pm b)}{\cos(a\mp b)}=\frac{tang\,a\pm tang\,b}{1\pm tang\,a\,tang\,b}$

53ª. $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{1-tang\,a\,tang\,b}{1+tang\,a\,tang\,b}$. Tutte queste formule posson variarsi all'infinito col sommarle, sottrarle, molplicarle e dividerle.

626. I seni, i coseni e l'altre funzioni circolari di cui si è parlato finora, furon calcolate in parti del raggio 1 e di minuto in minuto: le più comode Tavole, a parer nostro, son quelle di Gardiner (Firenze 1796), ove si hanno anche le Tavole dei Logaritmi dei Seni e Tangenti di 10″ in 10″. Se ne troverà quì sotto la costruzione.

Calcolo delle Tavole dei Seni

627. Giacchè le funzioni dei primi 45° son co-funzioni dei 45° seguenti (613.3°.), per aver la Tavola dei Seni fino a 90° basta calcolare i seni fino a 45° e dedurne tutte l'altre funzioni per le formule 9ª, 2ª, 6ª, 3ª, 7ª. La natura del circolo fa poi vederci che i seni tornano in ordine inverso da 90° a 180°, e che quelli dei due ultimi quadranti differiscono nel solo segno da quelli dei due primi. Tutto perciò si ridurrebbe al calcolo d'un semiquadrante se la form. 12ª non diminuisse

diminuisse ancor di $15°$ la fatica; da essa e da $sen\,30° = \frac{1}{2}$, $cos\,30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (613) si ricava $sen(30° \pm b) \mp \frac{1}{2} sen\,b\sqrt{3} = \frac{1}{2} cos\,b$, onde $sen(30° + b) = sen(30° - b) + sen\,b\sqrt{3}$: si condurrà dunque il calcolo fino a $30°$, e posto poi $b = 1°$, $2°$, $3°$ .... $15°$ si anderà con la formula fino a $45°$.

628. Cerchiamo pertanto come possa giungersi a $30°$. Poichè (form. 9^a.) $sen^2 a + cos^2 a = 1 = \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2$ (149), e l' arco $a = 0$ dà

$$54^a.\ cos\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2},$$ sarà

$$55^a.\ sen\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}:$$ ma supposto $le = 1$ (308),

si ha (307) $e^{a\sqrt{-1}} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \text{ec.} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \text{ec.} + \left(a - \frac{a^3}{2.3} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1}$, ed $e^{-a\sqrt{-1}} = 1 - a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \text{ec.} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} + \text{ec.} - \left(a - \frac{a^3}{2.3} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1}$; dunque sostituendo e riducendo, verrà

$$56^a.\ sen\,a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3...6.7} + \frac{a^9}{2.3..8.9} - \text{ec.}$$

$$57^a.\ cos\,a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3...5.6} + \frac{a^8}{2.3...7.8} - \text{ec.}$$

$$58^a.\ tang\,a = \frac{sen\,a}{cos\,a} = (273)\ a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{3.5} + \frac{17a^7}{3^2.5.7} + \frac{62a^9}{3^2.5.7.9} + \text{ec.}$$

$$59^a.\ cot\,a = \frac{cos\,a}{sen\,a} = (273)\ \frac{1}{a} - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{3^2.5} - \frac{2a^5}{3^3.5.7} - \frac{a^7}{3^3.5^2.7} - \text{ec.}$$

629. Quì si osservi $1°$. che se a sia un arco piccolissimo, lo saranno molto più a^2, a^3 ec., che perciò spariranno in confronto di a, e allora $sen\,a = a = tang\,a$, $cos\,a = 1$, $cot\,a = \infty$: $2°$. che se il raggio supposto 1, sia r, queste serie, vo-

lendole o usar come stanno o calcolare, dovranno supplirsi con le potenze di r, secondo la regola (609), o moltiplicarsi per r nel final risultato (609): 3°. che l'arco a per cui son dati il seno, il coseno ec., supponendosi ridotto in linea retta, non potranno aversi quelle funzioni se non si rettifichi la semicirconferenza o non si sappia la ragione tra il raggio e lei. Ora applicando alla form. 56ª il ritorno delle serie (294), verrebbe

$$60^a.\ a = sen\,a + \frac{sen^3 a}{2.3} + \frac{3 sen^5 a}{2.4.5} + \frac{3.5\, sen^7 a}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\, sen^9 a}{2.4.6.8.9} +$$

ec., e preso un seno già noto, come $sen 30 = \frac{1}{2}$, si avrebbe l'arco di 30°, che dà quello di 180° = 30°.6: ma per rettificare un arco è più pronta e più utile la tangente.

630. Poichè da $sen\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $cos\,a = \ldots$ $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$ viene $e^{\pm a\sqrt{-1}} = cos\,a \pm \sqrt{-1}$. $sen\,a = cos\,a(1 \pm \sqrt{-1}.tang\,a)$, o presi i logaritmi (308), $\pm a\sqrt{-1} = l\,cos\,a + l(1 \pm \sqrt{-1}.tang\,a)$, si avrà sottraendo,

$$2a\sqrt{-1} = l\,\frac{1 + \sqrt{-1}.tang\,a}{1 - \sqrt{-1}.tang\,a},\ \text{e}\ (303)$$

$61^a.\ a = tang\,a - \frac{tang^3 a}{3} + \frac{tang^5 a}{5} -$ ec., serie che rettifica la semicirconferenza π. Infatti posto $a = 45°$, e $tang\,a = tang(b + c) = (613.3°.)\ 1 = (615)\ \frac{tang\,b + tang\,c}{1 - tang\,b\,tang\,c}$, sarà $tang\,b = \frac{1 - tang\,c}{1 + tang\,c}$; e se sia $tang\,c = \frac{1}{3}$ e perciò $tang\,b = \frac{1}{2}$, la somma degli archi b, c darà l'arco di 45°, ovvero

$$62^a.\ \frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{ec.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{ec.} \end{array} \right\} = \ldots$$

0,7853981633974483 ec. e perciò π = 3,14159265358979 32 ec. (510).

631. Se dunque nelle serie di sopra (628) si faccia $a =$

$\frac{90^\circ}{m}$ e sia q il quadrante rettificato, verrà

$$sen\,\frac{90^\circ}{m} = \frac{q}{m} - \frac{q^3}{2 \cdot 3m^3} + \frac{q^5}{2 \cdot 3 \ldots 5m^5} - \frac{q^7}{2 \cdot 3 \ldots 6 \cdot 7m^7} + \text{ec.}$$

$$cos\,\frac{90^\circ}{m} = 1 - \frac{q^2}{2m^2} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4m^4} - \frac{q^6}{2 \ldots 5 \cdot 6m^6} + \text{ec.}$$

$tang\,\frac{90^\circ}{m} = \frac{q}{m} + \text{ec.}$, $cot\,\frac{90^\circ}{m} = \frac{m}{q} - \text{ec.}$, essendo m un numero ad arbitrio. Avuti in tal guisa due seni e i loro coseni o in secondi o in primi o in gradi, si otterrà il seno e coseno della lor somma con le form. 12 e 13 fino a $sen\,30^\circ$, che dovendo essere $\frac{1}{2}$, servirà di riprova ai calcoli antecedenti.

632. Hanno altri usi l' equazioni $e^{\pm z\sqrt{-1}} = cos\,z \pm \sqrt{-1} \,.\, sen\,z$ (630): poichè 1°. riducono a seni le quantità immaginarie $a \pm b\sqrt{-1}$ se fatto $\frac{b}{a} = tang\,h$, onde $l\,(a \pm b\sqrt{-1}) = l\,a\,(1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}) = l\,a + l\,(1 \pm \sqrt{-1} \,.\, tang\,h) =$ (25) $l\,a - l\,cos\,h \pm h\sqrt{-1}$, si osservi che $cos\,h$ ($= \ldots \frac{sen\,h}{tang\,h}$) $= \frac{a}{b}\sqrt{(1 - cos^2 h)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{a}{c}$ fatto $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; allora $l\,(a \pm b\sqrt{-1}) = l\,c \pm h\sqrt{-1} =$ (630) $l\,c + l\,(cos\,h \pm \sqrt{-1} \,.\, sen\,h) = l\,c\,(cos\,h \pm \sqrt{-1} \,.\, sen\,h)$, ed $a \pm b\sqrt{-1} = c\,(cos\,h \pm \sqrt{-1} \,.\, sen\,h)$: 2°. riducono a seni anche le quantità esponenziali immaginarie $b^{\pm x\sqrt{-1}}$ che eguagliate ad $e^{\pm z\sqrt{-1}}$ onde $z = x\,l\,b$, divengono $cos\,(x\,l\,b) \pm \sqrt{-1} \,.\, sen\,(x\,l\,b)$: 3°. palesano immaginarj i logaritmi dei numeri negativi sol che si ponga $z = \pm(2n + 1)\,\pi$, d' onde (618) $sen\,z = 0$, $cos\,z = -1$ e $l - 1 = \pm(2n + 1)\,\pi\sqrt{-1}$, sempre immaginario; mentre l' altro $l\,1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$ che si ha da $z = \pm 2n\pi$, è reale nel caso di $n = 0$: 4°. danno perciò un' espressione di tali logaritmi atta al calcolo, facendo $l - a = l\,a \pm l - 1 = l\,a \pm (2n + 1)\,\pi\sqrt{-1}$.

633. Ma l' uso immediato di quelle equazioni (630) consiste nel cangiare i seni e i coseni d' archi multipli in potenze di seni e coseni d' archi semplici, e reciprocamente. Quanto al problema diretto, se invece di a si scriva in es-

se ma, avremo $e^{\pm ma\sqrt{-1}} = \cos ma \pm \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, ma = (\cos a \pm \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m$; dunque $\text{sen}\, ma = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\cos a + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m - (\cos a - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m)$, cioè

63[1]. $\text{sen}\, ma = m \cos^{m-1} a\, \text{sen}\, a - m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3} \cos^{m-3} \times a\, \text{sen}^3 a + m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3} \,.\, \frac{m-3}{4} \,.\, \frac{m-4}{5} \cos^{m-5} a\, \text{sen}^5 a -$ ec.; e $\cos ma = \frac{1}{2}((\cos a + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m + (\cos a - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m)$, cioè

64[a]. $\cos ma = \cos^m a - m \,.\, \frac{m-1}{2} \cos^{m-2} a\, \text{sen}^2 a + m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3} \,.\, \frac{m-3}{4} \cos^{m-4} a\, \text{sen}^4 a -$ ec. E quanto al problema inverso, fatto $\cos a + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a = p$, $\cos a - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a = q$, onde $2 \cos a = p + q$, $2\sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a = p - q$, e perciò I $(2 \cos a)^m = (p+q)^m$, II $(2\sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, a)^m = (p - q)^m$, il binomio I, riuniti i termini a due a due (158), darà $2^m \cos^m a = p^m + q^m + m(p^{m-2} + q^{m-2})pq + m \,.\, \frac{m-1}{2}(p^{m-4} + q^{m-4})p^2 q^2 +$ ec., ove $p^m = \cos ma + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, ma$, $q^m = \cos ma - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, ma$, e $p^m q^m = \cos^2 ma + \text{sen}^2 ma = 1$; perciò

65[a]. $2^{m-1} \cos^m a = \cos ma + m \cos(m-2)a + m \,.\, \frac{m-1}{2} \cos(m-4)a +$ ec. presa la metà dei termini dovuti alla potenza m per la riunione di essi a due a due. Il binomio II darà $2^m(\sqrt{-1})^m \text{sen}^m a = p^m \pm q^m - m(p^{m-2} \pm q^{m-2})pq + m \,.\, \frac{m-1}{2}(p^{m-4} \pm q^{m-4})p^2 q^2 -$ ec., coi segni di sopra se m è pari: in tal caso, fatto $m = 2n$, si ha $(\sqrt{-1})^{2n} = \pm 1$ (145): ma se $m = 2n - 1$, si ha $(\sqrt{-1})^{2n-1} = \mp\sqrt{-1}$, onde poichè $p^m - q^m = 2\sqrt{-1} \,.\, \text{sen}\, ma$, viene per m pari

66[a]. $2^{2n-1} \text{sen}^{2n} a = \pm \cos 2na \mp 2n \cos 2(n-1)a \pm n(2n -$

$1) \cos 2(n-2) a \mp \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3} \cos 2(n-3) a \pm$ ec.: e per m impari

$67^2.\ 2^{2(n-1)} sen^{2n-1} a = \mp sen(2n-1) a \pm (2n-1) \times sen(2n-3) a \mp (2n-1)(n-1) sen(2n-5) a \pm \ldots \frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)}{3} sen(2n-7) a \mp$ ec., presa al solito la metà dei termini dovuti alla potenza, e i segni di sopra se n è pari.

634. La form. 63^2. serve a dividere un dato arco ma in un numero m di parti eguali: fatto $sen\, ma = b$, $sen\, a = x$, $\cos a = z = \sqrt{(1-x^2)}$, ella diventa $b = mz^{m-1} x - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^{m-3} x^3 +$ ec., e con $m = 2, 3, 4$ ec. dà le seguenti equazioni per dividere nn arco

$b = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ . . . . in 2 parti
$b = 3x - 4x^3$ 3
$b = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-x^2)}$ 4
ec. ec. ec.

635. Di quì la risoluzione approssimata dell' equazioni di terzo grado nel caso irriducibile. Poichè se l' equazione $3x - 4x^3 = b = sen\, 3a = sen(180° - 3a) = - sen(180° + 3a)$ (618), che ha per radici $x = sen\, a$ (634), $= sen(60° - a)$, $= - sen(60° + a)$, si riduca alla vera forma $x^3 - \frac{3r^2x}{4} + \frac{r^2 sen\, 3a}{4} = 0$ (609), e si paragoni alla data $x^3 - px + q = 0$ (quando q è negativo si fa $x = -y$), avremo $\frac{3}{4} r^2 = p$, $\frac{1}{4} r^2 sen\, 3a = q$, onde $r = 2\sqrt{\frac{1}{3} p}$, e $sen\, 3a = \frac{3q}{p}$; e poichè $r > sen\, 3a$, sarà $2\sqrt{\frac{1}{3} p} > \frac{3q}{p}$ e $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4} q^2$, ciò che con p negativo forma il caso irriducibile (338); perciò *questo metodo risolve l' equazioni irriducibili di terzo grado*. Si avrà pertanto 1°. $\frac{3q}{p}$ ($= sen\, 3a$) $= r \cdot sen\, 3a$ (609),

e $sen\,3a = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$, con che si conosce $3a$ ed a: 2°. x (= $sen\,a$) = $r.\,sen\,a = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen\,a$: 3°. $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen(60° - a)$: 4°. $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,sen(60° + a)$.

Esempj. I. Sia $x^3 - 3x + 1 = 0$, onde $p = 3, q = 1$, $sen\,3a = \frac{1}{2}$, $a = 10°$; dunque $x = 2\,sen\,10° = 0,347296$, $x = 2\,sen\,50° = 1,532089$, $x = -2\,sen\,70° = -1,879385$. II. Sia $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, onde $p = 1, q = \frac{1}{3}$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, a = 20°$; dunque $x = \frac{2\,sen\,20°}{\sqrt{3}} = 0,394931$, $x = \frac{2\,sen\,40°}{\sqrt{3}} = 0,742227$, $x = \frac{-2\,sen\,80°}{\sqrt{3}} = -1,137158$. III. Sia $x^3 - 5x + 3 = 0$, onde $p = 5, q = 3$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$, $a = 14°\,43'\,57''$; dunque $x = \frac{2\sqrt{5}.\,sen\,14°\,43'\,57''}{\sqrt{3}} = 0,656617$, $x = \frac{2\sqrt{5}.\,sen\,45°\,16'\,3''}{\sqrt{3}} = 1,834246$, $x = \frac{-2\sqrt{5}.\,sen\,74°\,43'\,57''}{\sqrt{3}} = -2,49085$.

Risoluzione dei Triangoli Rettilinei.

636. Ogni lato d'un triangolo iscritto al circolo è doppio del seno dell' angolo opposto (418 . 613): perciò *i lati d' un triangolo son come i seni degli*
100. *angoli opposti*. Chiamati dunque g, g', g'' i lati BC, CA, AB, ed a, a', a'' gli angoli opposti, si avrà
I. $g : sen\,a = g' : sen\,a' = g'' : sen\,a''$. Quindi se $g'' < g$, sarà anche $a'' < a$ (428. 6°) ed $a'' < 90°$ (427): perciò *l' angolo opposto al minor dei lati*, è $< 90°$.

637. Fatta nel triangolo BAC la costruzione

spiegata altrove (443), e condotte ad AF prolungata in H, le normali BI, CH, sarà AFD ($= \frac{1}{2}$ DFE) + DFC ($= \frac{1}{2}$ DFG) + GFB ($= \frac{1}{2}$ GFE) $= \frac{1}{2}\,360° = 180°$, onde GFB = HFC (perchè supplementi di AFC) e BFI = CFG. Ora essendo 1 il raggio, i triangoli rettangoli BGF, CHF, BIF, CGF danno (636) BF : BG :: 1 : *sen* BFG :: CF : CH, e BF : BI :: 1 : *sen* BFI :: CF : CG; dunque CH × BI = BG × GC $= (q - g')(q - g'')$ (444): ma AB : BI :: 1 : *sen* BAI, ed AC : CH :: 1 : *sen* CAI; dunque moltiplicando le due analogie, AB × AC : BI × CH :: FIG. 100.

1 : sen^2 BAI, cioè 1°. $sen\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{g'g''}}$,

e quindi 2°. $cos\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{q(q-g)}{g'g''}}$, onde $tang\,\frac{1}{2}a =$

$\sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{q(q-g)}}$.

638. Pongasi ora il valor di $q = \frac{1}{2}(g + g' + g'')$ nella 1ª. equazione, e quadrando avremo $sen^2\,\frac{1}{2}a\,($ $=$

$\frac{1 - cos\,a}{2}$ (31°.)) $= \frac{(g+g''-g')(g+g'-g'')}{4g'g''}$, e però

II. $2g'g''\,cos\,a = g'^2 + g''^2 - g^2$, in cui se si cangi reciprocamente g, a in g'', a'' per aver $2gg'\,cos\,a'' = g'^2 + g^2 - g''^2$, e vi si pongano i valori di g''^2 preso da questa, e di g preso dalla I, si troverà $2g'g'' \times$

$cos\,a = 2g'^2 - \frac{2g'g''\,sen\,a\,cos\,a''}{sen\,a''}$, cioè

III. $tang\,a''\,(g' - g''\,cos\,a) = g''\,sen\,a$. Con queste tre formule si risolvono i triangoli obliquangoli.

639. Quanto ai rettangoli, sia a l'angolo retto, e chiamata h l'ipotenusa g, si ponga g e g' per g' e g'', a ed a' per a' ed a'': e poichè $sen\,a = 1$, $cos\,a = 0$, la Formula I darà $h = g : sen\,a = g' : sen\,a'$.

640. Dalla III si avrà $tang\, a' = g' : g$. E se in vece di a si supponga retto a'', sarà $tang\, a'' = \infty$, e $g' - h \cos a = 0$.

641. Si son disposte queste Formule nelle seguenti Tavole: ma nei triangoli obliquangoli si avverta che dati due angoli, o datone uno e trovatone un altro, il terzo è dato (424); nei rettangoli poi dato un angolo acuto o due lati, è dato l'altr' angolo (427) o l'altro lato (475); e dati i due angoli acuti, si avrà solo la ragion dei lati senza conoscerne alcuno (432). Del resto i seni e coseni molto grandi variando con gran lentezza, non danno l'esatto valor dell'angolo e convien trasformarli; perciò con $\cos a = g' : h$ (640) si fa $h : g' :: 1 : \cos a$, ed $h - g' : h + g' :: 1 - \cos a : 1 + \cos a$, onde (624) $tang\, \frac{1}{2} a = \sqrt{(h - g')} : \sqrt{(h + g')}$, e l'angolo a si ha con precisione: le tangenti e cotangenti variando rapidamente, non hanno d'uopo di trasformazione.

TAVOLA

TAVOLA I. per i Triangoli Rettangoli

I lati son g, g', gli angoli opposti a, a', l'ipotenusa è h. In generale IL significa l'*ipotenusa* e un *lato*, IA l'*ipotenusa* e un *angolo*, LAo un *lato* e l' *angolo opposto*, LAa un *lato* e l' *angolo adjacente*.

	Dati	Trovare	FORMULE
	IL		
642.	h, g	a	$sen\, a = g : h$ (639) ovvero $tang(45° + \frac{1}{2} a) = \sqrt{(h+g)} : \sqrt{(h-g)}$ (641)
643.	h, g'	a	$cos\, a = g' : h$ (640) ovvero $tang \frac{1}{2} a = \sqrt{(h-g')} : \sqrt{(h+g')}$ (641)
	IA		
644.	h, a	g	$g = h\, sen\, a$ (639).
645.		g'	$g' = h\, cos\, a$ (640)
646.	g, g'	a'	$tang\, a' = g' : g$ (640)
	LAo		
647.	g', a'	h	$h = g' : sen\, a'$ (639)
648.		g	$g = g' : tang\, a'$ (640)
	LAa		
649.	g', a	h	$h = g' : cos\, a$ (640)
650.	g, a'	g'	$g' = g\, tang\, a'$ (640)

TAVOLA II. per i Triangoli Obliquangoli.

I lati son g, g', g'', gli angoli opposti a, a', a''. In generale LAL significa *due lati* e l' *angolo compreso*, LLA *due lati* e un *angolo opposto*, ALA *due angoli* e il *lato compreso*, AAL *due angoli* e un *lato opposto*.

	Dati	Trovare	FORMULE
651.	g, g', g''	a	$q = \frac{1}{2}(g + g' + g'')$ $tang \frac{1}{2} a = \sqrt{(q-g')(q-g'')} : \sqrt{q(q-g)}$ (637)
	LAL		
652.	g', g'', a	g	$g = \pm\sqrt{(g'^2 + g''^2 - 2g'g'' cos\, a)}$ (638)
653.		a''	$tang\, a'' = g'' sen\, a : (g' - g'' cos\, a)$ (638)
	LLA		
654.	g, g', a	g''	$g'' = g' cos\, a \pm \sqrt{(g^2 - g'^2 sen^2 a)}$ (638)
655.		a'	$sen\, a' = g' sen\, a : g$ (636)
	ALA AAL		
656.	a, a'', g a'	g'	$g' = g\, sen\, a' : sen\, a$ (636)

Finiremo con alcuni Problemi per esercizio dei Principianti.

657. I. Trovare un angolo x la cui tangente sia n^{pla} del suo seno. *Ris.* $sen\, x = \frac{\sqrt{(n^2 - 1)}}{n}$.

658. II. Dividere un dato angolo a in due angoli $x, a - x$ tali che i loro seni sieno nella ragion data di $m:n$ .... *Ris.* $tang\, x = \frac{m\, sen\, a}{n + m\, cos\, a}$.

659. III. Data la differenza d di due angoli $x, x + d$ e la ragione $m:n$ dei loro seni, trovare gli angoli. *Ris.* $tang\, x = \frac{n\, sen\, d}{m - n\, cos\, d}$.

660. IV. Date le ragioni $n:1$ dei seni ed $m:1$ delle tangenti di due angoli x, z, trovare gli angoli. *Ris.* $tang\, x = \sqrt{\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}\right)}$, $tang\, z = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}\right)} = \frac{1}{m}\, tang\, x$.

661. V. Supposti aritmeticamente proporzionali i seni di tre angoli p, m, u, determinare quali debbano essere gli angoli estremi p, u affinchè anche i coseni di tutti e tre sieno nella medesima proporzione. *Ris.* Gli angoli debbono esser tali che $p - u$ sia piccolissimo.

662. VI. Data l'equazione $(n + N)\, sen\, u = (n - N)\, sen\, p$ ove n, N son note e $sen\, m$ è medio proporzionale aritmetico tra $sen\, p$ e $sen\, u$, trovar l'angolo $p - u$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $p - u = \frac{1}{n}\,(2N\, tang\, m)$.

663. VII. Date l'equazioni $(n + N)\, sen\, h = sen\, u'$ ed $(n - N)\, sen\, g = sen\, p'$ ove si ha $\pm h \mp g = p - u$, N è nota, e son noti $sen\, m$, $sen\, i'$, $sen\, m'$ medj proporzionali aritmetici tra $sen\, p$ e $sen\, u$, tra $sen\, g$ e $sen\, h$, e tra $sen\, u'$ e $sen\, p'$, trovar l'angolo $u' - p'$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $u' - p' = \frac{2N\, sen\, (i' \pm m)}{cos\, m\, cos\, m'}$.

664. VIII. Con la regola di doppia falsa posizione trovare un arco x che sia metà della sua tangente, o calcolar l'equazione $2x = tang\, x$. *Ris.* $x = 66° \, 46' \, 54'' \, 14'''$.

665. IX. Con la regola stessa ricavare il valor dell'an-

golo x dall' equazione $sen\ 16' = \frac{2 sen\ x\ sen^2 \frac{1}{2} x}{cos\ 2x}$. *Ris.* $x =$ $11° 44' 42''$ incirca.

666. X. Con le formule del N°. 628. sommare in generale la serie $S = sen\ a + sen(a+b) + sen(a+2b) + \ldots + sen(a+nb)$, e determinar particolarmente S nel caso di $a+nb = (n+1)a = 90°$. *Ris.* In generale $S = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{cos(a-\frac{1}{2}b) - cos[a+(n+\frac{1}{2})b]}{2 sen \frac{1}{2} b}$, in particolare $S = \frac{1}{2}(1 + cot \frac{1}{2} a)$.

667. XI. Risolver l' equazioni della forma $x^m \pm a^m = 0$. *Ris.* Il fattor generale della prima equazione si troverà $x^2 - 2ax\ cos \frac{2n+1}{m} \pi + a^2$, della seconda $x^2 - 2ax\ cos \frac{2n\pi}{m} + a^2$, ove $n = 0, = 1, = 2, = 3$ ec. e $\pi = 180°$.

668. XII. Un Vascello si avanzò di 50 miglia verso Levante, e di 116 verso Tramontana. Si cerca la posizione e la lunghezza del viaggio o della linea retta per cui ha camminato. *Ris.* Il vascello è andato per una strada che fa un angolo di $23° 19' 4''$ con la direzione di tramontana, ed ha di lunghezza 126 miglia in circa.

669. XIII. Data l' area s e uno degli angoli acuti a d' un triangolo rettangolo trovarne i lati x, y e l' ipotenusa z. *Ris.* $x = \sqrt{\frac{2s\ tang\ a}{r}}$, $y = \sqrt{\frac{2s\ cot\ a}{r}}$, $z = 2\sqrt{\frac{rs}{sen\ 2a}}$.

670. XIV. Dati i lati $CA = a$, $AH = b$ e gli angoli $ACB = m$, $AHB = n$, $CBH = r$ d' un quadrilatero, trovar l'angolo CBA 104.
e la diagonale AB. *Ris.* 1°. $cot\ CBA = \frac{a\ sen\ m\ cos\ r \pm b\ sen\ n}{a\ sen\ m\ sen\ r}$, ove il segno $-$ vale per il quadrilatero ACBH': 2°. $AB = \frac{a\ sen\ m}{sen\ CBA}$.

671. XV. Dati due circoli concentrici NPK, QRF con la tangente in Q e la corda QR nel minore, e condotta dal 9.
punto N la NK parallela a QR, la NE normale ad NP e la NL che formi l' angolo LNE = ENK, trovar la ragione di NK + NL a QR. *Ris.* La ragione è dupla.

FIG. 104. 672. XVI. Data la retta AC comune sezione di due piani triangolari ACB, ACD tali che la retta BD condotta per i due vertici sia normale al piano ACD, e dati oltre al triangolo ACB gli angoli d' inclinazione BCD $= m$, BAD $= n$, determinare il triangolo ACD, o sia *trovare sul piano indeterminato* MAR *il piano o triangolo di riduzione* ACD *del triangolo* ACB. *Ris.* Fatti gli angoli CAB $= a$, ABC $= b$, ACB $= c$, si troverà $\cos$ ACD $= \frac{\cos c}{\cos m}$, $\cos$ CAD $= \frac{\cos a}{\cos n}$, $\text{sen}\,\frac{1}{2}$ CDA $= \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+m-n)\,.\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+n-m)}{\cos m \cos n}\right)}$, e poichè è data AC, si avrà di qui tutto il resto.

TRIGONOMETRIA SFERICA.

673. Se il semicircolo PAp formi la sfera APap (546), di tutte l' ordinate il solo raggio AC descriverà un *circolo massimo* (547), e l'altre altri *circoli paralleli* tanto minori quanto più esse diminuiscono (548). Quindi la sfera ha un' infinità di circoli e massimi e minori (547): ma non usandosi quest' ultimi perchè ineguali, col nome di *circoli* e d' *archi* intenderemo in avvenire i circoli massimi e i loro archi. Ora la *Trigonometrìa Sferica* risolve i *Triangoli Sferici*, come ANMBA′, formati sulla superficie della sfera da tre circoli che si segan tra loro, ed hanno per centro il centro C della sfera: l' altro maggior triangolo ApaPA′BMNA le cui parti son date da quelle di ANMBA′, non si considera. 101.

674. Un diametro Pp normale ad un circolo AMa, è l' *asse* di questo circolo, e le sue estremità P, p ne sono i *poli*. Ogni altro circolo A′Ma′ con diverso asse P′p′ ha poli diversi P′, p′: per altro il punto A′ e il polo P′ si allontanano egualmente l'uno dal punto A, l'altro dal polo P, e perciò AA′ = PP′.

675. Dunque l' asse Pp farà sul circolo AMa tanti angoli retti quanti son raggi in esso, e gli archi PA, Pa che misuran quest' angoli, saranno di 90°: onde 1°. l' arco tra il polo d' un circolo e ogni punto della sua circonferenza, è di 90°: 2°. gli archi PA, Pa in un piano medesimo con la normale PC son normali alla circonferenza AMa: 3°. i due punti A, P bastando a determinar la posizione d' un circolo che dee passar per C (533), *due archi* PA, Pa *di* 90°, *due archi normali ad* AMa, *o anche un solo arco di* 90° *e normale, determinano il polo* P *di* AMa.

676. Il centro C comune ai circoli della sfera (673), dà per loro intersezione un diametro Aa: perciò 1°. se due circoli APa, AOa si son tagliati in A, non si taglieranno più che in a a 180° da A: 2°. onde due soli archi non chiudono spazio se non è ciascuno di 180°.

677. Si formi ora l' angolo sferico AMA′ con l' incon-

101. tro in M dei due archi AM, A′M prolungati, se occorra, fino a 90°. Condotte nei piani ANMC, A′BMC due normali da un punto stesso della comune intersezione CM, l'angolo da esse compreso misurerà l'inclinazion de' due piani o l'angolo AMN (534): ma questa inclinazione è anche determinata da quella degli assi, cioè dall'angolo PCP′ o dall' arco PP′ = AA′ (674); dunque *la misura d'un angolo sferico AMA′ sarà l'arco del circolo AA′, compreso dai suoi lati a 90° dal vertice* M

678. Dunque 1°. ogn' angolo sferico, e molto più la differenza di due, è < 180°: 2°. un arco che cade sopra d'un altro, ha gli angoli intorno = 180°: 3°. prolungato quest' arco, gli angoli opposti sono eguali, e la somma degli angoli sferici intorno ad un punto è 360°: 4°. l'angolo sferico AMA′ (= ACA′) superando (430) quello delle corde AM, A′M più lunghe dei raggi AC, A′C (475), i tre angoli d'un triangolo sferico son > 180° (424): ma poichè ognun di essi è < 180°, saranno i tre < 540°.

679. La somma degli angoli d'un triangolo sferico cade dunque tra 180° e 540°, nè può, come nel rettilineo, dedursi il valor del terz' angolo dagli altri due; quindi i tre angoli possono essere ottusi, retti o acuti, e *la somma di due è > 90° se l'altro sia = 90° o < 90°.*

680. Quanto poi ai lati d'un triangolo sferico, giacchè di quanti archi posson condursi per due punti P, A della superficie, il minimo appartiene ad un circolo massimo (509), gli archi dei circoli massimi sulla superficie sferica saranno, per quanto lo soffre la lor natura, come le linee rette sul piano: e quindi 1°. quest'archi o i loro angoli misurano sulla supetficie sferica le distanze, dette perciò *angolari*: 2°. nel triangolo sferico la somma di due lati supera il terzo, onde Ea + Fa > FE; e poichè AE + AF + Ea + Fa = 360° (676) e perciò AE + AF + FE < 360°, un lato non può giungere a 180° (676) nè la somma dei tre a 360°: 3°. due triangoli sferici sono eguali o abbian tre lati eguali a tre lati, o due eguali a due con l'angolo compreso eguale, o uno eguale a uno con eguali angoli sopra: 4°. perciò un triangolo o isoscele o isogonio, preso due volte e paragonato da parti opposte, ha eguali o i suoi angoli sulla base o i suoi lati: 5°. e fatto col tagliare il maggior angolo d'un triangolo scaleno, un triangolo isogonio, al maggior angolo si vedrà opposto il maggior lato ec.

681. Dovendo tutti i circoli della sfera segarsi scambievolmente (673), non si danno in essa triangoli simili o con

lati paralleli: onde due triangoli sferici equiangoli sono eguali; poichè se soprapposti non coincidessere, avrebbero le basi parallele.

682. Infine il triangolo sferico è o *rettangolo* o *obliquangolo*. Quanto al primo, sia egli HDF, cioè sull' arco HDNC insista normalmente l'arco DFOC. Si prolunghi HF e per I, L, a 90° da H, si conduca l'arco ILMB. E' chiaro che gli angoli retti in D, I danno M per polo di DI (675.3°.) ed MI = MD = 90°: perciò se DF divenga o DM = 90° o DO > 90°, anche IL (= H) diverrà o IM = 90° o IB > 90°, cioè *nel triangolo rettangolo l' angolo obliquo è della stessa specie del lato opposto*: onde DF < o > 90° dando H < o > D e quindi DF < o > FH (677.5°.), sarà DF il più corto o il più lungo di quanti archi posson condursi da F a DH. E' anche chiaro che se ciascun de' lati HD, DF è < 90°, l' ipotenusa HF (< HL = 90°) sarà < 90°; se ciascun de' lati CF, CI è > 90°, l' ipotenusa IF che incontra i lati di là da 90°, sarà pur < 90°; e se l'un de' lati CN è < 90° e l'altro CF > 90°, l'ipotenusa NF (> NL = 90°); sarà > 90°, onde *i lati della stessa o di diversa specie hanno l' ipotenusa* < o > 90°. Perciò gli angoli obliqui omogenei ai lati opposti, indicano la specie dell' ipotenusa, e reciprocamente: così l' ipotenusa e un lato di simile o di diversa specie danno l' altro lato < o > 90°. Ma se un lato intorno all' angolo retto è 90°, anche l' ipotenusa sarà 90° (675.3°.) e il terzo lato può essere o >, o =, o < 90°. 102.

683. Quanto al triangolo obliquangolo, sia egli ACB, e da' suoi vertici come poli si descrivano e si prolunghino fino all' incontro gli archi FE, ED, DF. Poichè A, C sono a 90° dal punto stesso F, sarà F il polo di AC, e D, E lo saranno di CB, BA (675.3°.): perciò prolungati in G, H i lati di ACB fino all' incontro di DF, sarà DH = FG = 90° (675), e DH + FG = DF + GH = 180°, onde DF sarà il supplemento di GH = C (677), come FE, ED lo saranno di A, B. Essendosi poi fatto AK = BM = 90°, sarà AK + BM = MK + AB = 180°, onde AB sarà il supplemento di MK = E, come BC, CA lo saranno di D, F. Dunque il triangolo DEF è *supplementario* di ACB, ed avendosi, per esempio, B = 180° — DE, sarà (618) $sen\,B = sen\,DE$, $cos\,B = -cos\,DE$, $sen\,\frac{1}{2}B = cos\,\frac{1}{2}DE$, ove in generale se $\frac{1}{2}m > 90°$, sarà $sen\frac{1}{2}m = -cos\frac{1}{2}n$ (611), posto n il supplemento di m. 103.

Risoluzione dei Triangoli Sferici.

102. 684. Da un angolo F del triangolo HGF si cali l' arco normale FD, e dal centro E partano i raggi EF, ED, EH: se da F scenda sul piano DHE la normale FA ed il piano FAK incontri normalmente HE in K, i triangoli FAE, FAK, FKE saranno rettangoli e fatto 1 il raggio, daranno AF : FE :: *sen* FEA : 1, AF : FK :: *sen* FKA : 1, KF : FE :: *sen* FEK : 1; onde *sen* FEK : 1 :: *sen* FEA : *sen* FKA : ma *sen* FEK = *sen* FH, *sen* FEA = *sen* FD (608), e *sen* FKA = *sen* H (677); dunque *sen* FH : 1 :: *sen* FD : *sen* H; dunque nell' altro triangolo, rettangolo FDG sarà del pari *sen* FG : 1 :: *sen* FD : *sen* G; dunque nel total triangolo HFG sarà *sen* H : *sen* G :: *sen* FG · *sen* FH. Chiamati pertanto g, g', g'' i lati del triangolo, ed a, a', a'' gli angoli opposti ad essi, si avrà

I. $sen\, g : sen\, a = sen\, g' : sen\, a' = sen\, g'' : sen\, a''$.

685. Dunque $sen\, a + sen\, a' : sen\, a \backsim sen\, a' :: sen\, g + sen\, g' : sen\, g \backsim sen\, g'$, e però (623) $\frac{tang\frac{1}{2}(a+a')}{tang\frac{1}{2}(g+g')} = \ldots$ $\frac{tang\frac{1}{2}(a \backsim a')}{tang\frac{1}{2}(g \backsim g')}$: e poichè il secondo membro è sempre positivo (678), i due termini del primo hanno il segno stesso, e *le semisomme di due lati e degli angoli a loro opposti son della stessa specie.*

686. Ora essendo i seni degli angoli come i lati opposti nella Trigonometrìa rettilinea (636), e come i loro seni nella sferica (684), se presi i seni dei lati in vece dei lati, si applichi a questa il raziocinio già fatto in quella (637), verrà 1ª. $sen\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{sen(q-g')\, sen(q-g'')}{sen\, g'\, sen\, g''}}$, 2ª. $cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{sen\, q\, sen(q-g)}{sen\, g'\, sen\, g''}}$, formule che il triangolo supplementario (683) (fatta m la metà della somma degli angoli) cangia in 3ª. $cos\frac{1}{2}g = \ldots$ $\sqrt{\frac{cos(m \backsim a')\, cos(m \backsim a'')}{sen\, a'\, sen\, a''}}$, 4ª. $sen\frac{1}{2}g = \ldots$ $\sqrt{\frac{-\, cos\, m\, cos(m \backsim a)}{sen\, a'\, sen\, a''}}$: e divisa la 1ª. per la 2ª., e la 3ª. per

per la 4ª., viene $tang\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{sen(q-g')\,sen(q-g'')}{sen\,q\,sen(q-g)}}$,

$cot\,\frac{1}{2}g = \sqrt{\frac{cos(m \backsim a')\,cos(m \backsim a'')}{-cos\,m\,cos\,(m \backsim a)}}$, ove il radicale non è immaginario perchè $m > 90°$.

687. Pongasi ora il valor di $q = \frac{1}{2}(g+g'+g'')$ nella 1ª. equazione di sopra, e quadrando avremo $sen^2\frac{1}{2}a\,(=\frac{1-cos\,a}{2}\,(622)) = \frac{sen\frac{1}{2}(g+g''-g')\,sen\frac{1}{2}(g+g'-g'')}{sen\,g'\,sen\,g''} =$ $(620)\,\frac{cos(g' \backsim g'')-cos\,g}{2\,sen\,g'\,sen\,g''} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(614)\,\frac{cos\,g'\,cos\,g''+sen\,g'\,sen\,g''-cos\,g}{2\,sen\,g'\,sen\,g''}$, onde

II. $cos\,a\,sen\,g'\,sen\,g'' = cos\,g - cos\,g'\,cos\,g''$, che il triangolo supplementario trasforma in

III. $cos\,g\,sen\,a'\,sen\,a'' = cos\,a + cos\,a'\,cos\,a''$. Onde giacchè $cos\,a$ e $cos\,g$ hanno lo stesso segno o danno a, g della stessa specie finchè $cos\,g > cos\,g'\,cos\,g''$ e $cos\,a > cos\,a'\,cos\,a''$, cioè finchè g' o g'' ovvero a' o a'' hanno il noto valore *intermedio* (618), si conchiuderà che *un angolo o lato è della stessa specie del lato o angolo opposto se l' un de' lati o angoli adjacenti sia medio tra quel lato o angolo opposto ed il suo supplemento*. La regola inversa non ha luogo.

688. Fatto nella II $tang\,g''\,cos\,a = tang\,\varphi$, verrà $sen\,g' \times tang\,\varphi = \frac{cos\,g}{cos\,g''} - cos\,g'$, e riducendo, $cos\,g = cos\,g''\,cos\,(g' \backsim \varphi) : cos\,\varphi$.

689. E fatto nella III. $tang\,a''\,cos\,g = cot\,\varphi$, verrà $sen\,a'\,cot\,\varphi = \frac{cos\,a}{cos\,a''} + cos\,a'$, e riducendo, $cos\,a = cos\,a'' \times sen\,(a'-\varphi) : sen\,\varphi$.

690. Che se nella II si ponga reciprocamente g'', a'' per g, a, onde si abbia $cos\,a''\,sen\,g'\,sen\,g = cos\,g'' - cos\,g' \times cos\,g$, sostituiti nella II. i valori di $cos\,g''$ preso da questa

e di $sen\,g''$ preso dalla I, si troverà $\cot a \, sen\,a'' = \frac{\cot g}{sen\,g'}(1 - \cos^2 g') - \cos g' \cos a''$, cioè

IV. $\cot a \, sen\,a'' = \cot g \, sen\,g' - \cos g' \cos a''$, ove fatto $\cot g : \cos a'' = \cot \phi$, verrà $\cot a \, tang\,a'' = \cot \phi \, sen\,g' - \cos g'$ e riducendo, $\cot a = \cot a'' \, sen\,(g' - \phi) : sen\,\phi$. Fatto pure $\cot a : \cos g' = tang\,\phi$, verrà $tang\,\phi \, sen\,a'' = \cot g \, tang\,g' - \cos a''$, e riducendo, $\cot g = \cot g' \cos(a'' \backsim \phi) : \cos \phi$. Con queste formule si risolvono i triangoli obliquangoli.

691. Quanto ai rettangoli, sia a l' angolo retto, e chiamata h l' ipotenusa g, si prendano g, g', a, a' per g', g'', a', a'', e poichè $sen\,a = 1$, $\cos a = \cot a = 0$, la Formula I darà $sen\,h = sen\,g : sen\,a$. D'onde s' impara che come $1 > sen\,a$, così $sen\,h > sen\,g$, e *l' ipotenusa eccederà o sarà ecceduta dal lato, secondo che egli sarà* $<$ o $>$ 90° (611). Del resto se i seni o coseni di queste e delle seguenti formule sieno molto grandi, il loro esatto valore si avrà o dalla solita trasformazione (641), o da qualche altra formula che indicheremo nella seguente Tavola: così da $1 : sen\,h :: sen\,a : sen\,g$, viene $\frac{1 + sen\,h}{1 - sen\,h} = \ldots \frac{sen\,a + sen\,g}{sen\,a - sen\,g}$, cioè (624. 623) $tang(45^\circ + \frac{1}{2} h) = \pm \ldots \sqrt{tang \frac{1}{2} (a + g) \cot \frac{1}{2} (a - g)}$: e nel modo stesso $sen\,a = sen\,g : sen\,h$ diventa $tang(45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{tang \frac{1}{2} (h + g) \cot \frac{1}{2} (h - g)}$, ove il doppio segno è determinato dalla proprietà del lato (682).

692. La formula II dà $\cos h = \cos g \cos g'$, che si trasforma (691) in $tang \frac{1}{2} g = \sqrt{tang \frac{1}{2} (h + g) \, tang \frac{1}{2} (h - g)}$, ove il doppio segno è inutile perchè $\frac{1}{2} g < 90^\circ$ (680).

693. La Formula III dà $\cos h = \cot a \cot a'$, che ridotta ad $\frac{1}{\cos h} = \frac{tang\,a}{\cot a'}$, diviene $\frac{1 - \cos h}{1 + \cos h} = \frac{-(\cot a' - tang\,a)}{\cot a' + tang\,a}$

e quindi (625.622.) $tang \frac{1}{2} h = \sqrt{-\cos(a' + a)} : \sqrt{\cos(a' \backsim a)}$.

694. La Formula IV. dà $\cos a' = tang\, g \cot h$, che si trasforma al solito (691).

695. Ma se in vece di a si supponga retto a'', la Formula III darà $\cos g = \cos a : sen\, a'$, che al solito può ridursi (691).

696. Supposto sempre a'' retto, la Formula IV dà $\cot a = \cot g\, sen\, g'$, da cui s' impara che come $1 > sen\, g'$, così $\cot g > \cot a$ o $tang\, a > tang\, g$: onde *l' angolo obliquo* $<$ o $> 90°$ *eccederà o sarà ecceduto dal lato opposto* (611).

Tutte queste formule si son disposte per maggior comodo nelle due Tavole seguenti.

TAVOLA I.

Per i triangoli sferici rettangoli

*Tutto è quì come nei rettangoli rettilinei. Il segno * indica gli archi della stessa specie (682), e il segno ** i casi dubbj di cui nell' Applicazioni.*

	Dati	Trovare	FORMULE
697.	IL	g'	$\cos g' = \cos h : \cos g$, ovvero $\tang \frac{1}{2} g' = \sqrt{\tang \frac{1}{2}(h+g) \tang \frac{1}{2}(h-g)}$ (692)
698.	h, g	a	$\sen a^* = \sen g^* : \sen h$, ovvero $\tang(45° + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\tang \frac{1}{2}(h+g) \cot \frac{1}{2}(h-g)}$ (691)
699.		a'	$\cos a' = \tang g \cot h$, ovvero $\tang \frac{1}{2} a' = \sqrt{\sen(h-g)} : \sqrt{\sen(h+g)}$ (694)
700.	IA h, a	g	$\sen g^* = \sen h \sen a^*$ (691), ovvero da h, a ho a' (701), e da h, a' ho g (702)
701.		a'	$\cot a' = \cos h : \cot a$ (693)
702.	h, a'	g	$\tang g = \cos a' : \cot h$ (694)
703.	g, g'	h	$\cos h = \cos g \cos g'$ (692), ovvero da g, g' ho a (704) e da g, a ho h (705)
704.		a	$\cot a = \cot g \sen g'$ (696)
705.	LAo	h^{**}	$\sen h = \sen g : \sen a$, ovvero $\tang(45° + \frac{1}{2} h) = \pm \sqrt{\tang \frac{1}{2}(a+g) \cot \frac{1}{2}(a-g)}$ (691)
706.	g, a	g'^{**}	$\sen g' = \cot a : \cot g$, ovvero $\tang(45° + \frac{1}{2} g') = \pm \sqrt{\sen(a+g)} : \sqrt{\sen(a-g)}$ (696)
707.		a'^{**}	$\sen a' = \cos a : \cos g$, ovvero $\tang(45° + \frac{1}{2} a') = \pm \sqrt{\cot \frac{1}{2}(a+g) \cot \frac{1}{2}(a-g)}$ (695)
708.	LAa	h	$\cot h = \cos a' : \tang g$ (694)
709.	g, a'	a	$\cos a = \cos g \sen a'$ (695), ovvero da g, a' ho h (708), e da g, h ho a (698)
710.	g', a	g	$\cot g = \cot a : \sen g'$ (696)
711.	a, a'	h	$\cos h = \cot a \cot a'$, ovvero $\tang \frac{1}{2} h = \sqrt{-\cos(a'+a)} : \sqrt{\cos(a' \backsim a)}$ (693)
712.		g	$\cos g = \cos a : \sen a'$ (695), ovvero da a, a' ho h (711), e da a', h ho g (702)

 FIG.

Applicazioni. I. Sia (697) $h = 127° 25' 20''$, $g = 13° 17' 25''$. Poichè $\cos h > 90°$ è negativo (611), verrà $l\, sen\, 37° 25' 20'' - l \cos 13° 17' 25'' = 9,7954676 = l - \cos g' = l - \cos 51° 21' 41'' = l \cos 128° 38' 19''$ (618), e $g' = 128° 38' 19''$. I logaritmi di $-sen$, $-\cos$ non son di numeri negativi (618).

II. Sia (699) $h = 127° 25' 20''$, $g = 128° 38' 19''$; dunque $\cos a' = - \cot 38° 38' 19'' \times - tang\, 37° 25' 20''$, e però $\cos a$ sarà positivo e $< 90°$, cioè $a = 16° 49' 31''$. In questi casi la sola attenzione ai segni indica la specie degli archi.

III. Sia (700) $h = 81° 13'$, $a = 37° 19'$; dunque $l\, sen\, 81° 13' + l\, sen\, 37° 19' = 9,7775070 = l\, sen\, g$ e $g = 36° 48' 22'',4$ ovvero $g = 143° 11' 37'',6$ (613): ma dovendo g, a esser della stessa specie, ha luogo il primo valore. S' impari da quest' esempio a valutare anche i decimi di secondo, senza di che si farebbero spesso errori considerabili.

IV. Sia (705) $g = 13° 17' 20''$, $a = 25°$; dunque $l\, sen\, 13° 17' 20'' - l\, sen\, 25° = 9,7355170 = l\, sen\, h$: perciò $h = 32° 56' 57'',7$ ovvero $h = 147° 3' 2'',3$, ed il caso è dubbio se per determinare h non si sappia la specie degli angoli obliqui (682). E' dubbio anche il caso di a o $a' = 90°$, e solo si saprà che l' altr' angolo eguaglia il suo lato opposto: così se $H = D = 90°$, sarà $FD = FH = 90°$, ed $F = DH$ (677) 102.
indeterminato. E' però raro che in pratica non resti la soluzione in qualche modo determinata.

TAVOLA II.

PER I TRIANGOLI SFERICI OBLIQUANGOLI.

Tutto è quì come negli obliquangoli rettilinei e nella Tavola antecedente.

	Dati	Trovare	FORMULE
713.	g, g', g''	a	$\left(q = \frac{1}{2}(g + g' + g'')\right.$ $\left. tang\, \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{sen\,(q - g')\, sen\,(q - g'')}{sen\, q\, sen\,(q - g)}}\right)$ (686)
	LAL		
714.	$\overset{\frown}{g'}, \overset{\frown}{g''}, \overset{\frown}{a}$	g	$\left(tang\, g'' \cos a = tang\, \varphi\right.$ $\left. \cos g = \cos g'' \cos(g' \backsim \varphi) : \cos \varphi\right)$ (688)
715.	g, g', a''	a	$\left(\cot g : \cos a'' = \cot \varphi\right.$ $\left. \cot a = \cot a''\, sen\,(g' - \varphi) : sen\, \varphi\right)$ (690)
	LLA		
716.	$\overset{\frown}{g}, \overset{\frown}{g''}, \overset{\frown}{a}$	g'^{**}	$\left(tang\, g'' \cos a = tang\, \varphi\right.$ $\left. \cos(g' \backsim \varphi) = \cos g \cos \varphi : \cos g''\right)$ (688)
717.	g, g', a	(a'^{**}	$sen\, a' = sen\, g'\, sen\, a : sen\, g$ (684)
718.		(a''^{**}	$\left(\cot a : \cos g' = tang\, \varphi\right.$ $\left. \cos(a'' \backsim \varphi) = \cot g \cos \varphi : \cot g'\right)$ (690)
719.	a, a', a''	g	$\left(m = \frac{1}{2}(a + a' + a'')\right.$ $\left. \cot \frac{1}{2} g = \sqrt{\frac{\cos(m \backsim a') \cos(m \backsim a'')}{- \cos m \cos(m \backsim a)}}\right)$ (686)
	ALA		
720.	$\overset{\frown}{a'}, \overset{\frown}{a''}, \overset{\frown}{g}$	a	$\left(tang\, a'' \cos g = \cot \varphi\right.$ $\left. \cos a = \cos a''\, sen\,(a' - \varphi) : sen\, \varphi\right)$ (689)
721.	a, a'', g'	g	$\left(\cot a : \cos g' = tang\, \varphi\right.$ $\left. \cot g = \cot g' \cos(a'' \backsim \varphi) : \cos \varphi\right)$ (690)
	AAL		
722.	$\frown\frown\frown$	a'^{**}	$\left(tang\, a'' \cos g = \cot \varphi\right.$ $\left. sen\,(a' - \varphi) = \cos a\, sen\, \varphi : \cos a''\right)$ (689)
723.	a, a'', g	g''^{**}	$sen\, g'' = sen\, g\, sen\, a'' : sen\, a$ (684)
724.		g'^{**}	$\left(\cot g : \cos a'' = \cot \varphi\right.$ $\left. sen\,(g' - \varphi) = \cot a\, sen\, \varphi : \cot a''\right)$ (690)

Applicazioni. I. Sia (716) $a = 42° 15' 3'', 3$, $g = 50° 10' 30''$, $g'' = 76° 35' 36''$; si troverà $\varphi = 72° 9' 2'', 7$, $cos (g' \backsim \varphi) = 32° 9' 3'', 3$, caso dubbio, non sapendosi se questo sia il valor di $g' - \varphi$ o di $\varphi - g'$; nel primo caso $g' = 32° 9' 3'', 3 + \varphi = 104° 18' 6''$, nel secondo $g' = \varphi - 32° 9' 3'', 3 = 39° 59' 59'', 4$; perciò è dubbia anche la formula 718.

II. Sia (720) $a' = 42° 15' 13'', 3$, $a'' = 34° 15' 3''$, $g = 76° 35' 36''$; si troverà $\varphi = 81° 1' 42'', 8$, onde $a' - \varphi = - 38° 46' 29'', 5$; di quì $cos\, a = - cos\, 58° 23' 40'' = cos\, 121° 36' 20''$ (618), onde $a = 121° 36' 20''$.

III. Sia (722) $a = 42° 15' 13'', 3$, $a'' = 121° 36' 20''$, $g = 50° 10' 30''$; poichè $tang\, 121° 36' 20'' = - cot\, 31° 36' 20''$, verrà $cot\, \varphi = - cot\, 43° 51' 16'', 7$ e $\varphi = - 43° 51' 16'', 7$. Quindi essendo $cos\, a'' = - sen\, 31° 36' 20''$, si avrà $sen\, (a' - \varphi) = \frac{cos\, 42° 15' 13'', 3 \times - sen\, 43° 51' 16'', 7}{- sen\, 31° 36' 20''}$ positivo, ed $a' - \varphi = 78° 6' 20''$ ovvero $= 101° 53' 40''$; onde $a' = 34° 15' 3'', 3$ ovvero $= 58° 2' 23'', 3$.

IV. Sia (723) $a = 61° 25'$, $a'' = 82° 36'$, $g = 59° 40'$; si troverà $g'' = 77° 5' 12''$ ovvero $= 102° 54' 48''$. Il caso perciò è dubbio se non si conosca la specie di g'' o non la fissi uno dei due noti teoremi (685.687): ma il secondo non serve, perchè a non è medio tra a'' e il suo supplemento; e ben si vede che la regola inversa non ha luogo, perchè a non è medio, e intanto a'', g son della stessa specie. Neppur serve il primo, perchè le semisomme dei lati ed angoli opposti vengono $< 90°$ con ambedue i valori di g''. Se fosse $a = 79° 35' 13''$, $a'' = 77° 0' 26''$, $g = 53° 17' 7''$, l'uno e l'altro teorema toglierebbe il dubbio e darebbe $g'' = 52° 34' 40''$.

V. Sia (724) come prima $a = 42° 15' 13'', 3$, $a'' = 121° 36' 20''$, $g = 50° 10' 30''$: avremo $cos\, a'' = - sen\, 31° 36' 20''$ e $\varphi = - 32° 8' 50''$; dunque poichè $cot\, a'' = - tang\, 31° 36' 20''$, si avrà $sen\, (g' - \varphi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{cot\, 42° 15' 13'', 3 \times - sen\, 32° 8' 50''}{- tang\, 31° 36' 20''}$ positivo, e $g' - \varphi = 72° 9'$ ovvero $= 107° 51'$; onde $g' = 40° 0' 10''$ ovvero $= 75° 42' 10''$.

725. Molte di queste formule si cangiano in quelle dei triangoli rettilinei col suppor gli sferici molto piccoli, e però i seni e le tangenti confuse coi lati, e i coseni con l'unità: se però in una formula entrino più coseni, dovrà spesso farsi $cos\, a = 1 - \frac{1}{2} a^2$ (727), trascurando poi nei prodotti, come infinitesime, le quantità che eccedono il se-

condo grado. Eccone gli esempj: 1°. $\cos a = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\cos g - \cos g' \cos g''}{\operatorname{sen} g' \operatorname{sen} g''}$ (687) si cangia in $\cos a = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1 - \frac{1}{2}g^2 - (1 - \frac{1}{2}g'^2)(1 - \frac{1}{2}g''^2)}{g'g''} = \frac{g'^2 + g''^2 - g^2}{2g'g''}$ (638): 2°. $\cos a' = \frac{\operatorname{tang} g}{\operatorname{tang} h}$ (699) diventa $\cos a = \frac{g}{h}$ (643): 3°. $\cos h = \cos g \cos g'$ (703) si trasforma in $1 - \frac{1}{2}h^2 = (1 - \frac{1}{2}g^2)(1 - \frac{1}{2}g'^2)$, onde $h^2 = g^2 + g'^2$ (474).

726. Con tal mezzo si ha l' error commesso nel trattar come rettilinei i triangoli sferici all'uso degli Astronomi: poichè prese le note formule di $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ ec. (628), e diviso per r'' (522) il lato o arco che si vuole in parti di raggio, l' error cercato e moltiplicato per r'' (522) verrà espresso in secondi. Così dati h, a si trova 1°. $\operatorname{sen} g = \operatorname{sen} h \times \operatorname{sen} a$ (700) cioè (628) $g - \frac{1}{6}g^3 = \operatorname{sen} a (h - \frac{1}{6} h^3)$, onde $g^3 = h^3 \operatorname{sen}^3 a$ (soppresse le più alte potenze); dunque $g = h \operatorname{sen} a - \frac{1}{6} h^3 \operatorname{sen} a (1 - \operatorname{sen}^2 a)$: ma $g = h \operatorname{sen} a$ (644)); dunque $e = -\frac{h^3}{r''^3} \times \frac{\operatorname{sen} a \cos^2 a}{6} r'' = -\frac{h^3 \operatorname{sen} a \cos^2 a}{6r''^2}$: 2°. $\operatorname{tang} g = \operatorname{tang} h \cos a'$ (702), cioè (628) $g + \frac{1}{3}g^3 = \cos a' (h + \frac{1}{3} h^3)$, onde $g^3 = h^3 \cos^3 a'$, e $g = h \cos a' + \frac{1}{3} h^3 \cos a' (1 - \cos^2 a')$: ma $g = h \cos a'$ (645); dunque $e = \frac{h^3 \cos a' \operatorname{sen}^2 a'}{3r''^2}$: 3°. $\cot a' = \cos h \operatorname{tang} a$ (701) $= \operatorname{tang} a (1 - \frac{1}{2} h^2)$ (628); e poichè $a' = 90° - a$ (427.4°), sarà $\cot a' = \cot (90° - a + e) = \cot (90° - (a - e)) = \operatorname{tang} (a - e)$ (618); dunque $\operatorname{tang} (a - e) = \operatorname{tang} a \times (1 - \frac{1}{2} h^2)$, ed $\frac{1}{2} h^2 \operatorname{tang} a = \operatorname{tang} a - \operatorname{tang} (a - e) = \ldots$ $\frac{\operatorname{sen} e}{\cos a \cos (a - e)}$ (620) $= \frac{e}{\cos^2 a}$ per essere e piccolissima: perciò $e = \frac{h^2 \operatorname{sen} a \cos a}{2r''} = \frac{h^2 \operatorname{sen} 2a}{4r''}$.

727 Ecco

727. Ecco ora alcuni Problemi per esercizio.

I. Cerco se la differenza che possono aver tra loro i due angoli obliqui d'un triangolo sferico rettangolo, abbia alcun limite *in più* e qual sia. *Ris.* Il limite è di 90°.

II. Data in un triangolo sferico rettangolo la somma o la differenza dell'ipotenusa h e di un lato g, e dato l'angolo adjacente a, determinare h e g. *Ris.* $sen\,(h-g) = tang^2 \frac{1}{2} a\, sen\,(h+g)$ ovvero $sen\,(h+g) = cot^2 \frac{1}{2} a\, sen\,(h-g)$ e quindi h e g.

III. Dato un angolo a'' e i due lati g, g', trovar la somma o la differenza degli altri angoli a, a': e reciprocamente dato un lato g'' e i due angoli a, a', trovar la somma o la differenza degli altri lati g, g'. *Ris.* Partendo dal valor di $tang \frac{1}{2} a$ (686), si troveranno l'equazioni

$$tang \tfrac{1}{2}(a+a') = cot \tfrac{1}{2} a''\, cos \tfrac{1}{2}(g \backsim g') : cos \tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(a \backsim a') = cot \tfrac{1}{2} a''\, sen \tfrac{1}{2}(g \backsim g') : sen \tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(g+g') = tang \tfrac{1}{2} g''\, cos \tfrac{1}{2}(a \backsim a') : cos \tfrac{1}{2}(a+a')$$
$$tang \tfrac{1}{2}(g \backsim g') = tang \tfrac{1}{2} g''\, sen \tfrac{1}{2}(a \backsim a') : sen \tfrac{1}{2}(a+a')$$

IV. Dati o i tre angoli o i tre lati d'un triangolo, trovarne l'area s. *Ris.* 1°. $s = a + a' + a'' - 180°$, cioè *l'area eguaglia il prodotto del raggio* r = 1 *nell'arco differenza tra la somma dei tre angoli e* 180°: 2°. $tang \frac{1}{2} s = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{(1 - cos^2 g - cos^2 g' - cos^2 g'' + 2 cos g\, cos g'\, cos g'')}}{1 + cos g + cos g' + cos g''} = \ldots\ldots$$

$$\frac{2\sqrt{sen\, q\, sen(q-g)\, sen(q-g')\, sen(q-g'')}}{1 + cos g + cos g' + cos g''}.$$

V. Applicar quest' ultime due formule ai casi 1°. di $g' = g'' = 90°$: 2°. di $a'' = 90°$: 3°. di $g = g' = g''$ e di $g = g' = g'' = 90°$; 4°. di g, g', g'' piccolissimi. *Ris.* 1°. $s = g$: 2°. $tang \frac{1}{2} s = tang \frac{1}{2} g\, tang \frac{1}{2} g'$: 3°. $tang \frac{1}{2} s = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{(1 - cos g)\sqrt{(1 + 2 cos g)}}{1 + 3 cos g}$, e in particolare $s = \frac{\pi}{2}$: 4°. $s = \sqrt{q(q-g)(q-g')(q-g'')}$.

VI. I poli di due circoli AD, AC son T, P, e condot- 106.
ti da essi per un punto dato S della superficie sferica gli archi PSE, TS, PTC, si trova $TC = l$, $SE = \delta$, $BD = z$. Si cer-

106. ca il valor di SB $= a$. *Ris.* $sen\,a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{sen\,\delta\; sen\,l \pm \cos l \cos z \sqrt{(\cos^2\delta - \cos^2 l \cos^2 z)}}{1 - \cos^2 l\; sen^2 z}.$$

VII. E' ignota l' inclinazion di due circoli AC, AD o sia la distanza dei loro poli P, T: solo si sa che condotti da P, T per un dato punto S della superficie sferica gli archi PSE, TSB, PTD, si ha EC $=$ SPT $= h$, SB $= a$, BD $= z$. Cercasi di determinar TC $= l$. *Ris.* $sen\,l = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\cos h \cos a\; sen\,2z \pm 2 tang\, a \sqrt{(sen^2 h - \cos^2 a\; sen^2 z)}}{2 sen\,h \cos a\,(\cos^2 z + tang^2 a)}.$$

VIII. Dai poli P, T di due dati circoli AC, AD la cui inclinazione è CAD $= i$, conduco per un dato punto S gli archi PSE, TSB. Supposto che sieno dati AB $= a$, BS $= \delta$, cerco AE $= L$ ed ES $= l$. *Ris.* $tang\,L = \frac{tang\,\delta\; sen\,i + sen\,a \cos i}{\cos a}$; $sen\,l = sen\,\delta \cos i - sen\,a\; sen\,i \cos\delta$.

105. IX. Dato un piccolo arco di parallelo DnB e data la sua distanza BC $= p$ dal polo C, trovar la differenza e dell' angolo nBC ($= 90°$) dall' angolo mBC fatto dall' arco DmB $= m$ del cerchio massimo che passa per gli stessi punti D, B. *Ris.* $sen\,e = tang\,\frac{1}{2} m \cot p$ ovvero $e = \frac{1}{2} m \cot p$.

X. In un piccolissimo triangolo sferico di cui si hanno l' ipotenusa h e un lato g, si è trovato g' colle formule dei triangoli rettilinei. Cerco l' errore e commesso nel valutarlo. *Ris.* Chiamando al solito r'' il raggio della sfera dato in secondi (522), si ha $e = \frac{g^2 \sqrt{(h^2 - g^2)}}{6 r'' r''}$.

XI. Siasi ora nello stesso modo e nello stesso triangólo trovato il valor di h per mezzo de' due lati g, γ. Cerco l' errore e da correggersi. *Ris.* $e = -\frac{g^2 \gamma^2}{6 r'' r'' \sqrt{(g^2 + \gamma^2)}}$.

106. XII. Nel triangolo sferico SPT in cui sieno dati i due angoli P $= h$, T $= 180° - z$ e i due lati PT $= 90° - l$, TS $= 90° - a$, suppongo che l' arco PS passi in Pr scorrendo l' arco Sr $= da = q$. Cerco 1°. la differenza dh ovvero l' angolo SPr; 2°. la differenza $d\delta$ cioè PS $-$ Pr. *Ris.* Fatto . . $\frac{q}{\cos a} = p$, avremo 1°. $dh = -\frac{p \cos l\; sen\,h}{\cos\delta}$, 2°. $d\delta = p\; sen\,l \times \cos\delta - p \cos l \cos h\; sen\,\delta$.

TRATTATO ANALITICO
DELLE SEZIONI CONICHE

Nozioni preliminari sull' uso dell' Algebra nella descrizion delle Curve.

728. L'Algebra applicata alla Geometrìa ricerca a fondo la Teorìa delle Curve, il cui scopo è di esprimer con equazioni la legge onde una curva fu descritta, e reciprocamente di descriver le curve onde si ha l'equazione, e di rilevarne le proprietà. Per far questo, ogni punto della curva si riferisce a due rette; l'una chiamata *Linea* o *Asse dell' ascisse*, l'altra *Linea* o *Asse dell' ordinate*: si cerca poi tra l'ascisse e l'ordinate un rapporto, la cui espressione analitica dà l'equazion della curva. Così $yy = 2ax - xx$ esprimendo il rapporto d'eguaglianza tra il quadrato di ciascuna ordinata e il rettangolo dell' ascisse, appartiene al circolo (478).

729. Si chiama *funzione di una quantità* l'espressione algebrica in cui entra questa quantità. Così l'equazione al circolo esprime l'egualità di una funzione (y^2) di ciascuna ordinata con una funzione ($2ax - x^2$) di ciascuna ascissa corrispondente. Chiamansi poi *coordinate* l'ascisse e l'ordinate corrispondenti d'una curva; e poichè la lunghezza loro varia a ogni punto, si chiaman *variabili* o *indeterminate* per opposizione alle quantità *costanti* o *determinate*. Infine il punto da cui cominciano a contarsi l'ascisse, si chiama *l'origine dell' ascisse* che può supporsi ove piace, ma determinata una volta, resta la stessa per tutto il calcolo. D'ordinario si pone l'origine o al vertice o al centro della curva: e poichè l'ascisse posson prendersi da parti opposte, si segnan l'une col segno + e le altre col —. La scelta della parte positiva è arbitraria; ma stabilita una volta, dee starsi a quella (108). Lo stesso è dell' ordinate, che distinguonsi in *positive* e *negative* secondo che son da una parte o dall' altra dell' asse: o normali o oblique

sopra di esso, per lo più son parallele tra loro; pur qualche volta partono da un punto fisso.

730. Come ogni punto d' una curva si riferisce a due
106. rette, così (per dirlo di passaggio) ogni punto d' una *superficie curva* D′PG si riferisce a tre, quantunque non ogni superficie riferita a tre rette sia curva. Conduco infatti da un punto H di D′PG la normale HF sopra un dato piano DTD′, e da F nel piano stesso la normale FM sull' asse DD′; è chiaro che fatta OM $=x$, MF $=y$, FH $=z$, converrà determinare x, y, z per avere il punto H: e supposte D′Y normale a DD′, e D′Z normale in D′ al piano DD′Y della Tavola, dicesi DD′Y il *piano delle* x, y, DD′Z il *piano delle* x, z, ed YD′Z il *piano delle* y, z. E' poi facile di aver l' equazion generale delle *superficie curve di rivoluzione* intorno ad un asse DD′ (546): poichè congiunta HM, e prolungata MF in P onde MP $=u=$ MH per la natura della rivoluzione (546), il triangolo MFH rettangolo in F dà $u^2 = y^2 + z^2$, equazione cercata se vi si sostituisca il valor dell' ordinata u dato dall' equazion della curva genitrice D′PT. Così se D′PTO sia un rettangolo, sarà costante MP $= u = a$, e quindi $a^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del cilindro retto: se D′PTO sia un triangolo rettangolo, si avrà

$$D'O\ (b) : OT\ (a) :: D'M\ (b-x) : MP = u = \frac{a(b-x)}{b}$$ e

quindi $\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del

cono retto, che, prese le x da D′, diviene $\frac{a^2x^2}{b^2} = y^2 + z^2$:

se D′PTO sia un quadrante di circolo del raggio r, verrà MP $= u = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, e quindi $r^2 - x^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie sferica, che, prese le x da D′, diviene $2rx - x^2 = y^2 + z^2$ ec. D' onde facilmente si vede che l' equazione del primo grado $Ax + By + Cz + D = 0$ esprime una superficie piana, giacchè quelle delle più semplici superficie curve son del secondo. Torniamo alle linee curve.

731. La curva dell' equazione $y^2 = 2ax - xx$ è la circonferenza di un circolo il cui diametro è $2a$; ma quando non si sappia, la costruzion di quest' equazione lo farà co-
107. noscere. Sia a una quantità costante che suppongo $=5$, e condotta una retta indefinita BD sulla quale prendo AD $= 10 = 2a$, la divido in dieci parti eguali AP, PP, ec. Sia A l' origine dell' ascisse, BD il loro asse, AD la parte delle positive, AB sarà quella delle negative se la curva cercata

ne abbia. Dipoi conducasi al punto A la perpendicolare indefinita EF che prendo per asse delle ordinate, e di cui suppongo positiva la parte AE. Sia finalmente $AP = x$, $PM = y$. E' chiaro per l'equazione medesima $y = \pm\sqrt{(2ax - xx)}$, che quando $x = 0$, si ha $y = 0$; dunque la curva ha il punto A comune colla linea dell' ascisse. Se $x = 1$, $y = \pm 3$; se $x = 2$, $y = \pm 4$, e i valori corrispondenti di x e di y sono 107.

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$y = 0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3,\ 0.$

I valori di y determinan la lunghezza d'altrettante ordinate le cui estremità M son tanti punti della curva cercata; e poichè questi valori son positivi e negativi, conducendo dal punto A due *rami* eguali, l'uno che passi per i punti M al di sopra dell' asse dell' ascisse, e l'altro per i punti corrispondenti al di sotto, si avrà la curva richiesta che sarà tanto più esatta quanto più si moltiplicheranno le divisioni della linea AD. Così può descriversi una curva riferendo ciascun punto M a due linee BD, EF date di posizione: poichè terminato il *parallelogrammo* APMN *delle coordinate*, l'intersezione di NM, PM darà il punto M della curva. Nel nostro caso, crescendo i valori y fino a un certo termine che è 5, e decrescendo in seguito colla proporzione medesima fino a zero, si dee concludere 1°. che vi è un' ordinata PM maggiore di tutte l'altre o *Massima*: 2°. che la curva dell' equazione $y^2 = 2ax - xx$ è *rientrante* e *chiusa*. Non si stende di là dal punto A, poichè allora le sue ascisse essendo negative, i valori di y sarebbero *immaginarj*. Cerchiamone qualche proprietà.

132. Dal mezzo C della linea AD conduco delle rette CM e ho tanti triangoli rettangoli CPM, in cui $CM^2 = PM^2 + CP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; onde essendo $y^2 = 2ax - x^2$, si avrà sempre $CM = a$, cioè tutti i punti M sono ad egual distanza del centro C (395). Inoltre l'equazione $y^2 = 2ax - x^2$ dà $x : y :: y : 2a - x$, ovvero $\div$ AP : PM : PD; dunque ogni perpendicolare PM è media proporzionale tra i due segmenti AP, PD (477). Di più condotta una corda AM, si avrà $AM^2 = 2ax$, onde $x : AM :: AM : 2a$, cioè nella curva trovata tutte le corde condotte dal punto A ad uno dei punti M son medie proporzionali tra AD e il segmento corrispondente AP (473). Condotta pure MD, si avrà $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, proprietà del triangolo rettangolo; dunque tutti gli angoli AMD son retti (419). Iscrivendo il quadrilatero AMDM′, si troverà pure che $AM \times M'D + AM' \times MD = AD \times MM'$ (484); ec.

733. Si debba ora descriver la curva dell' equazione $y^2 = ax$. Già si vede che questa dee tagliar la linea dell' ascisse nella loro origine, poichè fatta $x = 0$, si ha anche $y = \pm \sqrt{ax} = 0$, e di più che dee aver due rami eguali, uno positivo e l' altro negativo. Questi rami vanno all' infinito, allontanandosi dall' asse a misura che x ha valori più grandi: ma le x debbono esser positive, altrimenti le y diven-
108. gono immaginarie; onde la curva avrà la forma MAM′.

734. Sia pure $y^2 = x^2 - a^2$: facendo $y = 0$, si ha $x =$
109. $\pm a$, onde preso sull' indefinita BD un punto A per origine dell' ascisse, e due parti AS, As eguali ad a, la curva dee passar per i punti S, s che si chiamano i suoi *vertici*. Per conoscer la direzion de' suoi rami, sia AD il lato dell' ascisse positive, e si avrà $y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$ il che dà due rami, l' uno SM, l' altro SM′, che anderanno ambedue all' infinito finchè $x > a$; essendo minore, y sarebbe immaginaria; onde se l' ascisse sien positive, la curva non oltrepasserà S. Prendendole negative, l' equazione resta la stessa, onde la curva alla distanza già trovata $As = a = -x$ ha due nuovi rami opposti ma eguali ai due primi. L' asse dell' ascisse è BD, quello dell' ordinate è EF, e dando dei valori ad x, si determineranno l' y o le PM, e i parallelogrammi delle coordinate daranno i punti M, m cc. per cui passa la curva.

110. 735. Cerchiamo la curva dell' equazione $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$.
Si ha dunque $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{a - x}}$ se x è positiva, ed $y = \mp x \sqrt{\frac{b - x}{a + x}}$ se è negativa: onde x positiva non può eccedere a, e negativa non può eccedere b; senza ciò y sarebbe immaginaria. Prendo BD per linea dell' ascisse, AD $= a$ per la direzione delle positive, AB $= b$ per quella delle negative, il punto A per la loro origine, EF per l' asse dell' ordinate, e ho 1°. $y = 0$ quando $x = 0$, onde la curva passa per il punto A; 2°. ad ogni valor di x ne trovo due per y, onde vi sono ordinate positive e negative: 3°. i due valori PM, PM′ di y crescon sempre finchè presa $x = a$, divengono infiniti, poichè allora $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{0}} = \infty$ (197); cioè bisogna prolungare all' infinito HG perchè incontri i due rami della curva (si chiamano *asintoti* le linee, che sempre più accostandosi ai rami della curva, non posson

però mai incontrarli); 4°. se x è negativa, y ha due valori finchè $x<b$ e la curva ha due rami anche in senso negativo; 5°. $x=b$ dà $y=0$; onde la curva passa per B, ma non può scender più basso; 6°. se $y=0$, si ha $x^2\times\left(\frac{b-x}{a+x}\right)=0$, onde $x^2(b-x)=0$, che dà $x=0$, $x=0$, $x=b$, e però la curva passerà una volta per il punto B, e due volte per A ove formerà un *nodo* (quando due, tre o più rami della curva passano per lo stesso punto, questo si chiama *punto doppio*, *triplo*, *multiplo*, e l' Algebra insegna a discerner questi punti e a conoscerne la moltiplicità); 7°. se $b=0$, il nodo svanisce, e l' equazione diviene $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ che appartiene a una curva detta *Cissoide*. FIG. 110.

736. Oltre i punti multipli vi sono ancora dei punti d' *inflessione*: in quei di *flesso contrario* la curva dopo essere stata convessa in un senso, comincia ad esserlo nel senso opposto, come MAM: ma in quelli di *regresso* un ramo della curva tocca l'altro e torna indietro, come mAm': in ambedue la tangente è anche secante nel punto A d' inflessione, e la curva è parte di quà e parte di là dalla tangente. 111. 112.

737. Se l' equazione delle coordinate è del primo grado, ella appartiene sempre a una linea retta, e però le rette si chiaman *linee del primo genere* o del *primo ordine*: se è del secondo grado, del terzo ec., le linee si chiaman del *secondo*, del *terzo genere* ec.; e le linee del secondo si chiamano anche *curve del primo genere*, quelle del terzo *curve del secondo* ec. La sola retta è del primo genere; ve ne son quattro del secondo; settantadue del terzo; quelle del quarto sono in più gran numero ec.

738. In questa division di linee in varj ordini, si comprendono le sole curve *geometriche*, cioè quelle che hanno delle rette per ascisse e per ordinate, la cui ragione può determinarsi geometricamente. Una curva che avesse per coordinate delle quantità trascendenti (10), non sarebbe geometrica, ma *meccanica* o *trascendente*. Le geometriche si chiamano anche *curve algebriche*.

739. Ora il principale oggetto dell' Analisi nell' esame d' una curva è 1°. di trovarne l' equazione quando la curva è data, o di descriverla quando se ne ha l' equazione: 2°. di determinarne la tangente: 3°. di conoscerne la *curvatura* in un punto dato: 4°. di cercarne le massime o mi-

nime ordinate; 5°. di trovarne la quadratura o esatta se è possibile o approssimata; 6°. di trovarne la rettificazione cioè determinar la lunghezza d' una retta eguale ad un suo arco qualunque ec.

Origine ed Equazione delle Sezioni Coniche.

113. 740. Tagliato un cono BCD con un piano AMP, si cerca l' equazion della curva MAm che nasce da questa Sezione. Un piano BCD perpendicolare alla base CD e al piano segante AMP, dà per l' intersezione di questi due piani una retta Aa; ed un piano FMG parallelo alla base, dà un circolo la cui intersezione col piano AMP è una retta PM normale alle rette Aa, FG (536); onde PM è un' ordinata comune al circolo e alla sezione MAm. Sia dunque AP $= x$, PM $= y$, AB $= c$, l' angolo ABa = B, l' angolo BAa = A: la proprietà del circolo dà $y^2 = \mathrm{FP} \times \mathrm{PG}$, e per trovare FP e PG, conduco AE parallela a CD e PK parallela a BD, l' una e l' altra nel piano BCD: dunque AB : *sen* AEB :: AE : *sen* B (636), ed $\mathrm{AE} = \frac{c\, sen\, \mathrm{B}}{sen\, \mathrm{D}}$. Inoltre il triangolo APK dà *sen* AKP (= *sen* AEB) : *sen* APK (= *sen* AaE = *sen* (A + B) (425)) :: x : $\mathrm{AK} = \frac{x\, sen\, (\mathrm{A}+\mathrm{B})}{sen\, \mathrm{D}}$; dunque $\mathrm{PG} = \mathrm{KE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AK} = \frac{c\, sen\, \mathrm{B} - x\, sen\, (\mathrm{A}+\mathrm{B})}{sen\, \mathrm{D}}$. Parimente nel triangolo APF si ha *sen* AFP (= *sen* BFG (613)) : x :: *sen* A : $\mathrm{FP} = \frac{x\, sen\, \mathrm{A}}{sen\, \mathrm{C}}$; onde $y^2 = \frac{sen\, \mathrm{A}}{sen\, \mathrm{C}\, sen\, \mathrm{D}} \left(cx\, sen\, \mathrm{B} - x^2\, sen\, (\mathrm{A}+\mathrm{B}) \right)$, equazione cercata.

741. Dunque 1°. ad ogni ascissa x corrispondono due ordinate y eguali ed opposte; onde l' asse divide in mezzo la sezione: 2°. se $c = 0$, cioè se il piano segante passa per il vertice B del cono, l' equazione diventa $y^2 = \ldots\ldots \frac{sen\, \mathrm{A}\, sen(\mathrm{A}+\mathrm{B})\, x^2}{sen\, \mathrm{C}\, sen\, \mathrm{D}} = \frac{b^2 x^2}{m^2}$, fatto $\frac{b^2}{m^2}$ il coefficiente di x^2; perciò $y = \pm \frac{bx}{m}$, equazione alla linea retta (490), che dà

per

 FIG.

per sezione un triangolo, come già si sapeva (546): 3°. se $A + B < 180°$ ed insieme $A = C$ o $A = D$ viene (613) 113.

$y^2 = \frac{cx\, sen\, B}{sen\, D} - x^2$ o $y^2 = \frac{cx\, sen\, B}{sen\, C} - x^2$, equazioni alla curva circolare (478) che danno un circolo per sezione, come pur si sapeva (546). Ma oltre il triangolo ed il circolo, posson farsi nel Cono tre altre Sezioni, dette propriamente *Coniche* e che dal Cono trasporteremo in un piano.

742. Nella trovata equazion generale sia primieramente $A + B < 180°$; allora il piano AMP convergendo col lato BD (413), lo incontra, e la Sezione *rientrante* o chiusa si chiama *Ellisse*. Fatto $y = 0$, si ha $cx\, sen\, B - x^2\, sen(A + B) = 0$, cioè $x = 0$ ed $x = \frac{c\, sen\, B}{sen(A + B)}$, due punti o vertici ove la curva taglia la linea dell'ascisse (731): la lor nota distanza $Aa = 2a$ si chiama *asse primo*, *maggiore* o *trasverso*; e poichè $c = \frac{2a\, sen(A + B)}{sen\, B}$, l'equazione diventa 118.

$y^2 = \frac{sen\, A\, sen(A + B)}{sen\, C\, sen\, D}(2ax - x^2)$. Se quì si faccia $x = a$, viene $y^2 = \frac{sen\, A\, sen(A + B)\, a^2}{sen\, C\, sen\, D}$, ordinata nota che passa per il mezzo C dell'asse trasverso o per il *centro* dell'ellisse; la chiamo b ed il suo doppio $Bb = 2b$ è l'*asse secondo*, *minore* o *conjugato*; e poichè $\frac{sen\, A\, sen(A + B)}{sen\, C\, sen\, D} = \frac{b^2}{a^2}$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Or preso $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$, terza proporzionale dopo il primo asse ed il secondo, e detta comunemente *parametro dell'asse trasverso*, si ha $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ *equazione al parametro dell'asse trasverso*.

743. Secondariamente nell'equazion generale sia $A + B = 180°$; allora il piano AMp è parallelo al lato BD (413), 114.
e la Sezione *infinita* si chiama *Parabola*; e poichè $sen(A + B) = 0$, l'equazione diventa $y^2 = \frac{sen\, A\, sen\, B\, cx}{sen\, C\, sen\, D}$, ove fat-

to $\frac{c\, sen\, A\, sen\, B}{sen\, C\, sen\, D} = p$, *parametro* della curva, si ha $y^2 = px$.

D' onde è chiaro che la parabola è un' ellisse con l' asse trasverso infinito; poichè preso $2a = \infty$, l' equazione al parametro dell' ellisse (197) diventa $y^2 = px$.

744. Finalmente nell' equazion generale sia $A + B >$
115. $180°$; allora il piano AMP divergendo dal lato BD (413), lo incontra solo nel suo prolungamento oltre il vertice B, e la sezione *infinita*, inferiore o superiore, si chiama *Iperbola*, ambedue *Iperbole opposte*; essendo poi *sen* (A + B) negativo (612), la lor comune equazione è $y^2 = \ldots$ $\frac{sen\, A}{sen\, C\, sen\, D}(cx\, sen\, B + x^2\, sen\, (A + B))$. Se sopra questa si operi come sull' equazione all' ellisse (742), si troverà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, ed $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$.

745. Dunque l' equazione $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax \mp x^2)$ è generale per tutte le Curve Coniche: col segno — dà l' ellisse ed anche il circolo, se $2a = p$; col + dà l' iperbola ed anche l' equilatera, se parimente $2a = p$: e se $2a = \infty$, dà la parabola.

746. Volendo pertanto nella Sezione una doppia ordinata eguale al parametro, verrà $2y = p = 2\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax \mp x^2)}$, cioè per la parabola, fatta $2a = \infty$, si ha $x = \frac{p}{4}$, e per l' ellisse ed iperbola, posto il valor di $p = \frac{2b^2}{a}$, si ha $x = \pm$
116 $a \pm \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$. Presa dunque dal vertice A dell' asse parabolico l' ascissa $x = AF = \frac{p}{4}$; applicata dall' estremità B del
118. conjugato al trasverso dell' ellisse la $BF = Bf = AC = a$, onde $CF = Cf = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ed $x = AF = AC - CF = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ovvero $x = Af = AC + Cf = a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$;
121. tagliata infine dal centro C dell' iperbola sull' asse trasverso prolungato la $CF = Cf = BA = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, onde $x = AF = FC - CA = \sqrt{(a^2 + b^2)} - a$ ovvero $- x = Af = AC + Cf = a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$: sarà nelle tre sezioni l' ordinata $Dd = D'd' = p$. I punti F, f diconsi *Fuochi*: uno ne ha la parabola, ma due l' ellisse e l' iperbola, dei quali il semi-intervallo

CF si chiama *eccentricità*; la faremo c, e si avrà $CF = \sqrt{(a^2 \mp b^2)} = c$.

747. E' quì da notarsi 1°. che moltiplicando tra loro i due trovati valori di x nell'ellisse e nell'iperbola, si trova $(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})(a + \sqrt{(a^2 - b^2)}) = (\sqrt{(a^2 + b^2)} + a)(\sqrt{(a^2 + b^2)} - a) = b^2$, cioè *il semiasse minore è medio proporzionale tra le distanze dell' un de' due fuochi ai due* 118.
vertici: 2°. che presa dai fuochi F, f la $FI = fi = \frac{p}{4} =$ e
$\frac{b^2}{2a}$, viene $\div\!\div$ AI $(a - c \mp \frac{b^2}{2a})$: AF$(\pm a \mp c)$: Aa $(2a)$, ed 121.
anche $\div\!\div$ Ai $(a + c \mp \frac{b^2}{2a})$: Af $(a + c)$: Aa $(2a)$. Basti questo piccol saggio d' analogìa tra le tre curve: per maggior chiarezza daremo separatamente il seguito delle lor proprietà.

Parabola.

748. L' equazione alla parabola è $y^2 = px$: onde *i quadrati dell' ordinate son fra loro come le loro ascisse*. Con questa equazione si determina p; poichè presa un' ascissa $a = x$ ed un' ordinata $b = y$, la terza-proporzionale dopo a, b sarà il parametro (490).

749. Condotta dalla curva al fuoco F la retta o *raggio* 116.
vettore MF, sarà $FM = z = \sqrt{[y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = AQ + AG$: prolungata dunque LA, se si prenda $AG = AF = \frac{1}{4}p$, e per G si conduca l'indefinita o *direttrice* EGe parallela all'ordinata MQ, sarà la normale MH = QG = FM; dunque *la distanza d'un punto qualunque M della parabola dalla direttrice, è eguale al raggio vettore* MF.

750. Cerco ora MT tangente al punto dato M. Immagino 117.
l' arco Mm infinitesimo il cui prolungamento MmT è la tangente stessa, e condotte sulla direttrice le normali MQ, mq, le rette MF, mF al fuoco F, ed mg parallela a Qq, descrivo col centro F e raggio Fm l' arco infinitesimo mr che può prendersi per un seno; sarà MQ = MF, mq = mF, ed MQ − mq (= Mg) = MF − mF (= Mr). Dunque i triangoli rettangoli Mmg, Mmr eguali e simili (441) hanno l' angolo mMr

117. o $TMF = gMm = MTF$; dunque il triangolo MTF è isoscele, e però presa $FT = FM$, la linea MT condotta per T, M sarà tangente in M. D'onde segue che se MO sia parallela all'asse AN, si avrà l'angolo $MTF = LMO = FMT$.

751. Poichè $z = FT = FM = x + \frac{1}{4}p$ (749), si ha $FT - \frac{1}{4}p = x = AT$; dunque *la suttangente* $PT = 2x$ *è doppia dell'ascissa*. La *tangente* $MT = \sqrt{(px + 4xx)} = 2\sqrt{xz}$; e condotta MN normale alla parabola o alla sua tangente in M, si avrà la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$, e la *normale* $MN = n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{pz}$. Se dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano ai raggi vettori FM, OM le perpendicolari NB, NB', i triangoli NBM, NB'M eguali (750) daranno $BM = MB' = PN = \frac{1}{2}p$: e se dal punto F si conduca sulla tangente TM la perpendicolare $FC = q$, sarà $MT : TC :: MN : CF$, e poichè $TC = \frac{1}{2}MT$ (431), sarà $CF = q = \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\sqrt{pz}$, e perciò $2qn = n^2 = pz$ ed $n = \frac{pz}{2q}$.

E se sia l'angolo $TFM = \beta = 180° - 2MTP = 2\varphi$, sarà $TP^2\ (4x^2) : MP^2\ (px) :: 1 : tang^2 MTP\ (= tang^2 \frac{1}{2} MFP = tang^2 \frac{1}{2}(180° - \beta) = cot^2 \varphi$ (617)), onde $x = \frac{1}{4}p\, tang^2 \varphi$ (610.61.), ed $x + \frac{1}{4}p (= FM = z) = \frac{1}{4}p\,(1 + tang^2 \varphi) = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2 \varphi} = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2 \frac{1}{2}\beta}$. Perciò se collo stesso asse e fuoco si descriva un'altra parabola A'M' del parametro p', sarà $FM : FM' :: p : p' :: FA : FA' :: x : x'$.

752. La parallela MO all'asse si chiama *diametro*; il
116. punto M ne è l'*origine*; le sue ordinate son le rette NP parallele alla tangente in M, e le ascisse di queste ordinate son le rette MP. Per trovar l'equazione alle coordinate

 FIG. 116.

del diametro MO, chiamate MP (x), PN (y), $AQ = AT = a$, avremo $MQ = \sqrt{ap}$ e fatto $p + 4a = p'$ sarà $MT = PR = \sqrt{ap'}$ (751). Condotta ora NL normale all' asse, i triangoli simili NRL, MTQ daranno $\sqrt{ap'} : y + \sqrt{ap'} :: \sqrt{ap} : NL = y\sqrt{\frac{p}{p'}} + \sqrt{ap} :: 2a : RL = 2y\sqrt{\frac{a}{p'}} + 2a$. Ora $AR = RT - AT = x - a$; dunque $AL = x + a + 2y\sqrt{\frac{a}{p'}}$, e per la proprietà della parabola, $NL^2 = p \times AL$ cioè $(\sqrt{ap} + y\sqrt{\frac{p}{p'}})^2 = ap + px + 2py\sqrt{\frac{a}{p'}}$; e riducendo, $yy = p'x$, equazione simile alla trovata per l' asse; perciò qualunque diametro MO divide in mezzo l' ordinate Nn, e il suo parametro $p' = p + 4a$ è quadruplo della distanza dell' origine M dal fuoco F. Con questi principj si risolvono i problemi seguenti.

753. I. Dato l' asse AL e il parametro p, trovare un diametro MO che faccia colle sue ordinate un angolo dato $MPn = a$. Il problema si riduce a trovare il punto Q ove l' ordinata normale MQ incontra l' asse. Sia $AQ = x$; il triangolo MTQ dà $tang\, a = \frac{\sqrt{px}}{2x}$ (646), $x = \frac{p}{4} cot^2 a$ (610.6ª.) e $p' (= p + 4x) = \frac{p}{sen^2 a}$ (610).

II. Dato il parametro p' e l' origine M del diametro MO con l' angolo a delle coordinate, trovar l' asse AL, il vertice della curva A, ed il suo parametro p. Serbando le denominazioni del problema precedente, abbiamo $MQ = \sqrt{px}$, $p' = \frac{p}{sen^2 a} = p + 4x$, onde $p = p' sen^2 a$, $x = \frac{p'}{4} cos^2 a$ (610.9ª.), $MQ = \pm \frac{p'}{4} sen\, a \cos a = \pm \frac{p'}{4} sen\, 2a$ (621).

Ellisse.

754. L' equazione all' ellisse essendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - xx)$, si avrà $y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2$, cioè $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, e *il quadrato dell' ordinata è al prodotto dell' ascisse, come il quadrato dell' asse minore al quadrato del maggiore*. Descritto dunque col centro C e raggio CA un circolo, sarà 118.

118. $PN = AP \times Pa$, $PN : PM :: a : b :: CB' : CB$: onde l'ordinate dell' ellisse son proporzionali all'ordinate del circolo : perciò per descrivere un'ellisse basta far passare una curva per una serie di punti presi sull' ordinate d'un circolo divise in parti simili.

755. Se nell'equazione si ponga $a - x = CP$ in luogo di $x = AP$, ella diverrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, ove l'ascisse son prese non più dal vertice A, ma dal centro C: questa, come più semplice, è più in uso; e da questa (se sopra Bb si cali l'ordinata $MQ = PC = x$) si ha $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, equazione al second' asse, il cui parametro, terzo proporzionale dopo $2b$ e $2a$, sarà $p' = \frac{2a^2}{b} = \frac{2a}{p}\sqrt{2ap}$. E' chiaro che se $a = b$, l'equazione all' ellisse diventa quella del circolo; onde il circolo è un' ellisse *equilatera* o di assi eguali.

756. Prese dunque l'ascisse dal centro, si avrà il raggio vettore $FM = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + (c - x)^2)} = \sqrt{(a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2})}$ (746) $= a - \frac{cx}{a}$, e l'altro raggio vettore $fM = a + \frac{cx}{a}$. Onde 1° $fM + FM = 2a$, cioè *la somma dei due raggi vettori eguaglia l' asse trasverso*: 2°. se sia l'angolo $PfM = \beta$, sarà $fP\ (= c + x) = fM . \cos\beta$ (645), e perciò $x = fM . \cos\beta - c$, ed $fM\ (= a + \frac{cx}{a}) = \ldots$ $\frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - c\cos\beta}$; come pure $FM = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\beta'} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - c\cos\beta'}$, posto $PFM = \beta'$: 3°. volendo i raggi vettori con l'ascisse prese dal vertice, si cangierà x in $a - x$, e verrà $FM = a - c + \frac{cx}{a}$, $fM = a + c - \frac{cx}{a}$: 4°. e volendo introdurre il raggio vettore nell'equazione all' ellisse, si farà $FM\ (= a - \frac{cx}{a}) = z$ ovvero $fM\ (= a + \frac{cx}{a}) = 2a - z$, onde $x = \frac{a(a - z)}{c}$ ed $y^2 = \frac{b^2}{c^2}((2a - z)z - b^2)$.

 FIG. 119.

757. Debbasi ora condurre dal dato punto M la tangente MT. Prolungato fM in L immagino l' arco infinitesimo Mm, e dai fuochi F, f conduco i raggi vettori fm, Fm: descritti coi centri f, F e coi raggi fm, FM i piccoli archi mr, Mg, avrò $fm + mF = FM + Mf$, ovvero $fM - fm = Mr = Fm - FM = mg$: dunque (441) i triangoli rettangoli mMg, mMr sono eguali e simili, e perciò l' angolo $gmM = FMT$, perchè $FMT = gmM + MFm \left(= \frac{1}{\infty} = 0\right)$; dunque $FMT = mMr = LMT$, cioè la retta MT che dividerà in mezzo l' angolo LMF, sarà la tangente cercata. D' onde segue che l' angolo $LMT = QMf = FMT$.

758. Se da M si alzi sulla tangente la normale MN, sarà l' angolo $fMN = NMF$, ed $fM : MF :: fN : NF$, ovvero $fM + FM\ (2a) : FM\ \left(a - \frac{cx}{a}\right) :: fN + FN\ (2c) : FN = c - \frac{c^2x}{a^2} = c - x + \frac{b^2x}{a^2}$ ed $fN = 2c - FN = c + \frac{c^2x}{a^2} = c + x - \frac{b^2x}{a^2}$; dunque poichè $fP = x + c$ ed $FP = x - c$, si avrà 1°. la *sunnormale* $PN = FN + FP = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$: 2°. la *normale* $MN = n = \frac{1}{a^2}\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - c^2x^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{(2az - z^2)}$ (756): 3°. la *suttangente* $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \ldots \frac{a^2y^2}{b^2x}$: 4°. la *tangente* $TM = \frac{y}{b^2x}\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)} = \ldots \frac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - c^2x^2)}$. Inoltre $TC = TP + PC = \frac{a^2}{x}$, altro modo di determinare il punto T della tangente in M; $Tf = \frac{a^2}{x} + c = \frac{a^2 + cx}{x} = \frac{a(2a - z)}{x}$ (756); $TN = TP + PN = \frac{a^2n^2}{b^2x}$; $TF = \frac{a^2}{x} - c = \frac{az}{x}$; $TA = \frac{a^2}{x} - a$; e nel vertice A la tangente $AV = \frac{PM.TA}{PT} = \frac{ay}{a + x} = b\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$.

759. Che se dai fuochi f, F e dal punto N ove la normale incontra l' asse, si conducano sulla tangente e sui rag-

119. gi vettori le perpendicolari fQ ed FR, NB ed NB′, come pure per il centro C la DCD′ parallela alla tangente, sarà 1°. TN $\left(\frac{a^2n^2}{b^2x}\right)$: NM (n) :: TF $\left(\frac{az}{x}\right)$: FR $= q = \frac{b^2z}{an}$ :: $Tf\left(\frac{2a^2 - az}{x}\right) : fQ = \frac{b^2(2a-z)}{an} = \frac{an}{z}$ (758); d' onde si ha FR $\times fQ = b^2$, e la nuova espression della normale $n = \frac{b^2z}{aq} = \frac{pz}{2q}$: 2°. $Mf(a + \frac{cx}{a}) : fP\ (c + x) :: fN\ (c + \frac{c^2x}{a^2}) : fB' = \frac{c(c+x)}{a}$, onde $fM - fB' = MB' = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = MB$, atteso l' angolo $fMN = NMF$: 3°. TF $(\frac{a^2}{x} + c) : fM\ (a + \frac{cx}{a}) :: Cf\ (c) : fD = \frac{cx}{a}$, e però DM $= Mf - fD = a = D'M$, attesi i triangoli simili TFM, CFD′.

118. 760. Se dal punto M si conducano all' asse conjugato la tangente Mt e la normale MO prolungata in n, i triangoli simili MPO, MQn, MQt e la sunnormale PO ($= \frac{b^2x}{a^2}$) daranno per il second' asse, sostituendo il valor di x^2 (755), 1°. la *sunnormale* $Qn = \frac{PM \cdot MQ}{PO} = \frac{a^2y}{b^2} = \frac{p'y}{2b}$ (746); 2°. la *normale* $Mn = \frac{OM \cdot MQ}{PO} = \frac{a}{b^2}\sqrt{(b^4 + c^2y^2)}$; 3°. la *suttangente* $Qt = \frac{QM^2}{nQ} = \frac{b^2 - y^2}{y}$; onde $Ct = CQ + Qt = \frac{b^2}{y}$ e perciò $CQ : CB :: CB : Ct$, come nell' asse trasverso.

120. 761. Una retta nCN che passando per il centro C termina ai due punti opposti della curva, dicesi *diametro*, e condotta DCd parallela alla tangente in N, i diametri DCd, nCN chiamansi *conjugati*; le rette MP parallele alla tangente son l' ordinate del diametro CN, le parti CP ne son l' ascisse, e il parametro di un diametro qualunque è una terza-proporzionale a questo e al suo conjugato.

762. Condotte dall' estremità D, N l' ordinate DI, NQ all' asse maggiore Aa, sia $QN = y$, $CQ = x$, $ID = u$, $IC = z =$

 FIG.

$z = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - u^2)}$ (755), e i triangoli simili DIC, NQT danno $NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2$, ovvero $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} :: u^2 : a^2 - \frac{a^2u^2}{b^2}$ onde $u = \frac{bx}{a}$; così si troverebbe $y = \frac{bz}{a}$, onde $\frac{u}{x} = \frac{y}{z}$ e $zu = xy$, cioè i triangoli DIC, CNQ sono eguali in superficie. Dunque 1°. $u^2 = \ldots \frac{b^2x^2}{a^2} = b^2 - y^2$ (755) ed $u^2 + y^2 = b^2$; 2°. $z^2 = \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$ e $z^2 + x^2 = a^2$; 3°. $u^2 + z^2 + y^2 + x^2$ ($= DC^2 + CN^2$) $= a^2 + b^2$, cioè nell' ellisse la somma dei quadrati di due diametri conjugati è sempre eguale alla somma dei quadrati de' due assi; 4°. condotta ND, la superficie del triangolo $NCD = \frac{(u+y)(z+x)}{2} - \frac{zu}{2} - \frac{xy}{2} = \frac{ux+yz}{2} = \ldots \frac{bx^2}{2a} + \frac{ay^2}{2b} = \frac{ab}{2}$; dunque il parallelogrammo $CDEN = ab$, e l' intero parallelogrammo $FEHG = 4ab = 2a \times 2b$, e però *tutti i parallelogrammi circoscritti all' ellisse sono eguali tra loro e al rettangolo dei due assi*. 120

763. Sia ora il semidiametro $CN = m$, $CD = n$, l'angolo $CPM = DCn = p$, e sarà 1°. $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$; 2°. $ab = mn\,sen\,p$ che è l' espressione della superficie del parallelogrammo CDNE (644). Ora queste due equazioni danno subito i diametri conjugati ed eguali dell'ellisse, poichè allora $2m^2 = a^2 + b^2$, ovvero $m = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; e $sen\,p = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, onde poichè queste quantità son sempre reali, ogni ellisse ha due diametri conjugati eguali. La lor posizione dipende dal valor di x, ma $x^2 + y^2 = b^2 + \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2$ (755) $= m^2 = \ldots \frac{a^2+b^2}{2}$; dunque $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, valore indipendente da b, onde l' ordinata NQ prolungata, determinerà i diametri conjugati eguali in tutte le ellissi che avranno comune l' asse Aa.

764. Cerchiamo ora l'equazione alle coordinate CP . PM, e sia $CP = x$, $PM = y$, $CQ = t$, $QN = r$, $NT = q$, e $TQ =$

120. $\frac{a^2-t^2}{t}$ (758) $=s$. Condotte PK, MO perpendicolari all' asse, e PL perpendicolare ad MO, i triangoli simili NQT, MLP danno $ML=\frac{ry}{q}$, $PL=\frac{sy}{q}$, e gli altri due CPK, CNQ danno $PK=\frac{rx}{m}$, $CK=\frac{tx}{m}$, onde $CO=\frac{tx}{m}-\frac{sy}{q}$ ed $MO=\frac{ry}{q}+\frac{rx}{m}$: ma per la proprietà dell' ellisse, $\frac{a^2}{b^2}.\ MO^2=a^2-CO^2$; dunque sostituendo, ordinando e riflettendo che $\frac{a^2r^2}{b^2}=a^2-t^2$ (762. 2°) $=ts$, si avrà $\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}\right)y^2+\ldots\left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2}+\frac{t^2}{m^2}\right)x^2=a^2$. Osservo ora che quando $x=0$, si ha $y=n$; dunque $\frac{a^2r^2}{b^2q^2}+\frac{s^2}{q^2}=\frac{a^2}{n^2}$, cioè non può in tal caso avverarsi l' equazione se il coefficiente di y^2 non sia $\frac{a^2}{n^2}$; al contrario quando $y=0$, si ha $x=m$, onde per la ragione stessa il coefficiente di x^2 è $\frac{a^2}{m^2}$; dunque avremo $\frac{a^2}{n^2}y^2+\frac{a^2}{m^2}x^2=a^2$, ovvero $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, equazione simile a quella degli assi. Dal che segue 1°. che ogni diametro NCn divide in mezzo l' ordinate MPm, e perciò l' ellisse intera: 2°. che ogni diametro Nn è diviso in mezzo nel centro C perchè ne' punti N, n si ha $x^2=m^2$, onde $x=\pm m$.

765. I. Dati i due semiassi a, b trovar due diametri conjugati che facciano fra loro un angolo dato $p=$ DCn. Abbiamo $m^2+n^2=a^2+b^2$, ed $mn=\frac{ab}{sen\,p}$ (763); dunque $m^2+n^2\pm 2mn=a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p}$; ed $m\pm n=\sqrt{\left(a^2+b^2\pm\frac{2ab}{sen\,p}\right)}$, d' onde sommando e sottraendo si ha m ed n. Per determinar la direzione di un de' diametri o l' angolo ACN che chiamo c, il triangolo CNT dà (414. 636) $sen(p-c)$:

 FIG.

$m :: sen\,p : CT = \frac{aa}{CQ}$ (758) $= \frac{m\,sen\,p}{sen\,(p-c)}$, onde CQ = . . . 120.
$\frac{a^2\,sen\,(p-c)}{m\,sen\,p}$; si ha dunque nel triangolo rettangolo CNQ
(preso CN per raggio) (645) $m\cos c = \frac{a^2\,sen\,(p-c)}{m\,sen\,p}$, che
dà $m^2\,sen\,p\cos c = a^2\,sen(p-c) =$ (614) $a^2\,sen\,p\cos c -$
$a^2\,sen\,c\cos p$, ovvero $\frac{a^2-m^2}{a^2}\,sen\,p\cos c = sen\,c\cos p$; e perciò (610.2°.) $tang\,c = \frac{a^2-m^2}{a^2}\,tang\,p$.

766. II. Dati i semidiametri conjugati m, n e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Dall' equazioni $mn\,sen\,p = ab$ ed $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ con un calcolo simile al precedente si determina a e b. L' angolo che dà la direzione degli assi si trova come prima.

Iperbola.

767. Nell' equazione all' iperbola (744) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ se x sia negativa, si ha $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - 2ax)}$, immaginaria finchè $x < 2a$; onde tra $x = 0$ ed $x = 2a$ non vi è curva: ma se $x > 2a$, l' ordinate saranno reali, e l' iperbola negativa eguale alla positiva. Infatti posta $aP' = x'$, 121.
sarà $x = 2a + x'$ ed $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' + x'^2)$ equazione per $M'am'$ simile a quella di MAm.

768. Da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ si ha $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, e *il quadrato dell' ordinata è al rettangolo dell' ascisse (prese fino ai due vertici A, a) come il quadrato del second' asse al quadrato del primo*. Se si ponga $x - a$ in luogo di $x = AP$, l' equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, ove $x = CP$, e l' ascisse son prese dal centro: di qui $x^2 =$

121. $\frac{a^2}{b^2}(b^2+y^2)$, equazione al second' asse, il cui parametro è p' come nell' ellisse (755). In tutte queste equazioni fatto $a=b$, viene $y^2=2ax+x^2$, $y^2=x^2-a^2$, $x^2=a^2+y^2$, e allora l' iperbola è *equilatera*.

769. Prese dunque l' ascisse dal centro, si avrà il raggio vettore $FM=\sqrt{(PM^2+PF^2)}=\sqrt{(y^2+(x-c)^2)}=\sqrt{\left(\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2\right)}=\frac{cx}{a}-a$, ed $fM=\frac{cx}{a}+a$. Onde 1°. $fM-MF=2a$, cioè *la differenza de' due raggi vettori eguaglierà l' asse trasverso*: 2°. se sia l' angolo $AFM=\beta$, verrà, come nell' ellisse (756), $FM=\frac{c^2-a^2}{a+c\cos\beta}=\ldots\frac{\frac{1}{2}ap}{a+c\cos\beta}$.

122. 770. Per condur la tangente MT a un punto M dell' iperbola, preso l' arco Mm infinitesimo, e condotti i raggi vettori fm, Fm, si proverà presso a poco come nell' ellisse (757) che gli angoli mMf, FMm son eguali, e che perciò diviso in mezzo l' angolo fMF colla retta MT, questa sarà la tangente cercata. Dunque nel triangolo fMF si ha (471) $fM:MF::fT:TF$, ovvero $fM+FM\left(=\frac{2cx}{a}\right):fM\left(=\frac{cx+a^2}{a}\right)::fT+FT(=2c):fT=\frac{a^2+cx}{x}=\frac{a^2}{x}+c$. Dunque $fT-c=CT=\frac{aa}{x}$, altro modo di determinare il punto T della tangente in M.

771. Quindi se MN sia la normale, si avrà la *suttangente* $PT=CP-CT=x-\frac{a^2}{x}=\frac{x^2-a^2}{x}$; la *tangente* $MT=\sqrt{(TP^2+PM^2)}=\frac{1}{ax}\sqrt{(x^2-a^2)(c^2x^2-a^4)}$; la *sunnormale* $PN=\frac{PM^2}{PT}=\frac{b^2x}{a^2}$; la *normale* $n=\sqrt{(PM^2+PN^2)}=\frac{b}{a^2}\sqrt{(c^2x^2-a^4)}$. E se, come nell' ellisse (759), si conducano le perpendicolari NB, NB′ ai raggi vettori, ed FS, fs alla tangente, a cui sia parallela CD, si troverà col ra-

ziocinio medesimo 1°. $MB' = \frac{1}{2} p = MB$; 2°. $FS \times fs = b^2$; 122.

3°. $n = \frac{pz}{2q}$; 4°. $DM = a$.

772. Osservo ora che $CT = \frac{a^2}{x}$ (770) è positiva finchè lo è x; onde tutte le tangenti taglian l' asse tra A e C. Ma poichè crescendo l' ascissa, scema CT, e se quella è infinita, questa si fa infinitesima: potranno condursi dal centro C due rette CX, Cx che saranno i limiti delle tangenti o gli asintoti dell' iperbola. Infatti $AT = a - CT = a - \frac{a^2}{x}$; e condotta AS parallela ad MP, si avrà $AS = \ldots \frac{AT . PM}{TP} = \frac{ay}{x + a} = b \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$. Supposta x infinita, sarà $\frac{x - a}{x + a} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, onde $AS = b$; e però condotte AD, Ad perpendicolari a CA ed eguali ciascuna al semiasse minore b, le rette CD, Cd che passano per i punti D, d e per il centro C, saranno gli asintoti dell' iperbola MAM', che prolungati in X', x' saranno quelli dell' iperbola opposta. Se l' iperbola è equilatera, l' angolo DCd fatto dagli asintoti, è retto; poichè allora $DA = Ad = CA$. L' iperbola riferita agli asintoti ha molte proprietà.

773. Se per un punto N dell' asintoto si conduca la retta Nn parallela alla retta Dd, sarà CA [a] : DA [b] :: CP 123.
[x] : $NP = \frac{bx}{a}$. Dunque $NM = \frac{bx}{a} - y$, ed $Mn = \frac{bx}{a} + y$ onde $NM \times Mn = \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = b^2 = DA^2$: e poichè $NP^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$ ed $MP^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$, si ha sempre $NP > PM$, e però l' iperbola non può mai confondersi con l' asintoto: per altro sempre più vi si avvicina, mentre crescendo l' ascissa, scema la differenza tra $\frac{b^2 x^2}{a^2}$ e $\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$, e svanisce affatto quando $x = \infty$.

774. Condotte MQ, AL parallele all' asintoto Cd, i triangoli DLA, LCA sono isosceli; onde fatta $AL = DL = CL = m$, $CQ = x$, $QM = y$, e condotta MK parallela e perciò egua-

123. le a CQ, i triangoli simili DLA, NQM, MKn danno MN : DA :: QM : LA ed Mn : DA :: MK : DL, e però NM $\times$ Mn : DA^2 :: QM $\times$ MK : LA $\times$ DL $=$ AL^2; ma NM $\times$ Mn $=$ DA^2 (773); dunque $xy = m^2$, *equazione all' iperbola tra gli asintoti*, in cui m^2 ($= \frac{a^2 + b^2}{4}$) si chiama la *potenza dell' iperbola*.

124. 775. Se due parallele Ff, Gg, terminate agli asintoti taglino un' iperbola nei punti m, h, p, K e sieno MmN, PpQ perpendicolari all' asse, si avrà Fm : Mm :: Gp : Pp, ed mf : mN :: pg : pQ, e però F$m \times mf$: M$m \times m$N :: G$p \times pg$: P$p \times p$Q; ma (773) P$p \times p$Q $= b^2 =$ M$m \times m$N; dunque F$m \times mf =$ G$p \times pg$; dunque anche gK $\times$ KG $= fh \times h$F.

776. Se i punti p, K coincidano in un sol punto D, la retta TDt sarà tangente in D, e si avrà F$m \times mf =$ TD $\times$ Dt $= fh \times h$F, onde fh ($hm + m$F) $=$ Fm ($mh + hf$), e però $fh =$ Fm e TD $=$ Dt; ma condotta DE parallela a Ct, i triangoli simili TDE, TtC danno TE $=$ EC; dunque la tangente a un punto D dell' iperbola si ha conducendo DE parallela all' asintoto, prendendo ET $=$ EC, e per T, D conducendo la retta TDt.

777. Dall' esser sempre $fh =$ Fm si ha la maniera di descrivere un' iperbola tra due dati asintoti CT, Ct, che passi per un dato punto m, poichè condotte per m le rette Ff, MN, si farà $fh =$ Fm, nN $=$ Mm e i punti m, n, h saranno nell' iperbola.

125. 778. Poichè la tangente TMt è divisa in mezzo nel punto M (776), se si conduca MCM$'$, questa retta si chiama *diametro trasverso o primo*, il cui *conjugato* o *secondo* è DCd o la tangente TMt, l' ordinate sono mQm' parallele al conjugato DCd, e il parametro è una terza-proporzionale al diametro e al suo conjugato.

779. Un diametro divide in mezzo tutte le sue ordinate; poichè NQ : Qn :: TM : Mt ed N$m = m'n$; se dunque CM $= m$, CD $=$ MT $= n$, CQ $= x$, Q$m = y$, sarà $m : n :: x :$ NQ $= \frac{nx}{m} = n$Q; onde N$m = \frac{nx}{m} - y$ ed $mn = \frac{nx}{m} + y$: ma TM$^2 =$ N$m \times mn$ (777); dunque $n^2 = \frac{n^2 x^2}{m^2} - y^2$, ed $y^2 = \frac{n^2}{m^2} [x^2 - m^2]$, equazione simile a quella delle coordinate all' asse trasverso, che dà $x^2 = \frac{m^2}{n^2} (y^2 + n^2)$.

780. Sia ora aCA il primo asse dell' iperbola, e rappresenti BA la metà del secondo; condotte DE, TG, MPK perpendicolari a CA, ed ML e tK parallele alla stessa CA, i triangoli MTL, MtK, CDE saranno eguali e simili; fatta dunque $CP = u$, $PM = z$, $CE = tK = ML = r$, $MK = DE = TL = s$, e $CM = m$, $TM = n$, $CA = a$, $AB = b$, si avrà $TG\,(z+s) : CG\,(u+r) :: b : a$ e perciò $az + as = bu + br$: inoltre $TL\,(s) : LM\,(r) :: MP\,(z) : PS = \frac{rz}{s} = \frac{u^2 - a^2}{u}$ (771) $= \frac{a^2 z^2}{b^2 u}$ (768) onde $r = \frac{a^2 sz}{b^2 u}$; e sostituendo questo valore nell' equazione $az + as = bu + br$, si ha $(bu - as)(bu - az) = 0$; ma $bu - az = 0$ dà $a : b :: u : z$ il che è sempre assurdo fuorchè nell' infinito; dunque (178) $bu - as = 0$, $bu = as$, onde $az = br$, e quindi $a : b :: u : s :: r : z$, cioè CP : DE :: CE : MP. FIG. 125.

781. Dunque 1°. i triangoli CED, CMP sono eguali in superficie: 2°. condotta DM, sarà DMC o $\frac{1}{2}$ CDTM = al trapezio DMPE $= \frac{1}{2}(s + z)(u - r) = \frac{1}{2}(su + uz - sr - rz)$, cioè (poichè $u : s . : r : z$, onde $uz - sr = 0$) $= \frac{1}{2}(su - rz)$; ed essendosi trovato $bu = as$, ed $az = br$, sarà $s = \frac{bu}{a}$, $r = \frac{az}{b}$, e perciò $su = \frac{bu^2}{a}$, $rz = \frac{az^2}{b}$, onde $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{b^2 u^2 - a^2 z^2}{2ab}$: ma l' equazion dell' iperbola dà $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$ e però $b^2 u^2 - a^2 z^2 = a^2 b^2$; dunque $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}$; dunque *il parallelogrammo* TT′ *formato dai diametri conjugati è eguale al rettangolo degli assi*: 3°. $DE^2 = s^2 = \frac{b^2 u^2}{a^2} = b^2 + z^2 = b^2 + PM^2$ (per l' equazione all' iperbola); dunque $DE^2 - PM^2 = b^2$: 4°. $CE^2 = r^2 = \frac{a^2 z^2}{b^2} = u^2 - a^2 = CP^2 - a^2$; dunque $CP^2 - CE^2 = a^2$; 5°. $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2$, e però *la differenza dei quadrati di due diametri conjugati è eguale alla dif-*

125. *ferenza de' quadrati dei due assi*: onde nell' iperbola equilatera, qualunque diametro eguaglia il suo conjugato.

782. I. Dati gli assi a, b d' un' iperbola, trovar due diametri conjugati che faccian tra loro il dato angolo $p =$ DCM. Abbiamo $mn\, sen\, p = ab$ ed $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, che danno m ed n; e per trovar la direzione di un de' diametri o l' angolo MCP che chiamo c, il triangolo CMP dà (644) $MP = m\, sen\, c$; dunque essendo (780) $b : a :: MP : CE$, sarà $CE = \frac{am\, sen\, c}{b}$; ma nel triangolo DCE (645) si ha $CE = n \cos(p + c)$; dunque $\frac{am}{bn} sen\, c = \cos p \cos c - sen\, p\, sen\, c$ (615), e perciò $\frac{sen\, c}{\cos c} = tang\, c = \frac{bn \cos p}{am + bn\, sen\, p}$: e poichè $a = \dots \frac{mn\, sen\, p}{b}$, sarà $tang\, c = \frac{b^2 \cot p}{m^2 + b^2}$.

II. Dati i semidiametri conjugati m, n d'un' iperbola e l' angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Ciò potrebbe aversi con le due equazioni e col raziocinio del passato problema: è però più semplice l' usare gli asintoti. Per l' estremità M del primo diametro CM condotta TMt che farà con MQ l' angolo $TMQ = p$, e presa $TM = Mt = n$, si condurranno CT, Ct: quindi diviso l' angolo TCt in mezzo con CA, si avrà la direzione del primo asse.

La rettificazione, la quadratura ed altre proprietà di queste e delle seguenti Curve, si troveranno nel Calcolo Integrale.

ALTRE CURVE.

Oltre le Sezioni Coniche, Curve di tanto uso in Geometrìa, ve ne sono più altre di cui è bene il far menzione.

131. 783. I°. La Concoide di Nicomede. Se per un punto B preso fuori di una retta GH, si conducano delle rette BQM, BAD ec. tali che le parti QM, AD ec. sieno eguali, la curva MDM′ che passa per i punti M, D ec. si chiama *Concoide*. Il punto B è il *polo*, la retta GH la *direttrice*, e prese sotto GH le parti eguali Qm, Ad ec., la curva mdm' è la concoide

concoide *inferiore* o la parte inferiore d' una stessa concoide. Onde 1°. GH ne è l' asintoto; 2°. Dd normale a GH ne misura la massima larghezza; 3°. se BA $>$ dA, la curva è qual si vede alla fig. 131.; se BA $<$ dA, ha un *nodo* B$nd n'$, e allora si chiama concoide *annodata*; se BA $= d$A, il nodo svanisce e resta un punto di regresso in B. 132. e 133.

784. Per saper se la concoide è curva algebrica, si conduca PM perpendicolare ad AP e sia AD $=$ QM $= a$, AB $= b$, AP $= x$, PM $= y$; si avrà PQ : PM :: AQ : AB, ovvero $\sqrt{(a^2-y^2)}:y::x-\sqrt{(a^2-y^2)}:b$ onde $xy=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, equazione alla concoide superiore: lo stesso calcolo dà $xy=(b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ per l' inferiore, e l' equazione è la stessa per l' annodata; e se si facesse $x=$ AR ed $y=$ RM, si verrebbe a cangiare x in y ed y in x, e l' equazione sarebbe $xy=(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque la curva è algebrica del terz' ordine. Essa può descriversi con la continua intersezione d' una riga BCM mobile intorno a B, e d' un circolo descritto col raggio CM $= a$, che si farà muovere in modo che il centro C sia sempre in HG; basta allora che la riga passi costantemente per il centro del circolo. 131. 134.

785. Possono anzi formarsi infinite concoidi differenti sostituendo al circolo una curva qualunque CM e al centro di esso un punto fisso Q dell' asse di lei. Troviamone l' equazione. Condotte MP, AB perpendicolari alla direttrice, e fatta AP $= x$, PM $= y$, CP $= z$, CQ $= a$, AB $= b$, sarà PQ$(z-a)$:PM(y)::AQ$(x+a-z)$: AB (b); onde $z = a+\frac{xy}{b+y}$, valore che sostituito nell' equazione della curva CM, dà quella della concoide MD. Per esempio, se la curva CM è un circolo il cui centro sia Q, si ha $y^2 = 2az - z^2$, che dà $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ come sopra: e se la curva CM è una parabola dell'equazione $y^2=pz$, allora $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ è l' equazion della concoide parabolica, di cui fece uso Cartesio per risolvere un' equazion generale del sesto grado. 135.

786. II°. La Cissoide di Diocle. Sia il circolo ANBn col diametro AB. Se condotta la tangente QBq al punto B e le rette AQ a varj punti di essa, si prenda QM $=$ AN, la curva MAm che passa per i punti M, m così determinati, si chiama *Cissoide*. 136.

787. Per trovarne l' equazione, conduco OM parallela ad AP, ed MP, NG perpendicolari; fatta AP $= x$, PM $= y$, e AB $= a$ diametro del circolo *genitore*, essendo AN $=$

136. MQ, sarà AG = PB, ed AG $(a-x)$: GN $(\sqrt{[ax-xx]})$ ::
AP (x) : PM $(y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ onde $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, equazione cercata, da cui si vede 1°. che quando $x = 0$, anche $y = 0$, e però la curva passa per l' origine dell' ascisse; 2°. che se $x = \frac{1}{2}a$, si ha $y = \pm\frac{1}{2}a$, cioè i due rami della cissoide tagliano la circonferenza a distanze eguali da A e B; 3°. che se $x = a$, y è infinita, e che perciò BQ è l' asintoto della curva ec. (735).

137. 788. III°. La Logaritmica. Preso un punto A sull' indefinita HG e alzate dell' ordinate PM che abbian per logaritmi le loro ascisse AP, la curva BMm che passa per l' estremità di queste ordinate, dicesi *Logaritmica*. Sia AP $= x$, PM $= y$, A = al modulo, $e = 2{,}7182818$ il cui logaritmo iperbolico è 1 (308); sarà $x = \text{A}ly = xle$, onde $y^{\text{A}} = e^{x}$, che dà $y = e^{\frac{x}{\text{A}}}$, equazion della logaritmica. Ella mostra 1°. che questa curva è trascendente (738): 2°. che l' ascisse x, x' della stessa ordinata y in diverse logaritmiche, o i logaritmi dello stesso numero in diversi sistemi, son come i moduli A, A'; 3°. che quando $x = 0$, si ha $y = 1 = \text{AB}$; 4°. che se $x = \text{AE} = \text{AB} = 1$, si ha $y = \text{EF} = e^{\frac{1}{\text{A}}}$, e però se in $y = e^{\frac{x}{\text{A}}}$, ad $e^{\frac{1}{\text{A}}}$ si sostituisca FF $= a$, sarà sempre $y = a^{x}$: onde se l' ascisse forman la progressione aritmetica $\div$ 1, 2, 3, 4, ec., l' ordinate formeranno la geometrica $\div\!\div$ a^1, a^2, a^3, a^4 ec., e però la logaritmica va all' infinito di là da AP. Ma prese verso AQ l' ascisse negative $x = -1, -2$ ec., l' ordinate diverranno $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$ ec., cioè la curva ha un ramo infinito BO di cui la direttrice o asse GH è l' asintoto.

138. 789. IV°. La Cicloide. Se un circolo AG giri sopra una retta Aa finchè il punto che toccava sul principio questa retta in A, la tocchi un' altra volta in a, questo punto descriverà una curva chiamata *Cicloide* o *Trocoide*. Ella è *ordinaria* quando il circolo *genitore* non ha altro moto che quello della sua rivoluzione: ma se ha di più un moto di traslazione o nel medesimo senso o in senso contrario, ella

139. è o *accorciata* o *allungata*. Nell' ordinaria la *base* Aa eguaglia la circonferenza del circolo genitore; è più corta

 FIG.

nell' accorciata, maggiore nell' allungata. Il diametro BC del circolo genitore si chiama *asse* della cicloide quando è normale al mezzo della sua base: il punto B è il suo *vertice*, e BC la sua altezza maggiore. 139. e 140.

790. Posto ciò, condotte MP normale a BC, e le corde eguali MF, OC, avremo FC = MO; dunque poichè FC = AC — AF = BIOC — FKM = BIOC — OLC = BIO, la parte MO dell' ordinata MP è sempre eguale all' arco corrispondente BIO del circolo genitore. Inoltre il resto OP è il seno del medesimo arco; dunque chiamando MP (y), BIO (u), si avrà per equazione alla cicloide ordinaria, $y = u + \operatorname{sen} u$. Per generalizzarla si farà $MO = \frac{b}{a} BIO$, il che conviene alla cicloide o ordinaria o accorciata o allungata, secondo che b è eguale o minore o maggiore di a, e si avrà $y = \frac{b}{a} u + \operatorname{sen} u$. La cicloide è dunque una curva trascendente (738). 138.

791. Se il punto per descriver la cicloide si prenda dentro o fuori della circonferenza, la curva descritta sarà un' altra specie di cicloide; e se il circolo si faccia girare sulla circonferenza d'un altro circolo, la curva descritta da uno de' suoi punti, sarà un' *Epicicloide*.

792. V°. La Quadratrice di Dinostrato. Se la retta AG tangente al circolo in A si muova uniformemente e parallelamente a se stessa lungo il diametro A*a* mentre il raggio AC gira uniformemente intorno al centro C verso il punto E, in modo che AG e AC si confondano con CE nel momento stesso; l' intersezione continua di queste due rette dà la curva AMD, chiamata *Quadratrice*, dalla cui descrizione segue che uno spazio qualunque AP percorso dalla retta AG sta all' arco circolare AB descritto nel tempo stesso dall' estremità del raggio, come un altro spazio AC percorso da quella retta, all' arco corrispondente ABE descritto dal raggio. Fatta dunque $AP = x, PM = y, AB = u, AC = r = 1$, $ABE = 90° = c$, si avrà 1° $x : u :: 1 : c$, onde $u = cx$; 2°. CP : PM :: CA : AG, ovvero $1 - x : y :: 1 : \operatorname{tang} u$, onde $y = (1 - x) \operatorname{tang} cx$, equazione alla quadratrice quando l' origine dell' ascisse è in A. 142

793. Se sia in C, cangio x in $1 - x$, ed ho $u = c(1 - x)$ ed $y = x \operatorname{tang} c(1 - x) = (618)\, x \cot cx = (623) \frac{1}{c} -$

142. $\frac{cx^2}{3} - \frac{c^3x^4}{3^2 \cdot 5}$ — ec.: onde quando $x = 0$, sarà $y =$ CD $= \frac{1}{c}$, e però se si conoscesse la *base* CD della quadratrice, si avrebbe subito la quadratura del circolo; di quì è venuto il nome alla curva.

794. Se sia descritto col centro C e raggio CD il quadrante DLK, sarà (508) $\frac{1}{c}$: DLK :: 1 : c; dunque DLK $=$ $1 =$ CA. Così PC $=$ all'arco LD, perchè $\frac{1}{c}$: KL :: 1 : $c(1 - x)$; onde KL $= 1 - x =$ AP, e PC $=$ LD.

795. Prese le ascisse negative AP′, e sostituito il loro valore nella prima equazione, avremo $y = -(1 + x) tang\, cx$, che dà l'ordinate negative P′M′. Quindi la curva ha un ramo AM′, di cui la retta QN condotta alla distanza AQ $= r = 1$, è l'asintoto; poichè fatto $x = 1$, viene $y = -2\infty$.

Ben si vede 1°. che la retta AG e il raggio CA seguitando a muoversi dopo essersi confusi in CE, formano la parte Da della quadratrice: 2°. che se la curva fosse geometrica, si avrebbe qualunque angolo d'un dato numero di gradi, come di $\frac{90°}{m}$, bastando dividere AC in P onde AP : AC :: 1 : m, e condur l'ordinata PM e il raggio CB; l'angolo ACB sarebbe $= \frac{90°}{m}$, poichè $x : 1 :: u : c :: 1 : m$.

143. 796. VI°. La Spirale d'Archimede. Si chiama così la curva CKMA descritta da un punto C che si muove uniformemente lungo il raggio CA, mentre il raggio stesso si muove uniformemente intorno al centro C, in maniera che quando il raggio ha percorsa la circonferenza intera, questo punto si trovi confuso col punto A. Se prolungato il raggio CA, gli si faccia fare una seconda rivoluzione, mentre il punto C continua ad allontanarsi dall'origine del suo movimento, si descriverà una *seconda spirale*, poi una *terza* ec., o piuttosto queste spirali saranno una sola curva le cui rivoluzioni possono accrescersi in infinito.

797. Posto ciò, l'ordinata CM (y) : raggio CA (a) :: arco ADBN, ascissa corrispondente (x) : circonferenza ADBNA (p); dunque l'equazione alla spirale d'Archimede è $y = \frac{ax}{p}$; onde 1°. la curva è trascendente: 2°. passa per il cen-

tro C, poichè $x=0$ dà $y=0$; 3°. passa altresì per A, poichè $x=p$ dà $y=a$; 4°. fatto $x=p+x'$, l'equazione diventa $y=a+\frac{ax'}{p}$, e perciò dati ad x' i valori che son tra 0 e p, la spirale fa una seconda rivoluzione che termina all'estremità d'un raggio doppio del primo; e ne fa una terza, una quarta ec. se $x=2p+x''$, $x=3p+x'''$ ec. 143.

798. VII°. La Spirale Parabolica. Presa sopra un raggio CN una media proporzionale NM tra l'arco AN e una retta data g, la curva che passerà per i punti M determinati così, sarà la *Spirale Parabolica*. Sia dunque $AN=x$, $CM=y$, $AC=a$, ed avremo $y=a-\sqrt{gx}$, equazione in cui sostituendo $p+x$, $2p+x$ ec. in luogo di x, troviamo che questa curva può fare un'infinità di rivoluzioni intorno al centro C, e che perciò è del numero delle spirali. 144.

799. VIII°. La Spirale Iperbolica. Suppongo che dal punto C preso per centro sull'indefinita CP si descrivano degli archi AG, QM, PO ec. eguali in lunghezza, e che per le loro estremità G, M, O ec. si faccia passare una curva CKGMO. Questa sarà una *Spirale Iperbolica*; e ben si vede che presa $CB=AG=QM=PO$ ec. ed alzata BR parallela a CP, ella ne sarà l'asintoto, perchè può solamente incontrarla quando il raggio CM sia infinito. 145.

800. Sia il raggio $CA=a$, $AN=x$, $CM=y$, $AG=QM$ ec. $=b$; si avrà $x:b::a:y$, onde $xy=ab$. Ora sostituiti ad x dei valori $p+x$, $2p+x$ ... $mp+x$, si avrà successivamente $y=\frac{ab}{p+x}$, $y=\frac{ab}{2p+x}$ . . . $y=\frac{ab}{mp+x}$; onde crescendo l'ascissa, scema l'ordinata, la quale diviene zero sol quando m è infinita; dunque *la spirale iperbolica fa un' infinità di giri intorno al centro prima di giungervi*.

801. IX°. La Spirale Logaritmica. Si chiama *Spirale Logaritmica* la curva che taglia sotto uno stesso angolo tutti i raggi CM condotti dal suo centro C, cosicchè la tangente MT fa sempre un angolo stesso col raggio CM. Questa curva ha molte proprietà che non possono ben dettagliarsi senza il calcolo differenziale ed integrale. 146.

802 X°. Curve a doppia curvatura. Se sopra la curva aB si alzassero dell'ordinate ST normali al piano aBC in modo che la relazione tra l'ascisse o archi $aS=s$ e l'ordinate $ST=z$ fosse espressa da un'equazione, la linea aQ che passasse per tutti i punti T, sarebbe curva in due sensi, e perciò direbbesi *Curva a doppia curvatura*: ma poichè questa nuova maniera di concepir tali curve (che per altro ci sarà utile altrove) 138.

138. non dà facilmente la relazione finita tra s e z, ecco come d'ordinario si concepiscono. Se sopra le curve aB, aN descritte con la stessa origine a nei piani DaC delle x, y e DaH delle y, z (730), si intendano alzarsi normalmente e segarsi due superficie curve, la loro comun sezione aQ sarà una *Curva a doppia curvatura*, e le curve generatrici aB, aN che scambievolmente sarebbero generate da lei conducendo da ogni suo punto le normali TS, TV sui piani DaC, DaH, si chiamano *curve di projezione*, alle quali se ne può aggiungere una terza che si formerebbe nel modo stesso sul piano CaH delle x, z. Onde 1°. la curva a doppia curvatura non può descriversi in un piano: 2°. i suoi punti son determinati da due delle tre curve di projezione, le cui equazioni perciò esprimono la natura della curva e danno il modo di descriverla. Sieno aB, aN due parabole dell'equazioni I. $y^2 = px$, II. $z^2 = qy$; posto nella II. il valor di y preso dalla I., verrà III. $z^4 = pq^2x$, equazione della curva di projezione sul piano delle x, z: dalla I. si ha $y = \sqrt{px}$, dalla III. $z = \sqrt[4]{pq^2x}$, onde dati ad x diversi valori, se ne hanno altrettanti per y e per z, e si descrive la curva aQ.

803. Date ora due superficie curve con le stesse coordinate x, y, z, se ne avrà la comun sezione o la curva a doppia curvatura sol che dall'equazioni alle superficie si deducan quelle di due delle tre curve di projezione. Sieno date le superficie d'un solido parabolico e d'un cono retto che col vertice stesso abbian gli assi delle x e delle y scambievolmente normali: dalle loro equazioni (730) I. $px = y^2 + z^2$, II. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + z^2$ (cangiato nel cono x in y, ed y in x come esige il dato) si ha III. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + px - y^2$, IV. $\frac{a^2(px - z^2)}{b^2} = x^2 + z^2$, equazioni alle curve di projezione (un' iperbola ed un' ellisse) che determinano la curva cercata a doppia curvatura. E' chiaro 1°. che se la III. o IV. sieno impossibili o si riducano ad un sol punto, non si avrà comun sezione e perciò nemmen curva; 2°. che se sostituito nella II. il valor di z preso non più dalla I. m dall'equazion generale d'un piano $Ax + By + Cz + D =$ (730), possan determinarsi A, B, C, D in modo che comprima ne risulti la III., non sarà la sezione una curva c

doppia curvatura, ma una curva semplice che potrà descriversi sul piano dell' equazion determinata $Ax + By + Cz + D = 0$. FIG. 138.

LUOGHI GEOMETRICI.

Costruendo l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si trovò (731) che ne risultava un circolo: questo circolo si chiama il *Luogo Geometrico* dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$.

804. In generale *il luogo d' un' equazione è la linea descritta secondo il rapporto delle* x *e delle* y *che l' equazione contiene*, rapporto che somministra le costruzioni geometriche dell' *equazioni indeterminate;* così si chiamano tutte l' equazioni a due variabili, e se ne distinguono i gradi dalle più alte potenze di queste variabili. Cominciamo dal primo grado.

805. Ogni equazione di questo genere può esser rappresentata da $ay = bx + cm$, cioè $y = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$: si tratta di trovarne il luogo geometrico. Sia $AP = x$ la linea dell' ascisse di cui pongo l' origine in A; sia PM un' ordinata y che faccia con AP un angolo dato APM. Presa ora sopra AP una determinata $AB = a$ e parallelamente a PM condotta $BD = b$, i triangoli simili ABD, APN daranno $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$; dunque se la data equazione fosse $y = \frac{bx}{a}$, la linea AN sarebbe il luogo cercato. Ma poichè il secondo membro ha di più $\frac{cm}{a}$, le PN debbono essere accresciute di questa quantità: perciò alzata sopra AP parallelamente a PM una $AE = \frac{cm}{a}$ e condotta per E l' indefinita M′M parallela ad AN, sarà $PM = y = PN + NM = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$, onde la retta M′M è il luogo della data equazione. Se $\frac{cm}{a}$ fosse negativa, le PN dovrebbe- 147.

147. ro diminuirsi di questa quantità, il che si fa conducendo AE′ sotto ad AP e per E′ una parallela MM″ ad AN, ed MM″ è il luogo dell' equazione $y = \frac{bx}{a} - \frac{cm}{a}$: la parte OM corrisponde al valor positivo di y, e il suo prolungamento OM″ a quello di $-y$; onde può concludersi in generale che *la linea retta è il luogo geometrico di tutte l' equazioni indeterminate del primo grado.*

806. Quelle del secondo posson tutte ridursi alla formula

$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0$$

la cui costruzione dà la natura delle curve espresse da equazioni del secondo grado, qualunque sia l' angolo delle coordinate. Risolvo pertanto quest' equazione, presa y per incognita (189), e poi fatto $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, trovo $u^2 + (b - \frac{a^2}{4})x^2 + (c - \frac{ad}{2})x + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Or per costruir l' equazione $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, supposte le coor-
148. dinate $AP = x$, $PM = y$ nel dato angolo, conduco $AB =$
149. $\frac{1}{2}d$ parallela a PM (sotto AP se d è positivo), e per mez-
150.
151. zo di BO parallela ad AP ottengo $MO = y + \frac{1}{2}d$. Sopra BO prendo ad arbitrio $BE = 1$, e condotta $EF = \frac{1}{2}a$ parallela a PM, e per B ed F l' indefinita BFN, i triangoli simili BEF, BON danno $ON = \frac{1}{2}ax$, e perciò $MN = u$. Ma le coordinate $AP = x$, $MN = u$ non sono in angolo tra loro come bisogna; e però per ridurvele, sia $BN = z$ e la retta nota $BF = n$ (652); si avrà $n : 1 :: z : x = \frac{z}{n}$, ed $u^2 + (b - \frac{a^2}{4})\frac{z^2}{n^2} + (c - \frac{ad}{2})\frac{z}{n} + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Quì può accader 1°. che

che $b = \frac{a^2}{4}$, nel qual caso $y^2 + axy + bx^2$ è un quadrato perfetto; 2°. che $b > \frac{a^2}{4}$; 3°. che $b < \frac{a^2}{4}$: sicchè questa equazione è suscettibile delle tre seguenti forme, I. $u^2 - gz + r = 0$, II. $u^2 + gz^2 - rz - s = 0$, III. $u^2 - gz^2 - rz - s = 0$.

807. Onde 1°. se nella I^a. $u^2 = gz - r = g(z - \frac{r}{g})$ si faccia $z - \frac{r}{g} = t$, sarà $u^2 = gt$, equazione alla parabola (748) che col parametro g, coll' angolo MNC delle coordinate, e coll' origine C del diametro, determinata dal caso di $t = 0$ che dà $z = \frac{r}{g} =$ BC, facilmente si descrive (753): 148.
2°. se nella II^a. $u^2 + gz^2 - rz - s = \frac{u^2}{g} + z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} + \frac{r^2}{4g^2} - \frac{r^2}{4g^2} = 0$ si faccia $z^2 - \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 = g(\frac{r^2 + 4gs}{4g^2} - t^2)$, equazione all' ellisse che paragonata all' altra (764) $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, dà $\frac{n^2}{m^2} = g$, ed $m^2 = \frac{r^2 + 4gs}{4g^2}$, onde $m = \frac{1}{2g}\sqrt{(r^2 + 4gs)} =$ CD ed $n = m\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g} + 4s\right)} =$ CG, coi quali semidiametri e col centro C determinato dal caso di $t = 0$ da cui si ha $z = \frac{r}{2g} =$ BC, è facile descriver la curva (764): 3°. se nella III^a. 149.
$\frac{u^2}{g} - z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} - \frac{r^2}{4g^2} + \frac{r^2}{4g^2} = 0$ si faccia $z^2 + \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 = g(t^2 + \frac{4gs - r^2}{4g^2})$, equazione all'iperbola il cui centro C è determinato dal caso di $t = 0$ da cui si ha $z = -\frac{r}{2g} =$ BC; e quanto ai semidiametri, se $4gs >$ 150.
r^2, paragonata l' equazione alla sua analoga (779) $y^2 =$

$\frac{m^2}{n^2}(x^2+n^2)$, avremo $n=\frac{1}{2g}\sqrt{(4gs-r^2)}$ ed $m= ..$ $\frac{1}{2}\sqrt{\left(4s-\frac{r^2}{g}\right)}$: ma se $4gs<r^2$, l'equazione di confronto sarà (779) $y^2=\frac{n^2}{m^2}(x^2-m^2)$ che dà $m=\frac{1}{2g}\sqrt{(r^2-}$

151. $4gs)$ ed $n=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g}-4s\right)}$; onde la curva si potrà sempre descrivere (782). Che se nell'equazione primitiva (806) manchi y^2, si libererà x^2 dal suo coefficiente, e si avrà un'equazione $x^2+ayx+bx+py+q=x^2+(ay+b)x+py+q+\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=0$, e fatto $x^2+(ay+b)x+\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2=u^2$, l'equazione $u^2-\left(\frac{ay+b}{2}\right)^2+py+q=0$ sarà all'iperbola e si costruirà come la terza formula. Infine se manchi anche bx^2, liberato xy dal suo coefficiente, resterà un'equazione $xy+ax+by-p=0$, ove fatto $b+x=u$, si ha $yu+au-ab-p=0$, e fatto $y+a=z$, viene $uz=ab+p$, equazione all'iperbola tra gli asintoti: onde poste le coordinate AP, PM nel dato angolo APM,
152. prolungata AP verso D finchè sia AD $=b$, e condotta DC $=a$ parallela a PM, si descriverà tra gli asintoti CQ, CK l'iperbola della potenza $ab+p$ (774. 782), e sarà QM $=a+y=z$, QC $=b+x=u$ e QM $\times$ QC $=uz=ab+p$.

808. Segue da tutto ciò che *qualunque equazione indeterminata del secondo grado appartiene a una sezione conica*, e che la sua specie dipende dai tre primi termini $y^2+axy+bx^2$ della formula generale. Perciò

I°. Se questi tre termini formano un quadrato perfetto, cioè se $b=\frac{a^2}{4}$, o se non resta dei tre primi termini altro che y^2 o x^2, l'equazione apparterrà alla parabola.

II°. Se $b>\frac{a^2}{4}$, l'equazione è all'ellisse che per altro diviene un circolo quando CD $=m=$ CG $=n=m\sqrt{g}$ (807)
149. cioè $g=1$, e l'angolo BNM è retto; allora $BE^2=1=BF^2+FE^2=n^2+\frac{a^2}{4}$ (806); e poichè $g=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\frac{1}{n^2}=1$,

si ha $b = n^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, e l' equazione primitiva diventa $y^2 + axy + x^2 + cx + dy + f = 0$.

III°. Se $b < \frac{a^2}{4}$, l' equazione è all' iperbola quand' anche b sia negativa; e se $b = 1$, l' iperbola è equilatera. Se manca uno dei quadrati y^2, x^2, restando il rettangolo xy, la curva è egualmente iperbola; e se y^2, x^2 mancano nel tempo stesso, l' equazione è agli asintoti.

809. Può accadere che l' equazione proposta non sia realmente del secondo grado: tale è $y^2 - xy + \frac{x^2}{4} = a^2$; la sezione conica ch' essa rappresenta, degenera in linea retta, come dee succedere per una parabola il cui parametro sia nullo, e che perciò si confonda col suo asse. Che se l' equazione proposta implichi contradizione, il calcolo lo farà conoscere colle operazioni che indicherà, come conducendo a descrivere un circolo di raggio immaginario ec.

Problemi indeterminati del secondo grado.

810. I. Dati i due punti A e B, trovar la curva AMB tale che conducendo da qualunque suo punto M le rette MA, MB, l' angolo AMB sia sempre lo stesso. Condotta MP normale ad AB, sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, $tang\,AMB = t$; avremo (646) $tang\,AMP = \frac{x}{y}$, e $tang\,BMP = \frac{a-x}{y}$. Dunque (615) $t = \frac{\frac{x}{y} + \frac{a-x}{y}}{1 - \frac{x(a-x)}{y^2}}$; il che dà $y^2 + x^2 - ax - \frac{ay}{t} = 0$, equazione al circolo (808). Ne compisco i due quadrati e sarà $\left(y - \frac{a}{2t}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4t^2}$; poi divido AB in mezzo nel punto F, dal quale alzo $EF = \frac{a}{2t}$ perpendicolare alla stessa AB, e col centro E e raggio $AE = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4t^2}\right)}$ descrivo il circolo AMB, che è il luo- 153.

153. go dell' equazione; poichè condotta EQ parallela ad AB, ho $EQ = \frac{1}{2}a - x$, $MQ = y - \frac{a}{2t}$; dunque ec. Or poichè $EF = \frac{a}{2t}$, deve essere l' angolo $AEF = AMB$: infatti essendo $EF \left(= \frac{a}{2t}\right) : FA \left(= \frac{1}{2}a\right) :: R (= 1) : t = tang\, AEF$ (646), i due angoli AMB ed AEF hanno una stessa tangente t; dunque condotta AT in modo che l' angolo TAB sia eguale all'angolo AMB, la retta AE perpendicolare sopra AT incontrerà EF nel centro del circolo cercato.

154. 811. II. La data retta AB si muova nell' angolo acuto BCA in modo che le sue estremità A e B stiano sempre sui lati dell' angolo dato: cerco la curva descritta da un dato punto M di AB. Condotta PM parallela ad AC, sia $CP = x$, $PM = y$, $AM = m$, $BM = n$, $cos\, ACB = cos\, MPB = c$: avrò $BP = \frac{nx}{m}$, e il triangolo MPB darà (651) $\frac{2cnxy}{m} = y^2 - n^2 + \frac{n^2x^2}{m^2}$, ovvero $y^2 - \frac{2ncxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - n^2 = 0$, equazione all' ellisse; poichè $\frac{n^2}{m^2} > \frac{n^2c^2}{m^2}$ cioè $1 > c$ (808). Faccio $y - \frac{cnx}{m} = u$, e posto $sen\, MPB = s$, si avrà $u^2 + \frac{n^2s^2x^2}{m^2} - n^2 = 0$. Presa dunque $CE = 1$, e condotta $EF = \frac{cn}{m}$ parallela ad AC, se si conduce CFQ, si avrà $QM = u$. Sia dunque $CF = f$, $CQ = z$; si avrà $x = \frac{z}{f}$; dunque $u^2 = \frac{n^2s^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{s^2} - z^2\right)$. Quindi i semidiametri conjugati CO e CG saranno respettivamente espressi per $\frac{fm}{s}$ e per n, e poichè si conosce l' angolo GCO, è facile descriver l' ellisse (766). Se l' angolo ACB sia retto, l' equazion primitiva diventerà $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, e apparterrà a un' ellisse dei semiassi m, n. Quindi dati gli assi potrà descriversi l' ellisse; essendo il maggiore $2a$, il minore $2b$, prendo $AM = a$, $MB = b$ e muo-

vo AB tra i lati d' una squadra; il punto M descriverà il quarto d' ellisse richiesta. FIG. 154.

812. III. Data la parabola NAK, trovare il luogo di tutti i punti M tali che le due tangenti NM, KM faccian sempre l' angolo stesso NMK. Condotte MP, KL, NQ normali all' asse AQ, sia $AP=x$, $PM=y$, $NQ=z$, $KL=u$, il parametro della parabola $=p$, $tang\, NMK=t$, onde $AQ=AT=\frac{z^2}{p}$, $AL=AS=\frac{u^2}{p}$ (748.751), $QT=\frac{2z^2}{p}$, $LS=\frac{2u^2}{p}$, e attesi i triangoli simili TPM, TQN, ed SPM, SLK, avremo $\frac{2z^2}{p}:z::\frac{z^2}{p}-x:y$ e anche $\frac{2u^2}{p}:u::x-\frac{u^2}{p}:y$, e di quì $z=y+\surd(y^2+px)$, $u=-y+\surd(y^2+px)$, $u+z=2\surd(y^2+px)$ ed $uz=px$. Ora $NMK=NTQ+KSL$ (425), e perchè (646) $tang\, NTQ=\frac{p}{2z}$ e $tang\, KSL=\frac{p}{2u}$, sarà (615) $t=\frac{2p(u+z)}{4uz-p^2}$, e posti per $u+z$ ed uz i lor valori, $t=\ldots\frac{4\surd(y^2+px)}{4x-p}$; e quadrando, $y^2=t^2\left[\left(x-\frac{p}{4}\right)^2-\frac{px}{t^2}\right]$, equazione all' iperbola (808). Sia $x-\frac{p}{4}-\frac{p}{2t^2}=\varphi$, e verrà $y^2=t^2[\varphi^2-\frac{p^2}{4t^4}(t^2+1)]$ che paragonata con $y^2=\frac{n^2}{m^2}(x^2-m^2)$ (807) e chiamato s il seno dell' angolo NMK, dà $m=\frac{p}{2t^2}\surd(t^2+1)=(610)\frac{p}{2ts}$ ed $n=\frac{p}{2s}$: onde diminuendo le x di $AC=\frac{p}{4}+\frac{p}{2t^2}$, l' iperbola del centro C e dei semiassi $CD=m$, $CG=n$, sarà il luogo dell' equazione. E si osservi 1°. che se l' angolo NMK sia ottuso, la tangente t sarà negativa: ma ciò nulla cangia nell' equazione che contiene sole potenze pari di t: onde dei due rami iperbolici MDm, $M'dm'$ quello soddisfà al problema quando il dato angolo è acuto, questo quando è ottuso: 2°. che se il dato angolo è retto, si ha $t=\infty$ (610), onde la linea cercata è la direttrice della stessa parabola (197.749); cosicchè due tangenti della parabola che partono da un punto della direttrice, forman sempre un angolo retto. 155.

FIG. 156. 813. IV. Far passare una Sezione conica per cinque punti dati A, C, D, B, E. Per due di questi punti conduco AB e dagli altri punti le perpendicolari CF, DH, GE sopra di essa, e poi suppongo che l' equazione della sezione conica cercata sia $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy + g = 0$ e faccio AF $= p$, FC $= q$, AG $= p'$, GE $= q'$, AH $= p''$, DH $= q''$, AB $= p'''$. Quando $x = 0$, sarà $y = 0$, onde $g = 0$, e però l' equazione si riduce ad $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$. Quindi secondo che $x = p, = p', = p'', = p'''$, si ha $y = q, = -q', = q'', = 0$: sicchè si hanno le quattro equazioni, $aq^2 + bpq + cp^2 + dp + fq = 0 \ldots aq'q' - bp'q' + cp'p' + dp' - fq' = 0 \ldots aq''q' + bp''q'' + cp''p'' + dp'' + fq'' = 0 \ldots cp'''p''' + dp''' = 0$, da cui si avranno i valori di b, c, d, f, che sostituiti in $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$, danno l' equazione della curva cercata. Il metodo può applicarsi a risolvere un somigliante problema per le linee del terzo, e del quarto grado ec.

814. Così si trova per approssimazione la legge di più quantità legate insieme con certi rapporti. Suppongo per esempio le tre quantità BC, DE, FG dipendenti da tre altre AB,
157. AD, AF; si vuole in generale una legge che unisca queste sei quantità. Immagino l' indefinita AF, e riguardo le sue parti AB, AD, AF come l' ascisse d' una curva CEMG; suppongo che ogni ordinata y sia una funzione indeterminata A $+$ Bx $+$ Cx^2 $+$ ec. dell' ascissa corrispondente (se le date quantità fossero quattro BC, DE, PM, FG, prenderei quattro termini per esprimere questa funzione). Or giacchè si ha $y = A + Bx + Cx^2$, faccio AB $= a$, BC $= b$, AD $= a'$, DE $= b'$, AF $= a''$, FG $= b''$, onde le tre equazioni $b = A + Ba + Ca^2 \ldots b' = A + Ba' + Ca'a' \ldots b'' = A + Ba'' + Ca''a''$, con cui si determinano i coefficienti A, B, C e l' equazione approssimata della curva CM, ove una quantità AP dipende da un' altra PM, come AB dipende da BC, AD da DE ec. Tale è il *Metodo dell' Interpolazioni*.

815. Con questo si ha l' equazione approssimata d' una curva segnata a caso sulla carta. Basta 1°. abbassar delle perpendicolari da varj punti di questa curva (e in particolare da quelli ove cangia molto di concavità) sopra una retta presa per retta dell' ascisse: 2°. supporre che l' equazione della curva sia $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ec. in cui si fanno entrar tanti coefficienti indeterminati quante son le perpendicolari abbassate; 3°. determinar come sopra i coefficienti A, B, C, D ec.

Problemi determinati fino al quarto grado.

816. I luoghi di due equazioni indeterminate del secondo grado posson costruirsi sulla stessa retta dell' ascisse, con la stessa origine e nello stesso angolo delle coordinate. In tal caso le due curve si taglieranno in punti tali che l' ordinate corrispondenti a questi, saranno le radici dell'equazione determinata che si avrebbe riunendo le due equazioni in una che non contenesse altro che x o y. Reciprocamente se un' equazione determinata del terzo o quarto grado si divida in due che contengano x ed y, cosicchè eliminando x o y si ritrovi la data, è chiaro che costruendole come sopra, i punti d' intersezione delle due curve avranno per coordinate i valori dell' incognita: così se nell' equazione $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ si faccia $x^2 = py$, sarà $p^2y^2 + apxy + bpy + cx + d = 0$, equazione a una sezione conica che costruita con la parabola dell' equazione $x^2 = py$, taglierà questa curva in dei punti, le cui ascisse corrispondenti saranno i valori di x. Quando la data equazione ha quattro radici reali, le due curve si tagliano in quattro punti; quando ne ha due sole, si tagliano in due; se tutte sono immaginarie, non si ha intersezione; con radici eguali, le curve si toccano; e perchè s' incontrino in un numero di punti eguale a quello delle radici reali ed ineguali, si prende l' equazione d' una delle due curve con y alla sola prima dimensione. Del resto, il metodo, sì bello in teorica, è stato in pratica quasi abbandonato per l' impossibilità di descrivere esattamente le Curve.

817. I. Date due rette a, b, trovar tra esse due medie proporzionali x, y. Poichè per ipotesi $\div\!\!\div a : x : y : b$, sarà $x^2 = ay$, ed $y^2 = bx$; onde costruite le parabole di queste equazioni con la stessa retta dell' ascisse, lo stesso vertice e lo stesso angolo delle coordinate (che ordinariamente si suppone retto), esse daranno con le loro intersezioni i valori cercati di x, y.

Ma non deve in generale costruirsi un' equazione del terzo o quarto grado senza far uso del circolo, curva tanto più comoda a descriversi. Che se per introdurre il circolo nelle soluzioni di questo genere, occorre talvolta una certa destrezza, vi sono anche certi casi, in cui si presenta da se. Per esempio, sommando le due equazioni $x^2 - ay = 0$, $y^2 - bx = 0$, e supposte le coordinate in angolo retto, nasce l' equazione al circolo $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$. Descritta dunque una parabola AM del parametro b sull' asse AP, ella sarà il 158.

158. luogo dell'equazione $y^2 = bx$. Per trovar quello di $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, sia $x - \frac{1}{2}b = u$, e $y - \frac{1}{2}a = z$: avremo $u^2 + z^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, e condotta da A perpendicolarmente ad AP la retta $AB = \frac{1}{2}a$, e per B l'indefinita BCQ parallela ad AP, se preso $CB = \frac{1}{2}b$ si descriva un circolo col raggio CA, egli taglierà la parabola in un punto M tale che condotta la perpendicolare PM, le coordinate AP, PM saranno le due medie-proporzionali cercate.

Supposto $b = 2a$, il cubo fatto sopra AP sarebbe doppio del cubo a^3 (214), ciò che risolve con poco il problema della duplicazione del cubo sì famoso tra gli Antichi. Anzi può generalizzarsi questo problema prendendo $b = \frac{ma}{n}$ per trovare un cubo $AP^3 = \frac{ma^3}{n}$ che sia ad un dato cubo a^3 nella ragione $m:n$.

818. II. Dividere in tre parti eguali un arco di circolo BF.

159. Suppongo MF il terzo dell' arco BF e oltre le normali BOG, MPm sul raggio AF, conduco Bm ed mR normale a BG. Poi fatto $AP = x$, $PM = y$, $AM = a$, $AO = b$, $BO = c$, i triangoli simili AMP, BmR daranno $x : y :: c + y : x - b$, cioè $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$, equazione all'iperbola equilatera (808) che costruendosi determinerà il punto M nel quale il circolo e l'iperbola si taglieranno. Ora ella può mettersi sotto questa forma $\left(y + \frac{1}{2}c\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}b^2$; dunque (807) se $c > b$, l'equazione apparterrà al second' asse, e se $c < b$, al primo. In quest' ultima supposizione, dal centro A si conduca $AD = \frac{1}{2}c$ normale ad AF, e da D si tiri $DC = \frac{1}{2}b$ parallela ad AO; il punto C sarà il centro dell' iperbola, e se si prenda $CL = CK = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)}$, e si descriva sull' asse LK un' iperbola KM, ella taglierà il circolo nel punto cercato M. L' iperbola opposta M′LM″ taglia il circolo in due punti M′ ed M″, il primo dei quali dà (635) l' arco F′M′ terza parte di F′M′B, ed il secondo determina l' arco F′M″ terza parte di F′M″GFB; il punto G non dà soluzione:

FIG.

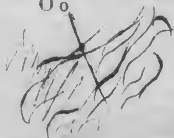
ma la radice $GO = -c$ è quella per cui può dividersi l' equazione $4y^4 + 4cy^3 - 3a^2y^2 - 2a^2cy - a^2c^2 = 0$ che risulta dai due luoghi $y^2 - a^2 + x^2 = 0$, $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$. 159.

Questi luoghi sommati danno $y^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}a^2$, equazione alla parabola. Perciò condotta dal punto A parallelamente a BG la retta $AD = \frac{1}{4}c$, si conduca $DC = \frac{\frac{1}{8}c^2 + a^2}{b}$ parallela ad AF, e si descriva col vertice C e asse CD una parabola del parametro $\frac{1}{2}b$; essa taglierà il circolo ne' punti cercati M, M', M''. Posson variarsi queste soluzioni in molte maniere, moltiplicando le due equazioni del problema per delle quantità indeterminate, e sommandone o sottraendone i prodotti: il che conduce a delle sezioni coniche differenti, tutte egualmente proprie a risolvere il problema. Così per risolverlo coll' ellisse, basterà moltiplicar l' equazione $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, per l' indeterminata m, e aggiungerne il prodotto alla seconda equazione; si avrà 160.

$y^2 + \frac{(m-1)x^2 + bx + cy - a^2m}{m+1} = 0$ che appartiene all' ellisse quando $m > 1$ e positiva, ed all' iperbola quando $m < 1$ o negativa. Si può inoltre determinare m con una condizione arbitraria; per esempio, se si volesse che gli assi dell' ellisse fossero tra loro in ragione di $p : q$, dovrebbe essere $\frac{m-1}{m+1} = \frac{p^2}{q^2}$, il che dà $m = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2}$.

819. III. Dividere lo spazio parabolico ACB con una retta CM in due settori eguali ACM, BCM. Condotta MP normale ad AC, sia $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, $BC = b$, il parametro della parabola $= p$; avremo, come ben presto si vedrà, $\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(a - x) = ACM = \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{3}ab$, ovvero $xy + 3ay = 2ab$, equazione all' iperbola tra gli asintoti. Prolungata AP verso F, onde sia $AF = 3AC$ e condotta FK perpendicolare ad FA, tra gli asintoti FK, FA si descriva una iperbola equilatera della potenza $2ab$; essa sarà il luogo dell' equazione $xy + 3ay = 2ab$ e taglierà la parabola nel punto richiesto M. 161.

Volendosi servir del circolo, poichè $b^2 = ap$ ed $y^2 = px$, sarà $x = \frac{y^2}{p} = \frac{ay^2}{b^2}$, valore che sostituito nell' equazione $xy + 3ay = 2ab$, la cangierà in $y^3 + 3b^2y - 2b^3 = 0$: la



161. moltiplico per y e diviene $y^4 + 3b^2y^2 - 2b^3y = 0$, da cui, sostituito $\frac{b^2x}{a}$ ad y^2, ricavo $x^2 + 3ax - \frac{2a^2}{b}y = 0$: a questa aggiungo $y^2 - px = 0$, ed ho $y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0$, equazione al circolo. Alzata dal punto A normalmente ad AP una retta $AD = \frac{a^2}{b}$, si conduca ad AD dalla parte opposta al punto M una perpendicolare $DC' = \frac{1}{2}(3a - p)$ (quì si suppone $3a > p$), e col raggio C'A e centro C' si descriva un arco di circolo; quest' arco taglierà la parabola nel punto richiesto M; e $PM = b[\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})} - \sqrt[3]{(-1 + \sqrt{2})}]$.

820. IV. Trovar le radici dell' equazione del quarto grado $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0$ per mezzo d' un circolo e d' una parabola. Fatto al solito $x^2 = py$, viene $y^2 + qx - py + pr = 0$; vi unisco $x^2 - py = 0$ e nasce l' equazione al circolo $x^2 + y^2 - 2py + qx + pr = 0$. Descritta dunque col parametro p
164. la parabola M'AM''' che abbia AQ per asse perpendicolare ad AP, e presa $AD = p$, $DC = \frac{1}{2}q$ normale ad AD dalla parte in cui è nella figura (si prenderebbe dall' altra se fosse negativo), si troverà che un circolo del centro C e raggio $\sqrt{(CA^2 - pr)}$ taglierà la parabola ne' punti M, M', M'', M''', che determineranno le radici dell' equazione, due positive, cioè MQ, M'Q', l' altre negative. Se l' equazione da costruirsi fosse $x^4 + p^2x^2 - p^2qx + p^3r = 0$, presa al solito $x^2 = py$, si avrebbe $y^2 + x^2 - qx + pr = 0$, equazione al circolo come nel caso passato, ma più facile a costruirsi.

Si cerchino ora le radici dell' equazione $x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0$ per mezzo di un circolo e d' un' iperbola tra gli asintoti. Presa $xy = pm$, viene $x^4 - pqx^2 + p^2rx + x^2y^2 = 0 = x^2 + y^2 - pq + \frac{p^2r}{x} = x^2 + y^2 - pq + \frac{pry}{m}$, equa-
165. zione al circolo. Tra gli asintoti perpendicolari QAQ', P'''AP' descritte l' iperbole equilatere della potenza pm, prendo sotto AP la retta $AC = \frac{pr}{2m}$, e il circolo del centro C, col raggio $\sqrt{(AC^2 + pq)}$, taglierà l' iperbole opposte nei quattro punti M, M', M'', M''', i quali determineranno come sopra i quattro valori di x con le ascisse AP, AP', AP'', AP'''.

ELEMENTI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

Fondamenti di questi due Calcoli.

821. Le quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c ec., non crescono nè scemano; le variabili che si esprimono con l' ultime x, y, z ec., crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo è una quantità costante, mentre le sue ascisse e le sue ordinate son quantità variabili (478), che hanno anche una relazione scambievole (729): se questa non vi fosse si direbbero *indipendenti tra loro*. La porzione finita di cui una variabile x o y cresce o scema, si chiama *differenza finita* e si scrive δx (*differenza di* x) o δy (*differenza di* y); cosicchè $x \pm \delta x$ è la variabile accresciuta o diminuita della sua differenza, e δ è il segno con cui si indica il cangiamento finito di essa, il quale avrà + se ella cresce, e — se scema, onde $\delta\ (x+y)$ non significa quì moltiplicazione, ma la differenza $\delta x + \delta y$ di $x+y$.

Generalmente $\delta\,[\varphi(x)]$, $\delta\,[f(x,y)]$ ec. significano la differenza d' una funzione φ di x o di una funzione f di x, y ec.: ove per *funzione* si intende quì una quantità composta di x e di costanti, o di x, y e di costanti, ma tanto generale che rappresenta tutte le infinite quantità particolari che posson formarsi con x o con x, y e con delle costanti.

822. Sia la curva CMG con le coordinate AB e BC, AD e DE, AF ed FG ec.; se AB $= x$ e 157

157 $BC = y$, sarà $AD = AB + BD = x + \delta x = x'$, $DE = Da + aE = y + \delta y = y'$, $AF = AD + DF = x' + \delta x' = x''$, $FG = Fb + bG = y' + \delta y' = y''$ ec.; dunque $x' - x = \delta x$, $x'' - x' = \delta x'$, $\delta x' - \delta x = \delta(x' - x) = \delta(\delta x) = \delta\delta x = \delta^2 x$: del pari $y' - y = \delta y$, $y'' - y' = \delta y'$, $\delta y' - \delta y = \delta^2 y$. Ora le quantità $\delta^2 x$, $\delta^2 y$ ec. diconsi *differenze seconde*; e $\delta^3 x$, $\delta^3 y$ sarebbero le *terze* ec.; ove si osservi che $\delta^2 x$ è molto diverso da δx^2; perchè $\delta^2 x$ è la differenza seconda di x, mentre δx^2 è il quadrato della prima δx. Ordinariamente l' una delle due differenze prime δx, δy si riguarda come *costante*; supponendo per esempio $BD = \delta x = DF = FI$ ec.: ma non potranno farsi costanti ambedue, poichè allora sarebbe il triangolo $CaE = EbG$, e la curva CG si supporrebbe una retta.

Solo per render più semplici i calcoli si fa costante δx o δy; del resto, o si faccia o no, il risultato è lo stesso. Sia $BC = y$, $DE = y'$, $FG = y'' = y' + \delta y' = y + 2\delta y + \delta^2 y$, ed $y = x^2$: verrà $\delta y = 2x\delta x + \delta x^2$ (827), e presa costante $\delta x = BD = DF$, sarà $\delta^2 y = 2\delta x^2$, e I. $FG = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2$. Ma se $BP = \delta x$, $PF = \delta x'$, avremo $\delta y = 2x\delta x + \delta x^2$, $\delta^2 y = 2\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + \delta^2 x^2$ (834), e II. $FG = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + \delta^2 x^2$. Ora avendosi sempre $\delta x + \delta x' = 2\delta x + \delta^2 x = BP + PF = BD + DF = 2\delta x$, se questo valore di $2\delta x$ si ponga nella I., verrà esattamente la II., onde la I. ove δx è costante, non differisce dalla II. ove non lo è.

823. Dall' equazioni $y' = y + \delta y$, $y'' = y' + \delta y'$, $y''' = y'' + \delta y''$ ec., $\delta y' = \delta y + \delta^2 y$, $\delta y'' = \delta y' + \delta^2 y'$, $\delta^2 y' = \delta^2 y + \delta^3 y$ ec., si ricava facilmente che presa δx costante, all' ascissa $x' = x + \delta x$ corrisponde l' ordinata $y' = y + \delta y$, all' ascissa $x'' = x + 2\delta x$ corrisponde l' ordinata $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$, all' ascissa $x''' = x + 3\delta x$ corrisponde l' ordinata $y''' = y + 3\delta y + 3\delta^2 y + \delta^3 y$ ec., ove i coefficienti dei termini son quelli delle varie potenze d' un binomio; dunque in generale all' ascissa $x + n\delta x$ corrisponderà un' ordinata $Y =$

$$y + n\delta y + n \cdot \frac{n-1}{2} \delta^2 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \delta^3 y + \text{ec.},$$

teorema di cui può farsi un buon uso per sommar le serie.

Se δx, δy divengano dx, dy (842), e si supponga $ndx = \pm a$ quantità finita, sarà (197) $n = \infty = n - 1 = n - 2$ ec. $= \frac{a}{dx}$, ed $Y = y \pm \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{2dx^2} \pm \frac{a^3 d^3 y}{2 \cdot 3 dx^3} +$ ec., nuovo teorema di cui parleremo altrove. E' chiaro che a può anche supporsi infinitesima purchè allora si riguardi dx come infinitesima del second' ordine.

824. Che se sia ora $IH = y$, $FG = {}'y$, $DE = {}''y$, $BC = {}'''y$ ec. premettendo l' accento per indicare il progresso dell' ordinate all' indietro, avremo $Hc = \delta y$, $Gb = \delta'' y$, $Ea = \delta''' y$ ec.; onde $y - \delta' y = {}'y$, ${}'y - \delta'' y = {}''y$, ${}''y - \delta''' y = {}'''y$ ec., e però $y = \delta' y + {}'y = \delta' y + \delta'' y + {}''y = \delta' y + \delta'' y + \delta''' y + {}'''y$ ec. $= \delta\,({}'y + {}''y + {}'''y$ ec.$)$, altro teorema importante da cui si ha che un' ordinata y o in generale una *funzione* qualunque di y è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono. Dunque 1°. lo spazio Hi, l' arco Hh ec., tutte funzioni di y come vedremo, son la differenza della somma degli spazj GI, EF ec. o degli archi GH, EG ec., ovvero d' uno spazio qualunque CI o di un qualunque arco CH ec.: 2°. supposta costante $\delta y = \delta' y = \delta'' y$ ec. $= 1$, sarà $y = \delta\,(y - 1 + y - 2 + y - 3 +$ ec.$)$: in tal caso se x è funzione di y, la serie ec. ${}'''x$, ${}''x$, ${}'x$, x, x', x'', x''' ec. si scrive da molti x_0, x_1, x_2 .... x_{y-2}, x_{y-1}, x_y, x_{y+1}, x_{y+2} ec.: noi non useremo questa notazione. 157.

825. Come il cercar la differenza d' una variabile dicesi *differenziare*, così il risalir dalla differenza alla variabile stessa chiamasi *sommare* o *integrare*; e come la differenza si indica con δ, così la somma può indicarsi con σ; onde $\sigma\delta x$, $\sigma\delta^2 x$ ec. vuol dir la somma di cui δx o $\delta^2 x$ son la differenza. Ma qui si rifletta 1°. che tanto è $\sigma a \delta x$ che $a \sigma \delta x$ perchè l' integrazione non riguarda mai le costanti; onde se

δx sia costante (822), si avrà $\sigma\delta x = \delta x\sigma 1$ ec.: 2°. che δx tanto è differenza di x che di $x \pm a$, giacchè a essendo costante non ha differenza, cioè non cresce nè scema (821); onde l'eguaglianza della differenziale di due variabili non prova già che le variabili sono eguali, ma solo che posson differire d'una costante, la quale sparisce differenziando, e poi si supplisce sommando coll' aggiungere alla somma l'indeterminata C (*costante*) da determinarsi secondo le circostanze: così $\sigma\delta x = x + C$, $\sigma\delta^2 x = \delta x + C$ ec. Tra poco faremo sentire anche meglio la necessità e l'uso di quest' aggiunta: solo osservo che può darsi alla costante una forma che l'assomigli agli altri termini; poichè se, per esempio, nell'equazione $y = ax^n + C$ sia b il valor di x che rende $y = 0$, si avrà $ab^n + C = 0$, e $C = -ab^n$, onde $y = a(x^n - b^n)$. Passiamo al calcolo delle differenze finite.

826. Vogliasi la differenza finita di $a^2 + bx + cy - fz = u$; avremo (821) $u + \delta u = a^2 + bx \pm b\delta x + cy \pm c\delta y - fz \mp f\delta z = u'$, onde $u' - u = \delta u = \pm b\delta x \pm c\delta y \mp f\delta z$. Dunque all' opposto $\sigma\,(b\delta x + c\delta y - f\delta z) = bx + cy - fz + C$.

827. Sia da differenziarsi $x^n = u$; avremo $u + \delta u = (x \pm \delta x)^n = u'$, ed $u' - u = \delta u = \pm nx^{n-1} \times \delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2 \pm n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\delta x^3 \pm$ ec.: così $\delta(x^2) = 2x\delta x + \delta x^2$, $\delta(x^3) = 3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3$, ec. Dunque $\sigma(\pm nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2} \times x^{n-2}\delta x^2 \pm \text{ec.}) = x^n + C$. Sia δx costante e 1°. $n = 1$; dunque $\sigma\delta x = (825)\ \delta x\sigma 1 = x$, e $\sigma 1 = \frac{x}{\delta x}$: 2°. $n = 2$; dunque $\sigma\,(2x\delta x + \delta x^2) = 2\delta x\sigma x +$

$\delta x^2 \sigma 1 = x^2$, e $\sigma x = \frac{x^2}{2\delta x} - \frac{x}{2}$: 3°. $n = 3$; dunque $\sigma(3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3) = 3\delta x \sigma x^2 + 3\delta x^2 \sigma x + \delta x^3 \sigma 1 = x^3$, e $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3\delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\delta x}{6}$ ec. ec.: onde se $\delta x = 1$, verrà $\sigma 1 = x$, $\sigma x = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, $\sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, ec. ec. E nel modo stesso dalle seguenti differenze dei rotti, dei radicali, delle funzioni circolari ec. si otterranno le respettive somme che lasceremo ormai di notare, bastandoci di avvertire in generale che per aver le somme bisogna rifletter molto sulle differenze.

828. Si voglia la differenza di $\frac{x^2}{a+x} = u$; avremo $u + \delta u = \frac{(x \pm \delta x)^2}{a + x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x + (a+x)\delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} + \frac{\delta x^2}{a + x \pm \delta x}$, cioè riducendo in serie questi rotti (273) e sommando le serie, $\delta u = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x}{(a+x)^2} + \ldots \frac{a^2 \delta x^2}{(a+x)^3} \mp \frac{a^2 \delta x^3}{(a+x)^4}$ ec.

829. Sia da differenziarsi $\sqrt{(a+x)} = u$; avremo $u + \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} - \sqrt{(a+x)}$: ma (161) $\sqrt{(a + x \pm \delta x)} = (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec.; dunque $\delta u = -(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} -$ ec. $= \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec. Del pari . . . . $\delta\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}\right) = \delta u = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\sqrt{(ax+x^2 \pm x\delta x)} - \sqrt{(ax+x^2 \pm a\delta x \pm x\delta x)}}{\sqrt{(x^2 \pm x\delta x)}}$, cioè riducendo in serie i tre radicali (161) e poi il rotto che ne risulta (273), $\delta u = \frac{\mp a\delta x}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots$ $\frac{(3a^2+4ax)\delta x^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3+12a^2x+8ax^2)\delta x^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.

830. Sia da differenziarsi $sen\,x$ e $cos\,x$. Supposto $x+\delta x = z$, $sen\,x + \delta(sen\,x) = sen\,z$ e $cos\,x + \delta(cos\,x) = cos\,z$, si avrà $\delta(sen\,x) = sen\,z - sen\,x =$ (620) $2\,sen\,\frac{1}{2}\delta x\,cos(x+\frac{1}{2}\delta x)$ e $\delta(cos\,x) = cos\,z - cos\,x =$ (620) $-2\,sen\,\frac{1}{2}\delta x\,sen(x+\frac{1}{2}\delta x)$. Si troverà nel modo stesso (620) $\delta(tang\,x) = \frac{sen\,\delta x}{cos\,x\,cos(x+\delta x)}$ e $\delta(cot\,x) = -\frac{sen\,\delta x}{sen\,x\,sen(x+\delta x)}$.

Anche in altro modo posson differenziarsi $sen\,x$ e $cos\,x$. Poichè fatto $sen\,x = u$, avremo $u+\delta u = sen(x\pm\delta x) = u'$, onde $u'-u = \delta u = sen(x\mp\delta x) - sen\,x$: ma (614) $sen(x\pm\delta x) = sen\,x\,cos\,\delta x \pm sen\,\delta x\,cos\,x$, e $sen\,\delta x = \delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} + \ldots \frac{\delta x^5}{2.3.4.5}$ ec., $cos\,\delta x = 1 - \frac{\delta x^2}{2} + \frac{\delta x^4}{2.3.4}$ ec. (628); dunque $\delta u = -sen\,x + sen\,x(1-\frac{\delta x^2}{2}+\text{ec.}) \pm cos\,x(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3}+\text{ec.}) = \pm\delta x\,cos\,x - \frac{\delta x^2\,sen\,x}{2} \mp \frac{\delta x^3\,cos\,x}{2.3} + \frac{\delta x^4\,sen\,x}{2.3.4} \pm$ ec. Del pari volendo la differenza di $cos\,x = u$, verrebbe $\delta u = cos(x\pm\delta x) - cos\,x = -cos\,x + cos\,x(1-\frac{\delta x^2}{2}$ ec.$) \mp sen\,x\,(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3}$ ec.$) = \mp\delta x\,sen\,x - \frac{1}{2}\delta x^2\,cos\,x \pm \frac{1}{2.3}\delta x^3\,sen\,x$ ec.

831. Sia da differenziarsi $lx = u$, intendendo per l il logaritmo naturale di x; avremo $u+\delta u = l(x\pm\delta x) = u'$ onde $u'-$

de $u' - u = \delta u = l(x \pm \delta x) - lx = l(1 \pm \frac{\delta x}{x}) = (303) \pm \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\delta x^3}{3x^3} -$ ec.

832. Vogliasi differenziare una quantità con esponente variabile o l'*esponenziale* $a^{mx} = u$; avremo $u + \delta u = \ldots a^{mx \pm m\delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = a^{mx \pm m\delta x} - a^{mx}$: ma (143) $a^{mx \pm m\delta x} = a^{mx} . a^{\pm m\delta x}$ ed $a^{\pm m\delta x} = 1 \pm m\delta x la + \frac{1}{2} m^2 \delta x^2 l^2 a \pm$ ec. (307); dunque $\delta u = - a^{mx} + a^{mx} (1 \pm m\delta x la + \frac{1}{2} m^2 \delta x^2 l^2 a \pm$ ec. $) = \pm m a^{mx} \delta x la + \frac{1}{2} m^2 a^{mx} \times \ldots \delta x^2 l^2 a \pm$ ec.

833. Con egual facilità si differenziano i prodotti di più variabili x, y ec. Ma si osservi che se x cresce mentre y scema, dovrà sostituirsi all' uno $x + \delta x$, all' altro $y - \delta y$; e se scemino ambedue nel tempo stesso, ad ambedue si sostituirà $x - \delta x$, $y - \delta y$ (821): noi supporremo che nel tempo stesso crescano ambedue. Voglia differenziarsi $xy = u$; avremo $u + \delta u = (x + \delta x)(y + \delta y) = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x \delta y = u'$, onde $u' - u = \delta u = x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y$. Così si troverà $\delta (ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + my^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ny + k) = (3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\delta x + (3ax + by + e)\delta x^2 + a\delta x^3 + (bx^2 + 2cxy + 3my^2 + fx + 2gy + n)\delta y + (cx + 3my + g)\delta y^2 + m\delta y^3 + (2bx + 2cy + f)\delta x \delta y + b\delta y \delta x^2 + c\delta x \delta y^2$. Così $\delta \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2 + y\delta y} = (273) \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} - \frac{(y^2 \delta x \delta y - xy\delta y^2)}{y^4}$ ec.

834. In fine vogliasi la differenza *seconda*, *terza* ec. di x^n supposta δx costante (822): la prima differenza è $nx^{n-1}\delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 + n . \frac{n-1}{2} .$

$\frac{n-2}{3}x^{n-3}\delta x^3$ ec. (827), e tutto si ridurrà a trovar le differenze di x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} ec. Ora 1°. $\delta(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}\delta x + (n-1)\frac{n-2}{2}x^{n-3}\delta x^2 + (n-1)\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}x^{n-4}\delta x^3$ ec. che si moltiplicherà per $n\delta x$: 2°. $\delta(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-3}\delta x + (n-2)\frac{n-3}{2}x^{n-4}\delta x^2$ ec. che si moltiplicherà per $n \times \frac{n-1}{2}\delta x^2$: 3°. $\delta(x^{n-3}) = (n-3)x^{n-4}\delta x$ ec. che si moltiplicherà per $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\delta x^3$ ec. Fatte l'operazioni, la differenza seconda sarà $n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}7x^{n-4}\delta x^4$ ec., e col metodo stesso si avrà la terza, la quarta ec.: così essendo $\delta(x^2) = 2x\delta x + \delta x^2$, sarà $\delta^2(x^2) = 2\delta x^2$; ma non prendendo costante δx, si troverà $\delta^2(x^2) = 2\delta x^2 + (2x + 4\delta x + \delta^2 x)\delta^2 x$. Nella medesima ipotesi di δx costante, si troverà che la differenza seconda di xy (ricordandosi che δy diviene $\delta y + \delta^2 y$) è $2\delta x\delta y + x\delta^2 y + 2\delta x\delta^2 y$.

835. Riguardo alle funzioni $\varphi(x)$, $f(x,y)$ ec. (821), poichè la differenza di qualunque funzione di x, di y ec. è come si è visto finora, una nuova funzione di x, di y ec. moltiplicata per δx, per δy ec., avremo $\delta[\varphi(x)] = \delta x\,\varphi'(x)$, $\delta[f(x,y)] = \delta(x,y)f'(x,y)$ ec.; del pari $\delta^2[\varphi(x)] = \delta x^2\varphi''(x)$ presa δx costante ec.

Prime Regole de' due Calcoli.

836. Una grandezza variabile G ha per *limite* un'altra grandezza L quando G o sempre crescendo o sempre scemando può accostarsi al valor di L in-

definitamente o ad arbitrio, senza poter mai eguagliarlo di fatto (512): così se G accostandosi ad Ω giunga a differirne della quantità ω, sarà $G = \Omega - \omega$, e tanto più si avvicinerà G al valor di Ω quanto più scemerà ω; cosicchè se divenisse $\omega = 0$, si avrebbe realmente $G = \Omega$; in tal caso Ω si chiama il limite di G.

Onde 1°. *per avere il limite d'una grandezza, bisogna fare zero la differenza tra essa e la grandezza a cui sempre si accosta*: 2°. accostandosi G alle grandezze L, A fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G = L - l$, e $G = A - \lambda$, onde $L - l = A - \lambda$, e fatto $l = 0$, $\lambda = 0$, saranno L, A due limiti di G, e verrà $L = A$, cioè *i limiti d'una stessa grandezza* G *sono eguali*: 3°. Se le grandezze G, Γ conservando tra loro la stessa invariabil ragione $m : n$, si accostino ad L, A fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G = L - l$, $\Gamma = A - \lambda$, ed $L - l : A - \lambda :: m : n :: G : \Gamma$, cioè *se* G, Γ *si accostino proporzionalmente ai limiti* L, A, *le grandezze e i limiti staranno tra loro nella stessa ragione*: 4°. *una grandezza* G *continuamente accostandosi al limite* L, *può riguardarsi* (*se basti una certa approssimazione*) *come eguale ad* L *quando è giunta allo stato che o immediatamente precede l'eguaglianza perfetta o ne è anche un poco più remoto*, conseguenza che talvolta ha luogo nelle stesse Scienze Matematiche, come nella somma delle serie convergenti (291): e ne ha poi moltissimo in tutte le scienze fisiche: 5°. poichè la grandezza G si può tanto accostare al limite L da giungere a differirne inassegnabilmente, *ciò che si dimostra di* G *sarà dimostrato anche di* L.

837. Ora il *Calcolo differenziale* è il metodo di trovare i limiti della relazione tra le differenze delle quantità variabili: il metodo inverso che consiste nel risalire da questi limiti alla relazione stessa delle quantità, si chiama *Calcolo integrale*. Alcuni esempi renderanno chiare queste nozioni.

1805. 22. Magg. G. M. Rè

FIG. 166. 838. Condotte nella curva AMm l' ordinate PM, pm, la corda mM prolungata in S, ed Mr parallela ad Ap, sia l' arco $AM = s$, $Mm'm = \delta s$, $AP = x$, $PM = y$, $Pp = Mr = \delta x$, $mr = \delta y$, onde $Mm = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$: è chiaro che $\frac{\delta s}{\delta x} > \frac{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}}{\delta x}$, e che quanto più m si accosta ad M, cioè quanto più scema δx, tanto meno differiranno tra loro quelle due ragioni; dunque la ragione $\frac{\delta s}{\delta x}$ è il limite dell' altra $\frac{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}}{\delta x}$ (836). Similmente condotta ad M la tangente MT, i triangoli simili MPS, mrM danno $\frac{MP}{PS} = \frac{mr}{rM} = \frac{\delta y}{\delta x}$; e poichè $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$, sarà $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$, e quanto più m si accosta ad M, tanto meno differiranno tra loro le due ragioni $\frac{MP}{PT}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$; dunque l'una è il limite dell' altra, e per determinar la prima basta trovare una nuova espressione del limite della seconda: così se AMm è un circolo dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ (478), presa la differenza (827) $2y\delta y + \delta y^2 = 2a\delta x - 2x\delta x - \delta x^2$, sarà $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2a - 2x - \delta x}{2y + \delta y}$, ove quanto più scemano δx, δy, tanto più la ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ si accosta a quella di $\frac{2a - 2x}{2y} = \frac{a - x}{y}$; dunque $\frac{a - x}{y}$ è il limite di $\frac{\delta y}{\delta x}$, dunque (836) $\frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT} = \frac{a - x}{y}$, e però $PT = \frac{y^2}{a - x}$, come già si sapeva (478).

839. Per convincersi poi che δy, δx anche divenendo zero, serban tra loro una ragione, sia $\delta y = a^2 - x^2$, $\delta x = a - x$, e si supponga $x = a$: in tal

caso si avrà $\delta y = 0$ e $\delta x = 0$; eppure intanto $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + x = 2a$. Similmente se nel triangolo PBE sia PB $= a$, BE $= b$, e sull' ascissa BI $=$ 45.
x si conduca l' ordinata IG $= y$ parallela a BE, si avrà PB (a): BE (b) :: PI $(a - x)$: IG (y), onde $ay = ab - bx$; e prese le differenze, osservando che l' una delle coordinate scema mentre l' altra cresce, sarà $\mp a\delta y = \mp b\delta x$, ovvero $a\delta y = b\delta x$, e però $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{b}{a}$, cioè le differenze $\delta y, \delta x$ anche annullandosi, come avviene in GI, conservan tra loro la ragion costante $b : a$ delle quantità primitive y, $a - x$ a cui appartengono. Tale è l' idea che bisogna farsi del calcolo differenziale.

840. Quanto all' integrale, egli è l' opposto del differenziale (837) ed ogni integrazione esige l' aggiunta d' una costante (825). Per dare anche di questo un' esempio, sia OD una linea retta o curva con due coordinate HC $= x$, CD $= y$ in angolo retto, e presa C$c = \delta x$, si conduca l' ordinata $cd = cr + rd = y + \delta y$; è chiaro (824) che lo spazio Cd sarà la differenza di qualunque spazio corrispondente HD, l'arco Dd di qualunque arco corrispondente OD, la superficie descritta da Dd della descritta da OD nella rivoluzion della figura sull' asse HC, il solido generato da Cd del solido generato da HD ec.; cosicchè sommate secondo il bisogno queste differenze, il calcolo integrale determinerà la quadratura degli spazj, la lunghezza delle linee e la dimensione delle superficie curve, la cubatura dei solidi ec.

841. Supposta dunque per ora OD una retta, sia PH $= a$ e la normale HO $= b$; avremo perciò $a : b :: a + x : y = \frac{b(a + x)}{a}$, onde differenziando, $\delta y = \frac{b\delta x}{a}$, e lo spazio differenziale Cd = Cr + Drd $= \delta x \times$

45 $y + \frac{\delta x \times \delta y}{2} = \frac{b}{a}(a\delta x + x\delta x + \frac{\delta x^2}{2})$; quindi per aver la quadratura di uno spazio corrispondente HD o PCD, bisogna integrar quest' ultima equazione: ma $\sigma a\delta x = ax$ e $\sigma \cdot (x\delta x + \frac{\delta x^2}{2}) = \frac{1}{2}x^2$ (827); dunque l'integrale completo con l'aggiunta della costante sarà $\sigma(Cd) = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) + C$. Ora come l' area del trapezio HD è diversa da quella del triangolo PCD, così la costante C avrà nei due casi un diverso valore: infatti il trapezio è nullo quando l' ascissa è ridotta al punto H, cioè quando $x = 0$; ma il triangolo è nullo quando l' ascissa è ridotta al punto P, cioè quando $x + a = 0$ ovvero $x = -a$; dunque supposti nulli i due spazj e sostituito nell' integrale il doppio valore di x, verrà 1° $0 = 0 + C$, e però $C = 0$; 2°. $0 = -b(a - \frac{1}{2}a) + C$, e però $C = \frac{ab}{2}$; onde $\sigma(Cd) = HD = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}(b + y)$, come ben si sapeva (517) e $\sigma(Cd) = PCD = \frac{bx}{a}(a + \frac{x}{2}) + \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}y(a + x)$, come pure si sapeva (515). Tale è l' idea che bisogna farsi del calcolo integrale.

842. Ciò supposto, si è convenuto di esprimere con $\frac{dy}{dx}$ il limite della relazione o ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ tra le differenze prime delle variabili y, x: con $\frac{d^2y}{d^2x}$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$ i limiti delle ragioni $\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x}$ o $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ tra le lor differenze seconde ec.; e i termini dy, dx del limite $\frac{dy}{dx}$ si son chiamati *differenziali del prim' ordine*, i termini d^2y, d^2x, dx^2 dei limiti $\frac{d^2y}{d^2x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *differenziali del second' ordine* ec.;

onde *differenziar le quantità* significa ora cercare il limite della ragione tra le lor differenze; e dicesi *quantità* ed *equazione differenziale* quella che nasce dalla *differenziazione*. All' incontro il carattere o segno $\int$ posto avanti ad una differenziale, indica *somma* o *integrazione*. Del resto molti Geometri a cui piace di abbracciare sotto il comun nome di *Calcolo Infinitesimale* i due Calcoli di cui trattiamo, concepiscono una variabile aumentata o diminuita d' una quantità infinitamente piccola dy o dx, e chiamano dy, dx *infinitamente piccoli* o *infinitesimi del prim' ordine*, d^2y, d^2x, dx^2 *infinitesimi del secondo* ec., riguardando intanto l' integrazione come il ritorno dagli infinitesimi ai finiti. Altri danno a dy, d^2y, d^3y ec. il nome di *flussioni del primo*, *secondo*, *terzo* ec. *ordine*, e chiamano *fluenti* le quantità che si ritrovano col calcolo integrale. Queste idee ed espressioni, benchè poco esatte, sono assai comuni, e noi non lasceremo di farne uso dopo aver derivate dai fondamenti già stabiliti le prime regole dei due calcoli, nelle quali supporremo tutte le variabili crescenti, giacchè in caso diverso si sa come bisogna condursi (833).

843. Abbiam veduto (836) che il limite d' una ragione si ottiene col fare zero la differenza tra essa e quella a cui sempre si accosta. Dunque 1°. per differenziar $b^2 + ax = u$, si avrà $\delta u = a\delta x$ (826), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = a$, ove non essendo differenza alcuna, sarà a il limite di $\frac{\delta u}{\delta x}$, e però anche $\frac{du}{dx} = a$, e $du = adx$. Quindi per differenziare $a^2 + bx + cy - fz = u$, sarà (826) $\frac{\delta u}{\delta x} = b + \frac{c\delta y}{\delta x} - \frac{f\delta z}{\delta x}$: ma $\frac{\delta u}{\delta x}$ divenendo $\frac{du}{dx}$, anche $\frac{\delta y}{\delta x}$ e $\frac{\delta z}{\delta x}$ debbon divenire $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$; dunque $\frac{du}{dx} = b + \frac{cdy}{dx} -$

$\frac{fdz}{dx}$, e però $du = bdx + cdy - fdz$, cioè *le variabili al primo grado si differenziano come nel calcolo delle differenze finite, sostituendo ad esse le lor differenziali e scancellando le costanti se vi sono.*

844. Dunque II°. per differenziare $x^n = u$, avremo prima $\delta u = nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2$ ec. (827), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = nx^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x$ ec., e poi fatta $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$ e $du = nx^{n-1}dx$ cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone l' esponente d' un' unità e moltiplicandola per il prodotto dell' esponente primitivo nella sua differenziale*; così $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ ec.

845. Da ciò si raccoglie che $d[\sqrt{(a+x)}] = d(a+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}}$, come può dedursi anche dalla dottrina dei limiti (829); $d[\sqrt{(ay+y^2)}] = d(ay + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+2y)dy}{2\sqrt{(ay+y^2)}}$, e in generale $d[\sqrt[m]{(ax+x^2)}] = \frac{(a+2x)dx}{m\sqrt[m]{(ax+x^2)}^{m-1}}$, cioè *si differenzia un radicale del grado* m *dividendo la differenziale della quantità sotto al segno per il prodotto dell' esponente* m *nella radice* m *di questa quantità alzata alla potenza* m − 1.

846. Dunque III°. per differenziare $xy = u$, si avrà prima $\delta u = x\delta y + y\delta x + \delta y\delta x$ (833), onde $\frac{\delta u - x\delta y}{\delta x} = y + \delta y$, e poi fatto $\delta y = 0$, verrà $\frac{du - xdy}{dx} = y$, e $du = xdy + ydx$, cioè *si differenzia un prodotto di variabili sommando i prodotti della differenziale di*

ciascuna variabile per tutte l' altre: così $d(z\varphi\omega) = \varphi\omega dz + z\omega d\varphi + z\varphi d\omega$; $d(x^3 y) = 3yx^2 dx + x^3 dy$, ec.

847. Dal che segue che volendo differenziare $\frac{x}{y} = u$, si avrà $x = uy$, $dx = \frac{xdy}{y} + ydu$ e $du = \ldots$ $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ (833) cioè *si differenzia un rotto prendendo il prodotto del denominatore per la differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per la differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore*: così $d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}$; $d\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = \frac{(2ax+x^2)dx}{(a+x)^2}$; $d\sqrt{\frac{a+x}{x}} = \frac{-adx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}}$, come risulta ancora dalla consueta dottrina dei limiti (828.829) ec.

848. Dunque IV. per differenziar $sen\, x$ e $cos\, x$, fatto nelle formule (830) δx infinitesimo, svanirà δx in confronto di x e $sen\, \delta x$ si confonderà con l' arco (629); dunque $d(sen\, x) = dx \cos x$, e $d(\cos x) = - dx\, sen\, x$, cioè *si differenzia il seno o coseno d' un arco moltiplicando la differenziale dell' arco positiva o negativa nel suo coseno o seno respettivamente*.

Parimente posto $sen\, x = u$, verrà prima (830) $\delta u = \delta x \times \cos x - \frac{\delta x^2\, sen\, x}{2}$ ec. onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos x - \frac{\delta x\, sen\, x}{2}$ ec. e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \cos x$ e $du = d(sen\, x) = dx \cos x$; e $d(\cos x) = - dx\, sen\, x$ (830). Così $d(sen^m x) = m\, sen^{m-1} x dx \cos x$; $d(sen\, mx) = mdx \cos mx$; $d(\cos mx) = - mdx\, sen\, mx$; $d(sen\, x \times \cos x) = dx \cos^2 x - dx\, sen^2 x = dx \cos 2x$ (621); $d\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}} = d(\cos \frac{1}{2} x)$ (622) $= - \frac{1}{2} dx\, sen \frac{1}{2} x$, $d[\sqrt{(a^2 - b\, sen\, x)}] = d(a^2 - b\, sen\, x)^{\frac{1}{2}} = \frac{-bdx \cos x}{2\sqrt{(a^2 - b\, sen\, x)}}$ ec.: e si osservi che se il raggio non fosse 1 ma a, avrebbe sempre luogo la regola data altrove (609).

849. Dal che si ha 1°. $d(tang\,x) = d\frac{sen\,x}{cos\,x} = (847)$ $\frac{dx\,cos^2x + dx\,sen^2x}{cos^2x} = (610)\frac{dx}{cos^2x}$: 2°. $d(cot\,x) = d\frac{1}{tang\,x} = \frac{-dx}{cos^2x\,.\,tang^2x} = (610)\frac{-dx}{sen^2x}$: 3°. $d(sec\,x) = d\left(\frac{1}{cos\,x}\right) = \ldots$ $\frac{dx\,tang\,x}{cos\,x}$: 4°. $d(cosec\,x) = d\left(\frac{1}{sen\,x}\right) = \frac{-dx\,cot\,x}{sen\,x}$: 5°. $d(sen.v.x) = d(1 - cos\,x) = dx\,sen\,x$: 6°. $d(cos\,v.\,x) = d(1 - sen\,x) = -dx\,cos\,x$.

850. Onde se x è un arco qualunque e p il suo seno o coseno o tangente ec., sarà 1°. $dx = d$ (*arco il cui seno è* p) $= \frac{d(sen\,x)}{cos\,x} = \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 2°. $dx = d(arc.\,cos\,p) = \ldots$ $\frac{-d(cos\,x)}{sen\,x} = \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 3°. $dx = d(arc.\,tang\,p) = cos^2x\,.\,d(tang\,x) = \frac{d(tang\,x)}{1+tang^2x} = \frac{dp}{1+p^2}$: 4°. $dx = d(arc.\,cot\,p) = -sen^2x\,.\,d(cot\,x) = \frac{-d(cot\,x)}{1+cot^2x} = \frac{-dp}{1+p^2}$: 5°. $dx = d(arc.\,sec\,p) = \frac{cos\,x\,.\,d(sec\,x)}{tang\,x} = \frac{d(sec\,x)}{sec\,x\sqrt{(sec^2x-1)}} = \frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 6°. $dx = d(arc.\,cosec\,p) = -\frac{sen\,x\,.\,d(cosec\,x)}{cot\,x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{-d(cosec\,x)}{cosec\,x\sqrt{(cosec^2x-1)}} = \frac{-dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 7°. $dx = d(arc.\,sen\,v.\,p) = \frac{d(sen\,v.\,x)}{sen\,x} = \frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$: 8°. $dx = d(arc\,cos\,v.\,p) = \ldots$ $\frac{-d(cos\,v.\,x)}{cos\,x} = \frac{-dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$.

851. Dunque V°. per differenziare $lx = u$, si avrà prima (831) $\delta u = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\delta x}{2x^2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, e $du = d(lx) = \frac{dx}{x}$, cioè *si differenzia il logaritmo d' una variabile dividendo per essa la*

sua differenziale; e poichè si ha $dx = xd(lx)$, è chiaro che *la differenziale d' una quantità* x *è il prodotto di essa nella differenziale del suo logaritmo*, il che dà un nuovo metodo di differenziare. Si noti ancora che per un sistema del modulo m, si avrebbe $d(lx) = \frac{mdx}{x}$; ma noi parleremo dei soli logaritmi naturali il cui modulo è 1: così $d(lx^n) = d(nlx) = \frac{ndx}{x}$; $d(lxy) = \frac{ydx + xdy}{xy}$; $d\left(l\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$, $d[l(a^2 - x^2)] = \frac{-2xdx}{a^2 - x^2}$; $d\left(l\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2adx}{a^2 - x^2}$; $d[l\sqrt[m]{(a + bx^n)^r}] = \frac{r}{m}d[l(a + bx^n)] = \frac{bnrx^{n-1}dx}{m(a + bx^n)}$; $d\left(l\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right) = (847)\,\frac{dx}{x(1+x^2)}$; $d(\cos lx) = (848) - dlx\,\text{sen}\,lx = -\frac{dx}{x}\text{sen}\,lx$ ec. Del pari volendo differenziar potenze di logaritmi, si troverebbe $d(l^m x) = (846)\,ml^{m-1}x \cdot \frac{dx}{x}$; $d(x^m l^n x) = (844)\,mx^{m-1}dx\,l^n x + nx^{m-1}dx\,l^{n-1}x = x^{m-1}dx\,l^{n-1}x \times (n + mlx)$: e per differenziare un logaritmo di logaritmo come $llx = u$, si farà $lx = t$ e sarà $llx = lt = u$, onde $dx = \frac{dt}{t} = \frac{d(lx)}{lx} = \frac{dx}{xlx}$.

852. Dunque VI°. per differenziare $a^{mx} = u$, si avrà prima (832) $\delta u = ma^{mx}\delta x la + \frac{m^2 a^{mx}\delta x^2 l^2 a}{2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = ma^{mx}la + \frac{m^2 a^{mx}\delta x l^2 a}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = ma^{mx}la$ e $du = ma^{mx}dxla$: onde se sia $1 = l2{,}7182818$ (308) $= le$, cioè se si chiami e il numero il cui logaritmo naturale è 1, sarà $d(e^x) = e^x dxle = e^x dx$; $d(e^{-mx}) = -me^{-mx}dx$; e $d(e^{lx}) = dx$ (308). Del pari $d(x^y) = (851)\,x^y d(ylx) = x^y(dylx + \frac{ydx}{x})$; e per differenziare *gli esponenziali di se-*

cond' ordine, come $x^{y^z} = u$, si farà $y^z = t$ e sarà $x^{y^z} = x^t = u$, onde $x^t d(tlx) = x^{y^z} d(y^z lx) = x^{y^z} \left[y^z \left(dzlylx + \frac{zdylx}{y} \right) + \frac{y^z dx}{x} \right] = x^{y^z} y^z \left(dzlxly + \frac{zdylx}{y} + \frac{dx}{x} \right)$; se $x = y = e$, sarà $d(e^{e^z}) = e^{e^z} e^z dz$.

853 Dunque VII°. la differenziale prima delle funzioni $\varphi(x)$, $f(x, y)$, $F(ay + x^2)$ ec. sarà $dx\varphi'(x)$, $d(x, y) f'(x, y)$, $(ady + 2xdx) F'(ay + x^2)$, ec.: e la seconda, prendendo costante dx, sarà $dx^2 \varphi''(x)$ ec. (835).

854. Dunque VIII°. per differenziar la seconda volta $x^n = u$, o per trovarne, presa dx costante, la differenziale seconda, si avrà primieramente (834) $\delta^2 u = n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3$ ec. onde $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{d^2 u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ e $d^2 u = n(n-1)x^{n-2}dx^2$: così $d^2(x^2) = 2dx^2$; $d^2(x^3) = 6xdx^2$ ec. Ma se dx non sia costante, siccome $d(x^2) = 2xdx$ (844) avremo $d^2(x^2) = d(2xdx) =$ (846) $2dx^2 + 2xd^2x$: in generale, poichè $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, sarà $d^2(x^n) = d(nx^{n-1}dx) = n(n-1)x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x$. Similmente essendo $d(xy) = xdy + ydx$, sarà $d^2(xy) = xd^2y + 2dxdy + yd^2x$; $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = dx + \frac{yd^2x}{dy} - \frac{ydxd^2y}{dy^2}$; e in generale, supposto $Y = ax^m y^n + bx^p y^q +$ ec., $dY = Pdx + Qdy = (amy^n x^{m-1} + bpy^q x^{p-1} +$ ec.$) dx + (anx^m y^{n-1} + bqx^p y^{q-1} +$ ec.$) dy$, onde $P = amy^n x^{m-1} + \ldots bpy^q x^{p-1} +$ ec., e $Q = anx^m y^{n-1} + bqx^p y^{q-1} +$

ec., sarà $dP = [am(m-1)y^n x^{m-2} + bp(p-1)y^q x^{p-2} +$ ec.$]\,dx + (amnx^{m-1}y^{n-1} + bpqx^{p-1} \times y^{q-1} +$ ec.$)\,dy$, e $dQ = (anmy^{n-1}x^{m-1} + bpqy^{q-1} \times x^{p-1} +$ ec.$)\,dx + [an(n-1)x^m y^{n-2} + bq(q-1)x^p y^{q-2} +$ ec.$]\,dy$; d' onde è facile di avere il valor di $d^2Y = dPdx + Pd^2x + dQdy + Qd^2y$, e si vede frattanto che il coefficiente di dy in dP è sempre lo stesso del coefficiente di dx in dQ. Prendendo costante dx o dy, vanno a zero i termini ove è d^2x o d^2y: e col metodo istesso si hanno le differenziali terze ec.

855. Da quanto si è detto facilmente si comprenderanno le prime regole del calcolo integrale: così $\int a dx = ax + C$ (843); $\int nx^{n-1}dx = x^n + C$ (844), e quindi $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C$; dunque fatto $n - 1 = m$, sarà $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, cioè *si integra una differenziale monomia accrescendo d' un' unità l' esponente della variabile, e dividendola per la sua differenziale moltiplicata nell' esponente accresciuto*: così $\int \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}} = \int \frac{dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{dx(a+x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2} dx} = \sqrt{(a+x)} + C$ (845) ec.

856. Nel caso però di $m = -1$ la regola non ha luogo, ma allora $x^m dx = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$, e si sa che $\int \frac{dx}{x} = lx + C$ (851): ciò si avverta per sempre.

857. Talora si integra più facilmente per mezzo d' una sostituzione: così volendo $a\int x^{n-1}dx\,(b +$

$x^n)^m$, fatto $b + x^n = z$ e però $nx^{n-1}\,dx = dz$ ed $x^{n-1}\,dx = \frac{dz}{n}$, verrà $a\int \frac{z^m\,dz}{n} = \frac{az^{m+1}}{n(m+1)} = \ldots$ $\frac{a(b+x^n)^{m+1}}{n(m+1)} + C$ ec. Bisogna però preparar, se occorra, tali sostituzioni: così $dx\sqrt{(a^2x^2+x^4)}$ e $(3ax^3+4x^4)\,dx\sqrt{(ax+x^2)}$ si ridurranno prima a $x\,dx\sqrt{(a^2+x^2)}$ e a $(3ax^2+4x^3)\,dx\sqrt{(ax^3+x^4)}$, e poi fatto $\sqrt{(a^2+x^2)} = z$ e $\sqrt{(ax^3+x^4)} = z$, si integrerà facilmente.

858. In generale $\int x^n dx\,(a+bx^m)^r$ può aversi in tre casi: I°. se r è numero intero e positivo; poichè sviluppando la differenziale e integrandone ciascun termine, si ha $\int (a^r x^n dx + ra^{r-1} bx^{m+n} dx + \text{ec.}) = C + \frac{a^r x^{n+1}}{n+1} + \frac{ra^{r-1} bx^{m+n+1}}{m+n+1} +$ ec., espressione finita nel nostro caso (156). II°. se $n = m(c+1) - 1$, essendo c zero o intero; poichè fatto $a + bx^m = z$, $x^m = \frac{z-a}{b}$, $x^{m-1}dx = \frac{dz}{mb}$, $x^{mc+m-1}dx = \frac{(z-a)^c\,dz}{mb^{c+1}}$, verrà $\int x^n dx\,(a+bx^m)^r = \frac{1}{mb^{c+1}} \int z^r dz\,(z-a)^c$, che sviluppato s' integrerà (I°.). III°. se $n = -m(c+r) - 1$, cioè $n + mr = -mc - 1$, essendo c intero; poichè $x^n dx\,(a + bx^m)^r = x^n x^{mr} dx \left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r = x^{n+mr}\,\times$ $dx\,(b + ax^{-m})^r$, e fatto $b + ax^{-m} = z$, $x^{-m} = \frac{z-b}{a}$, $x^{-m-1}dx = \frac{dz}{-ma}$, $x^{-1}dx = \frac{dz}{-m(z-b)}$, verrà

$\int x^{n+mr} dx (b + ax^{-m})^r = \frac{-1}{ma^c}\int z^r dz (z-b)^{c-1}$: così $\int x^{-2} dx (a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$ dà $n = -2$, $b = 1$, $m = 3$, $r = \frac{-5}{3}$, $n + mr = -7 = -3c - 1$, onde $c = 2$; quindi $\frac{-1}{3a^2}\int (z^{-\frac{2}{3}} dz - z^{-\frac{5}{3}} dz) = \frac{2z+1}{-2a^2 z^{\frac{2}{3}}} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{3x^3+2a}{-2a^2 x \sqrt[3]{(a+x^3)^2}}$.

859. Infine è manifesto che $\int dx \cos x = sen\, x + C$; $\int dx\, sen\, x = -\cos x + C$ (848) ec.

860. Egualmente $\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}} = arc.\, sen\, p + C$ (850) ec., $\int \frac{dx l^n x}{x} = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C$; $\int \frac{dx}{xlx} = llx + C$; $\int \frac{dx}{xlxllx} = lllx + C$ (851) ec.; come pure $\int a^x dxla = a^x + C$; $\int x^y (dylx + \frac{ydx}{x}) = x^y + C$ (852) ec.; e parimente $\int dx\, \varphi'(x) = \varphi(x)$; $\int d(x,y) f'(x,y) = f(x,y)$ ec. (853). Tra poco daremo altre regole del calcolo integrale.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Tangenti.

861. Dei problemi da sciogliersi sopra una curva, il più semplice è di condurre una tangente a un punto della medesima. Ora abbiamo già trovato che se sia AP $= x$, 167.

167. PM $= y$, AM $= s$, le ragioni $\frac{y}{PT}$ e $\frac{ds}{dx}$ sono i limiti di $\frac{\delta y}{\delta x}$ e di $\frac{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}}{\delta x}$ (838); dunque $\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$ (842), e la *suttangente* $PT = \frac{ydx}{dy}$; l' elemento della curva AMm o l'*arco infinitesimo* Mm $= \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; la *tangente* $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{yds}{dy} = t$; la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{ydy}{dx}$; la *normale* $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{yds}{dx} = n$; e se per A si conduca AQ parallela a MP, si avrà $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx}{dy} - x\,(= AT) :: y : AQ = y - \frac{xdy}{dx}$. Con ciò si trovano i valori di queste varie linee in ciascuna curva, ricavando dalla sua equazion differenziata il valor di ciascuna formula differenziale, e per avere gli *asintoti* facendo x infinita in AT, AQ. Ecco gli esempj.

862. I. L' equazione al circolo è $y^2 = a^2 - x^2$; dunque $ydy = -xdx$, e $\frac{ydx}{dy} = -\frac{y^2}{x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x} = PT$ (il segno $-$ indica che la suttangente dev' esser presa nel senso stesso dell' ascissa, perchè nella costruzion della formula si è presa in senso contrario, e dall' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si è avuto un risultato positivo (838)): la sunnormale $\frac{ydy}{dx} = -x$; la normale $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})} = \sqrt{(y^2 + x^2)} = a =$ al raggio, come dev' essere; l' arco Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{y} = -\frac{ady}{x}$.

II. Nella parabola, $y^2 = px$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$, e $\frac{ydx}{dy} = 2x$.

III. Nell' ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; dunque $ydy = \frac{b^2}{a^2}(-xdx)$, $\frac{ydy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2}$, ed $\frac{ydx}{dy} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

IV.

FIG. 167.

IV. Nell' iperbola, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$, e $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$. Si ha ancora AT $= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ax}{a + x}$, espressione $= a$ quando x è infinita; come AQ $= y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{b^2x}{a^2y}(a + x) = \frac{b^2x}{ay} = \sqrt{\frac{b^2x}{2a + x}}$, si riduce a $\pm b$. Questi valori di AT, AQ danno gli asintoti (772).

V. Nella logaritmica, $x = A\,log\,y$ (788) e $dx = \frac{Ady}{y}$, onde $\frac{ydx}{dy} = A$, e però *la suttangente eguaglia il modulo*.

863. VI. Sia $y^m = x^n a^{m-n}$; si avrà $nlx + (m-n)la = mly$, onde (851) $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, e la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{mx}{n}$. Tutte le curve rappresentate dall' equazion generale $y^m = x^n \times a^{m-n}$ si chiaman parabole quando m, n son positive: se $m = 2$, $n = 1$, si ha $y^2 = ax$, equazione alla parabola ordinaria; se $m = 3$, $n = 1$, si ha $y^3 = a^2x$, equazione alla *prima parabola cubica*; se $m = 3$, $n = 2$, si ha $y^3 = ax^2$, equazione alla *seconda parabola cubica* ec. Che se n è negativa, le parabole divengono iperbole la cui equazione è $y^m = x^{-n} a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, cioè $x^n y^m = a^{m+n}$; onde la suttangente di queste curve è in generale $-\frac{mx}{n}$, cioè dee prendersi nel senso stesso delle x. Se $m = n = 1$, si ha l'iperbola ordinaria la cui suttangente $= -x$ (776).

VII. Nella quadratrice, prese l' ascisse dal centro e condotte mp infinitamente vicina ad MP, ed mr, BV parallele ad MO, si ha $mr\,(dx) : rM\,(-dy) :: MO\,(x) : OT = -\frac{xdy}{dx}$; e poichè (793) $y = x \cot cx$ e $dy = dx \cot cx - \frac{cxdx}{sen^2 cx}$, viene $y + OT = CT = \frac{cx^2}{sen^2 cx}$: ora VB ($sen\,cx$): 142.

142. $BC(1)::OM(x):MC = \frac{x}{sen\,cx}$; dunque $CT = c\,.\,CM^2 = \frac{CM^2}{CD}$ (793).

138. VIII. Sia la curva aQ a doppia curvatura: poichè in essa x è s, ed y è z (802), $\frac{ydx}{dy}$ diverrà $\frac{zds}{dz} = \frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2 = px, z^2 = qy$, verrà $z = \sqrt[4]{pq^2x}$ (802), $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}, dz = \frac{qdy}{2\sqrt{qy}} = \frac{pqdx}{4\sqrt[4]{p^3q^2x^3}}, \frac{z}{dz} = \frac{4x}{dx}$ e $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}$; dunque la suttangente $\frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 4x\sqrt{\frac{4x+p}{4x}} = 2\sqrt{(4x^2 + px)}$.

141. 864. Siano due curve BIOC, BMA tali che prolungando l' ordinate OP della prima fino alla seconda, la retta MO sia una funzione qualunque dell' arco BIO, e debba condursi la tangente MT. Immagino l' ordinata mp infinitamente vicina, ad MP, ed Mr parallela alla tangente TO: fatto BIO $= z$, MO $= u$, sarà (842) $mr = du$, $rM = Oo = dz$, e $du : dz :: u : OT = \frac{udz}{du}$, che determina il punto T.

Sia per esempio $u = \frac{bz}{a}$, sarà $du = \frac{bdz}{a}$, ed $OT = \frac{udz}{du} = z =$ BIO. Se BIOC è un arco di circolo, AMB è una cicloide, che se sia ordinaria, ha una costruzione più semplice; poichè essendo MO = BIO = OT, si ha l' angolo TOP = 2BOP (418.419) = 2TMO (425), onde BOP = TMO, ed MT parallela alla corda OB, è tangente in M.

143. 865. Con un raggio CA descritto un circolo, sia una curva CKM tale che condotto il raggio CMN, la linea CM sia una funzione dell' arco ADBN; condurre una tangente MT al dato punto M. Immagino due raggi infinitamente vicini CMN, Cmn, e il piccolo arco Mr descritto dal centro C col raggio CM, e conduco CT perpendicolare a CM Sia ora CM $= y$, ADBN $= x$, CA $= a$, e si avrà $a : y :: Nn\,(dx) : Mr = \frac{ydx}{a}$, ed $rm\,(dy) : \frac{ydx}{a} :: y : CT = \cdot\cdot$

 FIG.

$\frac{y^2dx}{ady}$. Sia per esempio $y=\frac{ax}{\pi}$, la curva CKM sarà la spirale d' Archimede, e si avrà $\frac{dx}{dy}=\frac{\pi}{a}$, $CT=\frac{y^2\pi}{a^2}=\frac{xy}{a}=$ OEQM. 143.

Sia la spirale iperbolica, in cui $xy=ab$; si avrà $xdy+ydx=0$, $ydx=-xdy$, $CT=-\frac{xydy}{ady}=-\frac{xy}{a}=-b$. 145.

866. Nella spirale logaritmica, ove l' angolo CMT è costante, immagino i raggi infinitamente vicini CM, Cm, e 146.
descritto dal centro C con un raggio CN un circolo, faccio $CM=y$, $CN=a$, e segnato sulla circonferenza del circolo un punto fisso A, suppongo l' ascissa $AN=x$, il che mi dà $a:dx::y:Mr=\frac{ydx}{a}$. Sia $tang\,Mmr=t=\frac{sen\,Mmr}{cos\,Mmr}=\frac{Mr}{mr}=\frac{ydx}{ady}$ onde $\frac{dx}{at}=\frac{dy}{y}=d(ly)$ (851): dunque $ly=\frac{x}{at}+C$. Ora quest' equazione fa vedere 1°. che la spirale fa un' infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene quanto per allontanarsene; poichè in luogo di x può sostituirsi successivamente $x+\pi$, $x+2\pi$, $x+3\pi$ ec., $-\pi+x$, $-2\pi+x$ ec., essendo π la circonferenza ANB: 2°. che facendo $C=lC'$, si avrà $l\frac{y}{C'}=\frac{x}{at}=\frac{x}{at}le$ (852) ovvero $\frac{y}{C'}=e^{\frac{x}{at}}$ ed $y=C'e^{\frac{x}{at}}$; dunque nel punto A ove $x=0$, si ha $CD=y=C'$: 3°. che l' ascisse AN crescendo in progressione aritmetica $x, 2x, 3x$ ec., l' ordinate formano la progressione geometrica $C'e^{\frac{x}{at}}$, $C'e^{\frac{2x}{at}}$, $C'e^{\frac{3x}{at}}$ ec.: 4°. che se $t=\infty$, si ha $y=C'$, proprietà del circolo che taglia ad angoli retti tutti i suoi raggi come si sa.

Evolute.

867. Se un filo ABC applicato sopra una curva BC, nella cui origine B è la tangente AB, si sviluppi tenendolo 168.
sempre egualmente teso, la sua estremità A descriverà una

168. curva AM in cui 1°. MC sarà eguale ad AB + l' arco BC: 2°. l' arco infinitesimo *Mm* potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto dal centro C col raggio CM: 3°. onde nel punto C si riuniranno le due normali infinitamente vicine MN, *mn*: e 4°. la tangente MC della curva BC sarà sempre normale alla curva AM. Ora la curva BC dicesi l' *Evoluta* della curva AM, ed MC è il *Raggio Osculatore* o *di Curvatura*, che si tratta di determinare, supposta nota la curva AM.

868. Sieno MP, *mp* due perpendicolari all' asse AQ infinitamente vicine, e CO, *Mr* parallele allo stesso asse: fatta $MO = u$, $AP = x$, $PM = y$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, e $dxddx + dyddy = dsdds$, sarà (435) $dx : ds :: u : MC = \frac{uds}{dx}$: ma mentre AP, PM, MO variano, MC non varia (867); dunque differenziando $MC = \frac{uds}{dx}$, verrà $o = \ldots \frac{(udds + dsdu)\,dx - udsddx}{dx^2}$; e poichè $du = mr = dy$, si troverà $u = \frac{dsdxdy}{dsddx - dxdds}$ onde $MC = \frac{ds^2 dy}{dsddx - dxdds} = \ldots \frac{ds^3 dy}{ds^2 ddx - dx(dxddx + dyddy)} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} = \ldots \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Supposta costante ds, si ha $MC = \frac{dsdy}{ddx} = \ldots \frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$: supposta costante dy, si ha $MC = \ldots \frac{ds^3}{dyddx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$; ma supposta, come si fa d' ordinario, costante dx, viene $MC = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, cioè dividendo tutto per dx^3, $MC = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{-ddy}{dx^2}$.

869. Per sapere in qual punto abbia una curva AM la massima curvatura, si cerca il *minimo* raggio dell' evoluta, giacchè le curvature dei circoli sono in ragione inversa dei

raggi (509). Inoltre se la tangente in A è normale all'asse, si determina la retta BA o la distanza del vertice A dall'origine B dell'evoluta con fare $x = 0$ nell'espressione del raggio MC. Finalmente per trovar l'equazione dell'evoluta, conduco CQ perpendicolare all'asse, e se $AB = a$, $BQ = t$, $CQ = z$, ho primieramente, presa dx costante, $MO = u = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ (868) e $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$; poi $Mr\ (dx) : rm\ (dy) :: MO : CO = PQ = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$, ed $AP + PQ - AB = t = x - a + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$: valori che coll'equazion della curva AM danno l'equazion dell'evoluta. FIG. 168.

870. Fin quì le ordinate eran parallele fra loro. Se partono da un punto medesimo, immagino le infinitamente vicine BM, Bm, e le CO, Co perpendicolari ad esse: quindi descritto col centro B l'arco Mr, sia $BM = y$, $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $MO = u$; per i triangoli simili Mrm, CMO (435), si ha $dx : u :: dy : CO \left(= \frac{udy}{dx}\right) :: ds : MC = \frac{uds}{dx}$. Differenziando, presa dx costante, si avrà $d(MC) = 0$ (868) e $du = -\frac{udds}{ds}$; di più $OQ = -d(CO)$ (833) $= \frac{-dudy - uddy}{dx} = \frac{-uddy}{dx} + \frac{udydds}{dxds} = -\frac{udxddy}{ds^2}$ (868), e $BM\ (y) : Mr\ (dx) :: BO\ (y - u) : \frac{-udxddy}{ds^2}$; onde $u = \ldots \frac{yds^2}{ds^2 - yddy}$, ed $MC = \frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 169.

$$\frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy} = y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2},$$

che si riduce a $\frac{ds^3}{-dxddy}$ quando $y = \infty$ (poichè allora ds^2dx diventa 0) cioè quando l'ordinate son parallele, come già abbiamo trovato. E se nei valori di CO, MC non si fosse

169. presa dx costante, si sarebbe avuto MC = ... $\frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy + ydyddx}$. Ecco alcuni esempj.

871. Sia l' equazion generale alle sezioni conichè $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$ (745). Differenziando due volte, presa dx costante, si ha $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$ e $2yddy + 2dy^2 = \pm \frac{pdx^2}{a}$, onde $dy = \frac{pdx(a \pm x)}{2ay}$, e $ddy = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$, sostituiti i valori di dy e poi di y^2; dunque MC $\left(= \frac{ds^3}{-dxddy}\right) = \frac{4y^3ds^3}{p^2dx^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{(dx^2 + \frac{p^2dx^2(a \pm x)^2}{4a^2y^2})^3} = \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{(4a^2y^2 + p^2(a \pm x)^2)^3} = (861)\ \frac{4n^3}{p^2} = (751 . 739.)\ \frac{pz^3}{2q^3}$ in tutte le sezioni coniche.

872. Poichè in queste la tangente nel vertice è normale all' asse, se in MC si faccia $x = 0$ e perciò in forza dell' equazion generale, $y = 0$, sarà AB $= \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{p^6a^6} = \frac{p}{2}$ (862).

Nel circolo ove $p = 2a = 2n$ (410), si ha MC $= n = \frac{p}{2} = a =$ AB; onde i raggi osculatori son tutti eguali al raggio del circolo che ha dunque per evoluta il suo centro.

170. Nell' ellisse l' evoluta ha quattro rami BD, Db, bd, dB eguali, con quattro punti d' inflessione. Se in MC si faccia $x = a$, verrà ED $= \frac{a}{p}\sqrt{2ap}$, metà del parametro dell' asse minore (755).

171. Nella parabola, poichè $\text{MN}^2 = \text{TN} \times \text{PN}$ (473) e PN $= \frac{p}{2}$ (751), sarà il raggio MC $\left(= \frac{4\text{MN}^3}{p^2}\right) = \text{NT} \times \frac{\text{MN}}{\text{PN}}$ ed MN : NP :: MC : NT = CO = PQ $= 2x + \frac{p}{2}$ (862. II); dunque QN $= 2x$, AQ $= 3x + \frac{p}{2} = 3x +$ AB, onde BQ $= 3x$, il che dà una costruzione assai semplice per determinare il centro C

del circolo osculatore. Prendete $BQ = 3AP$, e condotta CQ perpendicolare ad AQ, il punto di concorso C delle due MC, CQ sarà il centro cercato. FIG. 171.

Per trovar l' equazione dell' evoluta, sia $BQ (= 3x) = t$, $CQ = z$, si avrà $NP\left(\frac{p}{2}\right) : PM(y) :: NQ(2x) : QC = z = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ onde $\frac{pz^2}{16} = x^3 = \frac{t^3}{27}$, e $t^3 = \frac{27pz^2}{16}$; cioè *l' evoluta della parabola ordinaria è una seconda parabola cubica il cui parametro è $\frac{27}{16}$ di quello della data*. Ora nell' evolute, $AB + BC = MC$ (867); dunque $BC = MC - \frac{p}{2} = \frac{4MN^3}{p^2} - \frac{p}{2}$: ma $MN = \sqrt{(px + \frac{p^2}{4})}$ (751) $= \frac{p}{2}\sqrt{(\frac{4x}{p} + 1)}$; dunque facendo $\frac{27}{16}p = a$ e perciò $MN = \frac{8a}{27}\sqrt{(\frac{9t}{4a} + 1)}$, si ha $BC = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9t}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$, espressione d' un arco qualunque della seconda parabola cubica la cui equazione è $t^3 = az^2$.

873. Sia la cicloide ordinaria AMBa col circolo genitore BOD del diametro $BD = 2a$, con l' ordinata $MP = y$ e con l' ascissa $PB = x$: si avrà $mq\,(dy) : qM\,(dx) :: OP\,(\sqrt{(2ax - x^2)}) : PB\,(x)$; dunque $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazion differenziale della cicloide: e se si faccia piuttosto $AF = x$, $FM = DP = y$ onde $PB = 2a - y$, verrà $dx : dy :: \sqrt{(2ay - y^2)} : 2a - y$, e però $dy = dx\sqrt{\frac{2a - y}{y}}$, altra equazion differenziale della cicloide. Stando alla prima e posta dx costante, avremo differenziando, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$. 172.

Dunque $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2OD$: ora MNC è parallela a OD poichè (864) la tangente MT è parallela a OB; dunque $OD = MN = NC$; quindi 1°. nel pun-

172. to A si ha $x=2a$ ed $MC=0$, onde il raggio osculatore in A è zero, e perciò l' evoluta passa per A: 2°. nel punto B si ha $x=0$ ed $MC=BE=4a=2BD$.

874. Per determinar l' evoluta ACE, compito il rettangolo AE, sul lato $AB'=DE=BD$ come diametro si descriva un semicircolo AQB', si conduca AQ parallela a CM e si unisca C e Q; posto ciò, l' angolo $NAQ=NDO$; dunque $OD=AQ$ (418.306) e l' arco OID (o la retta AN) = all' arco ALQ. Ora $OD=CN$; dunque $CN=AQ$, e però $CQ=AN$ (442) = all' arco ALQ, proprietà distintiva della cicloide ordinaria; onde l' evoluta ACE è una semicicloide eguale ad AMB. Si sarebbe trovato lo stesso cercando direttamente l' equazione dell' evoluta come abbiamo spiegato (869).

L' arco $AC=MC=2AQ$; dunque *un arco qualunque di cicloide è doppio della corda corrispondente del circolo genitore*. Così $MB=2OB$, $AMB=2BD$, e la cicloide intera AB*a* è quadrupla del diametro BD.

173. 875. Sia la spirale logaritmica ADM in cui $t=\frac{ydx}{ady}$ (866) ovvero $dy=\frac{dx}{t}$, fatto y il raggio arbitrario a: differenziando, supposta dx costante, si avrà $ddy=0$, e il raggio osculatore $MC=\frac{yds}{dx}$ (870); onde condotte AC, MC normali ad MA e alla tangente in M, il loro punto d' incontro C sarà all' evoluta: perchè $Mr\,(dx):Mm\,(ds)::AM\,(y):MC$.

876. L' angolo $ACM=AMT$ (473); onde l' evoluta ABC è la medesima spirale logaritmica ADM. Quindi (867) la tangente MC è eguale alla spirale ABC, benchè questa faccia un' infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT = all' arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime*.

Massimi e Minimi, e Punti d' Inflessione.

175. 877. L' ordinata MP d' una curva BM essendo maggiore o minore di quelle che la precedono ($p'm$) e la seguono (pm), si chiama *Massima* o *Minima*, e il *Metodo dei massimi e dei minimi* insegna a determinar queste quantità.

878. Se

878. Se CM è il raggio del circolo osculatore nel punto M, l'ordinata MP sarà maggiore o minore di ogn' altra ordinata corrispondente a qualche punto dell' arco KMD descritto col raggio CM; onde MP (prolungata nel caso del *minimo*) passa per il centro del circolo osculatore; e però la tangente in M è parallela all' asse AP, e quindi la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \infty$; dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\infty} = 0$. Può anche succedere che l'ordinata PM sia un massimo o un minimo quando la tangente in M è normale all' asse; allora $\frac{ydx}{dy} = 0$ e però $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{0} = \infty$. Ora y può riguardarsi come una funzione dell' ascissa $AP = x$; e però per sapere in qual caso ella diventa un massimo o un minimo, si differenzierà l' equazione tra y ed x, e si eguaglierà a zero o all' infinito il rotto $\frac{dy}{dx}$; l' equazione che ne risulterà, combinata con la prima, darà dei valori di y, x i quali se non sieno assurdi, determineranno il massimo o il minimo.

FIG. 175.

177.

175.

879. Ma per distinguer l' uno dall' altro, sia $AP = x$, $PM = y$, $Pp = ndx = a$, $Pp' = -ndx = -a$; dunque (823) $pm = Y = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} + \text{ec.}$, e $p'm' = Y' = y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} - \text{ec.}$ Supposta dunque $\frac{dy}{dx} = 0$ (878), svaniranno tutti i termini delle due serie dopo il terzo (197) e verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^2d^2y}{2dx^2}$: parimente se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^4d^4y}{2.3.4dx^4}$: se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^5y}{dx^5}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^6d^6y}{2.3.4.5.6dx^6}$, ec. ec. onde secondochè $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^6y}{dx^6}$ ec. sarà positiva o negativa, ambedue l' ordinate contigue pm, $p'm'$ supereranno o saranno superate da $PM = y$, che perciò nell' un caso sarà un minimo, nell' altro un massimo (877). In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *ec. che vanno a zero, il*

FIG.
175. *seguente se è negativo dà un massimo, se è positivo dà un minimo.* All' incontro se con $\frac{d^2y}{dx} = 0$ resti $\frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = y + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{a^3d^3y}{2.3.dx^3}$, cioè $pm > PM$ e $p'm' < PM$, onde PM non sarà nè massimo nè minimo (877) ec. Ecco gli esempj.

I°. Dividere una retta $2a$ in due parti il cui rettangolo sia un massimo o un minimo. Chiamata x una parte, l' altra $2a - x$, l' espression del massimo o del minimo sarà $2ax - x^2$. Sia dunque $y = 2ax - x^2$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x = 0$, e però $x = a$. Per saper se la soluzione dà un massimo o un minimo, differenzio l' equazione $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x$, ed ho $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, quantità negativa, onde il valore $x = a$ dà un *massimo* $y = a^2$. In generale $y = x^m(2a - x)^n$ è un massimo o un minimo se $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(2a - x)^n - nx^m(2a - x)^{n-1} = 0 = m(2a - x) - nx$. Allora $x = \frac{2am}{m+n}$, valore che dà un massimo perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -m - n$.

II°. Trovar due diametri conjugati dell' ellisse che faccian tra loro il minimo angolo. Sieno m, n i diametri, p l' angolo che fanno tra loro, e si avrà (766) $mn\,sen\,p = ab$, ed $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, onde $sen\,p = \ldots\ldots\ldots \frac{ab}{n\sqrt{(a^2+b^2-n^2)}}$, $\frac{d\,sen\,p}{dn} = \frac{-ab(a^2+b^2-2n^2)}{n^2\sqrt{(a^2+b^2-n^2)^3}} = 0$, ed $n = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = m$. Il denominatore eguagliato a zero, cioè il rotto $\frac{d\,sen\,p}{dn}$ eguagliato all' infinito (878), darebbe $n^2 = a^2 + b^2$ ed $m = 0$, valori che non servono. Sicchè i diametri conjugati ed eguali dell' ellisse forman con la loro intersezione il minimo angolo cercato il cui seno è $sen\,p =$
120. $\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2}{a:b+b:a}$. Perciò se $b:a = tang\,u = tang\,CaB$ (646), sarà $sen\,p = \frac{2\,tang\,u}{1+tang^2u} = \frac{2\,tang\,u}{sec^2u} =$ (610) $2 sen\,u\,cos\,u = sen\,2u$, onde $p = 2u = Bab$.

III°. Di tutte le parabole del cono retto DCB, determinar la massima in superficie. Sia BD $=a$, CD $=b$, PB $=x$, e sarà $a:b::x:\text{AP}=\frac{bx}{a}$, PM $=\sqrt{(ax-x^2)}$ (477), la superficie mAMP$m=\frac{4bx}{3a}\sqrt{(ax-x^2)}=y$ (come presto vedremo); dunque $\frac{dy}{dx}=\frac{2bx(3a-4x)}{3a\sqrt{(ax-x^2)}}=0=3a-4x$; onde $x=\frac{3a}{4}$, che è un *massimo*, perchè $\frac{ddy}{dx^2}=-4$. Il denominatore eguagliato a zero dà due *minimi* coi due valori $x=0$, $x=a$ (878) che riducon la curva ad un punto o ad una retta. 178.

IV°. Di tutti i triangoli della stessa base AB e dello stesso perimetro, qual è quello della massima superficie? Sia q il semiperimetro, la base AB $=a$, il lato AM $=x$, sarà MB $=2q-a-x$. Dunque chiamando y la superficie, si avrà (529) $y=\sqrt{[q(q-a)(q-x)(a+x-q)]}$, $2ly=lq+l(q-a)+l(q-x)+l(a+x-q)$, $\frac{2dy}{y}=\frac{-dx}{q-x}+\ldots\frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q}-\frac{1}{q-x}\right)=0$; dunque $a+x-q=q-x$, $2q-a-x=x$; e perciò il triangolo cercato è isoscele. 179.

880. Per trovare ora in quali casi una funzione Y di due variabili x, y indipendenti tra loro, divenga un *massimo* o un *minimo*, supponghiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziar la funzione Y facendo variare x sola, ed eguagliare a zero il coefficiente di dx. Così per aver y si differenzierà la funzione Y facendo variare y sola, ed eguagliando il coefficiente di dy a zero. Onde se $dY=Pdx+Qdy$, si deve aver $P=0$, $Q=0$, equazioni che daranno i valori di x e di y proprj a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*. Per distinguer l'uno dall'altro, posto $dY=Pdx+Qdy$ e prese dx, dy costanti, sarà $d^2Y=dPdx+dQdy$; onde fatto $dP=Adx+Bdy$, $dQ=Bdx+Cdy$ (854), verrà $d^2Y=(Adx+Bdy)dx+(Bdx+Cdy)dy$: ma si è visto che dee aversi $P=0$ è però $dP=Adx+Bdy=0$; dunque $dx=\frac{-Bdy}{A}$ e $d^2Y=dQdy=(Bdx+Cdy)dy=(-$

$\frac{B^2}{A} + C) dy^2$ ovvero $\frac{d^2Y}{dy^2} = C - \frac{B^2}{A}$. Ora quando si ha una so-la variabile x o y, e però $y = 0$ ovvero $x = 0$, viene $dY = Pdx$; $d^2Y = dPdx = Adx^2$ ovvero $dY = Qdy$, $d^2Y = dQdy = Cdy^2$, e si è detto che Y è *minimo* o *massimo* se $A > 0$ e $C > 0$ ovvero $A < 0$ e $C < 0$ (879); dunque se si abbiano x, y insieme, sarà Y un *minimo* quando $A > 0, C > 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} > 0$, ovvero $AC > B^2$: e sarà un *massimo* quando $A < 0, C < 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ovvero (giacchè ora A, C son negativi) $- C + \frac{B^2}{A} < 0$ cioè $AC > B^2$ come nel caso del *minimo*. Questa teoria facilmente si estende alle funzioni di tre, quattro ec. variabili.

Si voglia dividere il numero dato $3a$ in tre parti il cui prodotto sia un *massimo*. Chiamando x, y due di queste parti, la terza sarà $3a - x - y$, ed avremo $xy(3a - x - y)$, la cui differenziale è $(3a - 2x - y) ydx + (3a - 2y - x) xdy$. Eguagliando a zero separatamente i coefficienti di dx, dy, si avrà $3a - 2x - y = 0 = 3a - 2y - x$, onde $y = x = a$; e poichè $P = (3a - 2x - y) y$, $dP = -2ydx + (3a - 2x - 2y) dy$, $A (= -2y = -2a) < 0$, $B = 3a - 2x - 2y = -a$, e poi $Q = (3a - 2y - x) x$, $dQ = -2xdy + (3a - 2x - 2y) dx$, $C (= -2x = -2a) < 0$, sarà $AC (= 4a^2) > B^2 (= a^2)$, e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un *massimo*.

Tra tutti i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha maggior superficie. Sieno x, y due de' suoi lati, $2q$ il perimetro, $2q - x - y$ sarà l' altro lato, e la superficie $Y = \sqrt{[q(q - x)(q - y)(x + y - q)]}$ (529); dunque $2lY - lq = l(q - x) + l(q - y) + l(x + y - q)$, e $dY = \ldots$ $\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - x}\right) + \frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - y}\right)$. Eguagliando a zero i coefficienti di dy, dx, si ha $x + y - q = q - y = q - x$; onde $x = y = \frac{2q}{3} = 2q - x - y$, e il triangolo ricercato è equilatero.

176. 881 Serve questo metodo a determinare ancora i *punti d' inflessione* (736); poichè nei due triangoli infinitesimi $mm'r$, $m'or'$ d' una stessa base dx, l' angolo $mm'r$ $(= mtP) < m'or'$ $(= m't'P)$, onde anche $mr < m'r'$, cioè la differenza dy dell' ordinata che da A scorre in PM, e da PM o procede

[illegible] o torna indietro, scema sempre nella concavità della curva; e potrebbe dimostrarsi nel modo stesso che sempre cresce nella sua convessità. Dunque nel punto M d'inflessione la differenza dy diviene un minimo o un massimo, cioè (878) $ddy = 0$ ovvero ∞: ma il raggio osculatore MC, presa dx costante, diviene infinito se $ddy = 0$, e diviene zero se $ddy = \infty$ (868. 870); dunque *nel punto d' inflessione il raggio osculatore è sempre infinito o nullo*, e perciò FIG. 176.

$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : - \frac{ddy}{dx^2} = \infty$ ovvero $= 0$, e $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$ ovvero ∞.
Si differenzierà dunque due volte l' equazion della curva, posta dx costante, e il valor di $\frac{-ddy}{dx^2}$ eguagliato a zero o all' infinito, darà i valori di x, y convenienti ad uno o più punti d' inflessione. Che se l' ordinate partano da un punto fisso, si avrà $\frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2} = 0$ ovvero ∞ (870).

882. Per vedere se $\frac{d^2y}{dx} = 0$ dà veramente un' inflessione in M, condottavi la tangente Tt e presa Pp = Pp' = a, alzo l' ordinate pvm, $p'm'v'$ e da M, v' le normali Mr, $v'r'$. 174.
I triangoli simili MTP, $vMr = Mv'r'$ danno TP $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: PM (y) :: Mr (a) : $rv = r'$M $= \frac{ady}{dx}$, onde $pv = y + \frac{ady}{dx}$ e $p'v' =$ P$r' =$ $y - \frac{ady}{dx}$. Or fatta $\frac{d^2y}{dx} = 0$ ed a negativa in Pp', si ha come sopra (879) $pm = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{ady}{dx} - \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$; dunque se $\pm \frac{d^3y}{dx^3}$ non sia zero, verrà (col segno +) $pm > pv$ e $p'm' < p'v'$, o (col segno −) $pm < pv$ e $p'm' > p'v'$; dunque degli archi Mm', Mm l' uno sarà di quà, l' altro di là da Tt, e si avrà in M un' inflessione (736), ciò che non potrebbe concludersi se fosse $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ec. In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ ec. *che vanno a zero, il seguente determinerà l'inflessione*: in altro caso ella non vi sarà. Ecco gli esempj.

I. Sia la prima parabola cubica in cui $y^3 = a^2x$; si avrà

$dy = \frac{dx}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}, \frac{-ddy}{dx^2} = \frac{2}{9x}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} = 0$ nel punto d' inflessione dunque $x = 0$, e questo punto è nell' origine.

II. Sia la concoide in cui $y = \frac{b+x}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (784); si avrà $dy = \frac{-dx(a^2 b + x^3)}{x^2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a^2x^3 + 3a^2bx^2 - 2a^4b}{(a^2x^3 - x^5)\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$; onde $x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0$, equazione che risoluta (337) dà per x il valor conveniente al punto d' inflessione.

III. Sia la curva dell' equazione $y - a = (x - a)^{\frac{3}{5}}$; si avrà $dy = \frac{3dx}{5\sqrt[5]{(x-a)^2}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma eguagliato all' infinito dà $x = a = y$, valori corrispondenti al punto d' inflessione.

Rotti i cui termini si riducono a zero.

883. Si trovan talvolta dell' espressioni algebriche in forma di rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$, come $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ quando $x = a$. Questi risultati apparentemente indeterminati, son suscettibili di valori determinati; ed ecco un metodo per trovarli

Sia $\frac{P}{Q}$ una funzione di x il cui numeratore e denominatore si riducono a zero quando $x = a$. Si sostituisca $a \pm dx$ ad x in P ed in Q (si prende — se + guida ad assurdo) e trascurati i termini ove è dx^2, dx^3 ec. come infinitesimi rispetto a dx, si avrà il valore del rotto proposto, se pure i termini del nuovo rotto non si annullino nuovamente. Ecco gli esempj.

I. Cerco il valor di $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ quando $x = a$. Quì $P = x^2 - a^2$, e $Q = x - a$; dunque $\frac{(a + dx)^2 - a^2}{a + dx - a} = \frac{2adx}{dx} = 2a$.

II. La somma della progressione $\div x : x^2 : x^3 \ldots x^n$, è $\frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$ il cui valore quando $x = a = 1$, sarà . . . .

$$\frac{(1+dx)^{n+1}-1-dx}{1+dx-1}=n.$$

III. Sia $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ ed $x=a$. Si avrà $\sqrt{(2a^3x-x^4)}=a\sqrt{(a^2-2adx)}=a(a-\frac{2adx}{2a}$ ec. (161)), $-a\sqrt[3]{a^2x}=-a\sqrt[3]{(a^3+a^2dx)}=-a(a+\frac{a^2dx}{3a^2}$ ec.), $a-\sqrt[4]{ax^3}=a-\sqrt[4]{(a^4+3a^3dx)}=a-(a+\frac{3a^3dx}{4a^3}$ ec.); riducendo si trova $\frac{-4adx}{3\times-\frac{3dx}{4}}=\frac{16a}{9}$.

884. Ma se succeda che anche il nuovo rotto divenga $\frac{0}{0}$, si passerà a considerar dx^2, dx^3, ec., finchè si abbia in quantità finite uno almeno dei suoi termini.

Es. Differenziata l' equazione $x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$, si divida per $\frac{dx}{x}$, e verrà $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$ quando $x=1$, e sostituendo $1+dx$ ad x, si ha nuovamente $\frac{0}{0}$: ma se non si trascuri dx^2, come si fece in principio (883), verrà ... $\frac{n(n+2)(n+1)dx^2-(n+1)^2ndx^2}{2dx^2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

885. Con ciò si trova nei casi particolari il valore di $0\times\infty$ e di $\infty-\infty$; poichè $0\times\infty=0\times\frac{a}{0}=\frac{0}{0}$, ed $\infty-\infty=\frac{a}{0}-\frac{b}{0}=\frac{0}{0}$; così se $x=1$, si ha $\frac{1}{lx}-\frac{x}{lx}=\infty-\infty$, onde sostituendo $1+dx$ ad x, verrà $\frac{-dx}{l(1+dx)}=(301)\frac{-dx}{dx\,\text{ec}}=-1$.

886. Possono anche determinarsi i punti multipli delle curve (735) e la loro moltiplicità; poichè differenziando per esempio l' equazione $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$, si trova

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)(3x-a)}{2a(y-b)} = \frac{0}{0}$ quando $x = a$, $y = b$; sostituendo dunque $a + dx$ ad x, e $b + dy$ ad y, trascurato dx^2, verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy}$, $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, e $\frac{dy}{dx} = \pm 1$: ma $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo che la curva (o la sua tangente) fa con l'asse delle x (646); dunque se questa tangente ha più valori, apparterrà a più rami di curva che passano per uno stesso punto; e nel nostro caso all' ascissa $x = a$ corrisponderà un' ordinata $y = b$ che incontra la curva in un punto multiplo, ove son due tangenti eguali al raggio 1, e che fanno perciò un angolo di 45° con la retta condotta per il punto multiplo parallelamente all' asse.

887. Questo metodo per valutare $\frac{0}{0}$ è generale; quello di Bernoulli che prescrive di differenziar separatamente quante volte occorre, il numeratore e il denominator del rotto, non sempre riesce: così dato $\sqrt{\left(\frac{2a^2 - 3ax + x^2}{a - x}\right)}$ e supposto $x = a$, dal nostro metodo se ne avrà subito il valore $\sqrt{a}$, che da quello di Bernoulli non si otterrà giammai.

Teorema di Taylor.

888. Già si è detto (823) che supposta Y una funzione di x, se questa divenga $x \pm ndx$ e sia $ndx = a$ quantità finita, si avrà $Y = y \pm \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{2dx^2} \pm \frac{a^3 d^3 y}{2.3dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4dx^4} \pm$ ec., presa dx costante. Questa serie si chiama il *Teorema di Taylor* dal dotto Geometra Inglese che la trovò.

889. Per vederne la verità in un esempio semplice, suppongasi $y = xx - 2x + 1$, e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $x + 1$ ad x. Avremo $a = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ec.; dunque y si cangia in $x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$, il che è evidente.

890. Sia $y = x^m$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{ddy}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ ec. Dunque se x diviene $x + a$, y diventerà $(x+a)^m$ $= x^m +$

$= x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} +$ ec.; facendo $a = \frac{-bx}{x+b}$ e però $x + a = \frac{x^2}{x+b}$, avremo $(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{mbx^m}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2x^m}{2(x+b)^2} -$ ec., ovvero $\frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{mx^{-m}b}{x+b} + \frac{m(m-1)x^{-m}b^2}{2(x+b)^2} -$ ec. $= x^{-m}\left(1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2}{2(x+b)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2.3(x+b)^3} +\right.$ ec.$\left.\right)$, serie che ha un numero finito di termini quando m è un intero: se $n = -m$, si avrà $(x+b)^n = x^n\left(1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n(n+1)b^2}{2(x+b)^2} +\right.$ ec.$\left.\right)$. Si posson verificar queste formule riducendo i rotti $\frac{1}{x+b}$, $\frac{1}{(x+b)^2}$, ec. in serie, che serviranno a trovar le radici dei numeri prontamente, perchè posson sempre rendersi convergentissime.

891. Sia ora $y = lx$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}$ ec., e si avrà $l(x \pm a) = lx \pm \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} \pm \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} \pm$ ec. Sia $\pm a = \frac{\mp xx}{b \pm x}$, e avremo $l(x \pm a) = l\frac{bx}{b \pm x} = lbx - l(b \pm x) = lx \mp \frac{x}{b \pm x} - \frac{x^2}{2(b \pm x)^2} \mp \frac{x^3}{3(b \pm x)^3} -$ ec. Dunque $l(b \pm x) = lb \pm \frac{x}{b \pm x}\left(1 \pm \frac{x}{2(b \pm x)} + \frac{x^2}{3(b \pm x)^2} \pm\right.$ ec.$\left.\right)$, serie convergenti che facilitan molto il calcolo dei logaritmi.

892. Sia $y = b^x$; avremo $\frac{dy}{dx} = b^x lb$, $\frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b$ ec.; dunque $b^{x+a} = b^x\left(1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +\right.$ ec.$\left.\right)$, e perciò $b^a = 1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +$ ec. (307).

893. Sia y un arco il cui seno è x che indicheremo con $y = \mathrm{A}\,sen\,x$; si avrà $x = sen\,y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos.y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\,y}{cos^3 y} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$ ec.; dunque A sen $(x \pm$

$a) = A\,sen\,x \pm \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{a^2 x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \pm \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} +$ ec. $=$
$A\,sen\,x \pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2 x}{2cos^3 y} \pm$ ec.

894. Queste serie sono attissime a calcolar l' arco che corrisponde a un seno dato. Preso dalle Tavole l' arco più vicino, la differenza del suo seno x dal dato renderà a piccolissima, e si avrà l' arco cercato aggiungendo $\pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2 x}{2\,cos^3 y}$ ec. a quello il cui seno è x. Osservate 1°., che la serie è sì convergente che i due primi termini danno i minuti quinti in circa: 2°. che l' arco è espresso in parti del raggio 1, e per ridurle a secondi, a terzi ec., bisogna dividerle per la lunghezza dell' arco di 1″ (522), posto il logaritmo dell' unità $= 10$: il quoziente dà i secondi, e di quì i terzi, i quarti ec.

895. Facciamo $y = A\,cos\,x$, e avremo $x = cos\,y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sen\,y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$, ec; dunque $A\,cos(x \pm a) = A\,cos\,x \mp \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{a^2 x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \mp \ldots \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} -$ ec., serie di cui si fa lo stesso uso che delle precedenti. Se ne troveranno delle simili per l' arco la cui tangente sia $x \pm a$.

896. Sia ora $y = sen\,x$, e avremo $\frac{dy}{dx} = cos\,x$, $\frac{ddy}{dx^2} = -sen\,x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -cos\,x$ ec.; dunque $sen(x \pm a) = sen\,x \pm a\,cos\,x - \frac{a^2}{2}\,sen\,x \mp \frac{a^3}{6}\,cos\,x + \frac{a^4}{24}\,sen\,x +$ ec. Parimente se $y = cos\,x$, si avrà $cos\,(x \pm a) = cos\,x \mp a\,sen\,x - \frac{a^2}{2}\,cos\,x \pm \frac{a^3}{6}\,sen\,x + \frac{a^4}{24}\,cos\,x -$ ec. Queste formule son di grandissimo uso per interpolar le Tavole dei seni. Se sia $x = 0$, i valori di $sen(x+a)$, $cos(x+a)$ diverranno a cagion di $sen\,x = 0$ di $cos\,x = 1$, quelli che già trovammo (628).

897. Fatto $y = tang\, x$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{sen\, x}{\cos^3 x} \ldots$ $\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3 sen^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ (610) ec., sarà $tang(x \pm a) = tang\, x \pm \frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 sen\, x}{\cos^3 x} \pm \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4 sen\, x}{\cos^5 x} \pm$ ec. $\mp \ldots$ $\frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 sen\, x}{3\cos^3 x} \mp$ ec.: ma $\frac{\pm a + a^2 tang\, x}{\cos^2 x}, \frac{\pm a^3 + a^4 tang\, x}{\cos^4 x}$, $\pm$ ec. è una progression geometrica il cui primo termine $= \frac{\pm a + a^2 tang\, x}{\cos^2 x}$; l'ultimo $= \frac{1}{\infty} = 0$, e il quoziente $= \frac{a^2}{\cos^2 x}$; dunque la somma (259) $= \frac{a^2 tang\, x \pm a}{\cos^2 x - a^2}$, e però $tang(x \pm a) = tang\, x + \frac{a^2 tang\, x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4\, sen\, x}{3\cos^3 x}$ — ec. $= \ldots\ldots$ $\frac{sen\, x \cos x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 sen\, x}{3\cos^3 x} \mp$ ec. Si troveranno delle formule simili per $\cot(x \pm a)$.

898. Sia ora $y = ml\, sen\, x$ o al logaritmo ordinario di $sen\, x$ se m rappresenta il modulo; si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m \cos x}{sen\, x}$ (1014), $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{sen^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m \cos x}{sen^3 x}$ ec.; dunque $l\, sen(x \pm a) = l\, sen\, x \pm am \frac{\cos x}{sen\, x} - \frac{ma^2}{2 sen^2 x} \pm \frac{a^3\, m \cos x}{3 sen^3 x}$ ec.

899. Se $y = ml \cos x$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{-m\, sen\, x}{\cos x}$ (851), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-m}{\cos^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2m\, sen\, x}{\cos^3 x}$ ec.; dunque $l \cos(x \pm a) = l \cos x \mp \frac{am\, sen\, x}{\cos x} - \frac{a^2 m}{2\cos^2 x} \mp \frac{a^3 m\, sen\, x}{3\cos^3 x}$ — ec. Sia $y = ml\, tang\, x$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2m}{sen\, 2x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2m \cos 2x}{sen^2 2x}$ ec. e perciò $l\, tang(x \pm a) = l\, tang\, x \pm \frac{2am}{sen\, 2x}$ — ec.. Lo stesso sarà per $ml \cot x$.

900. Supposto ora che y sia l' arco il cui logaritmo del seno è x, ovvero $y = Al\, sen\, x$, si avrà $x = l\, sen\, y$, e perciò $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, y}{m \cos y} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\, y}{m^2 \cos^3 y}$ ec.; dunque $Al\, sen\, (x \pm$

$a) = y \pm \frac{a\,sen\,y}{m\cos y} + \frac{a^2\,sen\,y}{2m^2\cos^3 y} \pm$ ec.

901. Sia $y = Al\,tang\,x$; verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\,2y}{2m}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\,4y}{4m^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{sen\,2y\cos 4y}{2m^3}$ ec.; dunque $Al\,tang(x \pm a) = y \pm \ldots \frac{a\,sen\,2y}{2m} + \frac{a^2 sen\,2y\cos 2y}{4m^2} \pm \frac{a^3 sen\,2y\cos 4y}{12m^3} +$ ec. Queste formule posson servire a risolvere con molta appressimazione i problemi sull' uso delle Tavole dei seni.

902. La serie $y \pm \frac{ady}{dx} +$ ec. (888) da cui nascono queste ed infinite altre applicazioni, induce talvolta in inganno se si adopri senza cautela, come può vedersi nei casi benchè semplicissimi di $y = lx$ (891) e di $y = sen^{\frac{m}{n}} x$ quando $x = o$ nel primo, ed $n > m$ nel secondo.

ALTRE REGOLE DEL CALCOLO INTEGRALE

Metodo per ridurre l' integrazione di più differenziali binomie a quella d' altre differenziali conosciute.

903. DEbbasi integrare $x^n dx(a + bx^m)^k$ supponendo nota l' integrale di $x^p dx(a+bx^m)^k$, ed $n > p$. Poichè $d[x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}] = a(q+1)x^q dx(a+bx^m)^k + b(mk+m+q+1)x^{m+q}dx(a+bx^m)^k$, sarà integrando quest' equazione, $\int x^{m+q}dx(a+bx^m)^k = \ldots \frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)} - \frac{a(q+1)\int x^q dx(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}$. Sia $m + q = n$, o $q = n - m$; si avrà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = \ldots \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$. Se in questa stessa espressione in vece di n si scri-

va $n-m, n-2m$ ec., si avranno i valori di $\int x^{n-m} dx(a+bx^m)^k$, di $\int x^{n-2m} dx(a+bx^m)^k$, in generale di $\int x^{n-im} dx(a+bx^m)^k$, essendo i un intero positivo; e la formula sarà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = (a+bx^m)^{k+1}\Big(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \frac{a(1+n-m)(A)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(B)}{bx^m(1+n+m(k-2))} - \ldots - \frac{a(1+n-m(i-1))(Z)}{bx^m(1+n+m(k-i+1))}\Big) \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots\ldots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\ldots(1+n+m(k-i+1))}\int x^{n-im} dx$ $(a+bx^m)^k$, ove le lettere (A), (B) .... (Z) indicano che il termine in cui sono, dee moltiplicarsi per il precedente, ed il segno superiore ha luogo quando i è pari, l'inferiore quando è impari. Ora se $n-im=p$, cioè se $\frac{n-p}{m}=i$ è un intero positivo, $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ potrà con la formula precedente ridursi a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, presi tanti termini della serie e tanti fattori nel numeratore e denominator del termine fuor di serie, quante sono unità in i.

Esemp. Sia $\int x^{10} dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ da ridursi a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, che si ha quadrando il circolo, come vedremo: sarà $n=10$, $a=1, b=-1, m=2, k=\frac{1}{2}, p=0, \frac{n-p}{m}=i=5$; dunque $\int x^{10} dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{12}x^9 - \frac{9}{12.10}x^7 - \ldots \frac{9.7}{12.10.8}x^5 - \frac{9.7.5}{12.10.8.6}x^3 - \frac{9.7.5.3}{12.10.8.6.4}x) + \frac{9.7.5.3\cdot1}{12.10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$.

Così $\int x^{r\pm cs-1} dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$ si riduce a $\int x^{r-1} dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$: onde se $a=1, b=-1, c=1, s=2, t=-1, u=2$, anche $\int x^{r+1} dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ si ridurrà a $\int x^{r-1} dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

e poichè $r = 1, = 2$ dà $\int x^{r-1} dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = arc.\ sen\ x$ (850) $= -\sqrt{(1 - x^2)}$, si avrà sempre $\int x^{r+1} dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ o il numero intero e positivo r sia impari o sia pari.

904. Se i sia numero intero negativo, in luogo di ridurre $\int x^n dx (a + bx^m)^k$ a $\int x^p dx (a + bx^m)^k$, si ridurrà questa alla prima.

Esemp. Sia $\int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1}$ da ridursi a $\int dx (1 + x^2)^{-1} = arc\ tang\ x$ (850); si avrebbe $n = -4$, $m = 2$, $p = 0$ ed $\frac{n - p}{m} = -2$; riducendo dunque la seconda alla prima, si avrà $n = 0$; $a = 1$, $b = 1$, $m = 2$, $k = -1$, $p = -4$, $\frac{n - p}{m} = 2 = i$; onde $\int dx (1 + x^2)^{-1} = -x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1}$; dunque $\int x^{-4} dx (1 + x^2)^{-1} = x^{-1} - \frac{x^{-3}}{3} + \int dx (1 + x^2)^{-1}$.

905. Sia proposto ora di ridur $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ a $\int x^r dx (a + bx^m)^q$. Poichè $d[x^{n+1} (a + bx^m)^p] = (n+1) x^n dx (a + bx^m)^p + bmpx^{m+n} dx (a + bx^m)^{p-1}$, sarà $\int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1} (a + bx^m)^p}{n + 1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{m+n} dx (a + bx^m)^{p-1}$. Se in questa stessa espressione si scriva $n + m$, $n + 2m$ ec. per n, e $p - 1$, $p - 2$ ec. per p, si avranno i valori di $\int x^{n+m} dx (a + bx^m)^{p-1}$, di $\int x^{n+2m} dx (a + bx^m)^{p-2}$ ec. e si troverà la seguente formula: $\int x^n dx (a + bx^m)^p = (a + bx^m)^p \times \left(\frac{x^{n+1}}{1 + n} - \frac{bmpx^m (A)}{(1 + n + m)(a + bx^m)} - \frac{bm (p - 1) x^m (B)}{(1 + n + 2m)(a + bx^m)} - \ldots - \frac{bm (p - i' + 2)(Z)}{(1 + n + m(i' - 1))(a + bx^m)} \right) \pm \ldots \ldots \frac{b^{i'} m^{i'} p (p - 1) \ldots (p - i' + 1)}{(1 + n)(1 + n + m) \ldots (1 + n + m(i' - 1))} \int x^{n + i'm} dx (a + bx^m)^{p - i'}$, ove i segni e il numero dei termini e dei fattori si prendono come prima (903). Ora se $p - i' = q$ o se $p - q = i'$ è intero, l' integrale di $x^n dx (a + bx^m)^p$ si ridurrà a $\int x^{n + i'm} dx (a +$

$bx^m)^q$, la quale potendo ridursi a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ quando $n+i'm-im=r$, cioè quando $\frac{n-r}{m}$ è un intero positivo $i-i'$, anche la formula proposta vi si potrà ridurre.

Esemp. Sia da ridursi $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $n=4, a=1, b=-1, m=2, p=\frac{5}{2}, r=0, q=\frac{1}{2}, p-q=i'=2$. Dunque $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot7} + \frac{5\cdot3}{5\cdot7}\int x^8 dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$: ma (903) $\int x^8 dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{x^7}{10}-\frac{7x^5}{10.8}-\frac{7.5x^3}{10.8.6}-\frac{7.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$;

dunque $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^7}{10}-\frac{3x^5}{10.8}-\frac{3.5x^3}{10.8.6}-\frac{3.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{3.5.3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

Così $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\pm1}$ e $\int x^{r\mp s-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\mp1}$ si riducono a $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$.

906. Se i' sia numero intero negativo, si operi come sopra (904).

Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

907. Suppongo $\frac{Pdx}{Q}$ un rotto razionale, ed il maggiore esponente di x in P almeno d'un'unità minore che in Q, condizione che può sempre ottenersi con la divisione: così $\frac{x^4dx}{a+bx^3}=\frac{xdx}{b}-\frac{axdx}{b(a+bx^3)}$ la cui seconda parte è quale l'abbiam supposta per $\frac{Pdx}{Q}$. Ora cerco i fattori di Q (318), e se questi son tutti del primo grado, reali, ed ineguali, il rotto proposto avrà la forma $\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots+\omega}{(x-f)(x-g)(x-k)\text{ec.}}\times dx$, supponendo che il numero de' fattori $x-f$, $x-g$ ec. sia m.

Per integrare in questo caso, decompongo il rotto così: $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+$ ec. la cui integrale è $Al(x-f)+Bl(x-g)+$ ec. $+C$, e determino al solito i coefficienti di A, B ec. (273).

Es. Si voglia integrar $dy=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$; faccio $\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Ddx}{a+x}=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$, e operando al solito, trovo

$$\left.\begin{matrix} Aa^2+Bax+Bxx \\ -1+Da-A \\ -D \end{matrix}\right\}=0;\text{ dunque } A=\frac{1}{a^2},\ B=\frac{1}{2a^2},$$

$D=-\frac{1}{2a^2}$, e $dy=\frac{dx}{a^2x}+\frac{dx}{2a^2(a-x)}-\frac{dx}{2a^2(a+x)}$; onde $y=\frac{lx}{a^2}-\frac{l(a-x)}{2a^2}-\frac{l(a+x)}{2a^2}+\frac{lC}{a^2}=\frac{1}{a^2}l\frac{xC}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Si troverà pure $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}l\frac{C(a+x)}{a-x}$.

908. Se alcuni fattori di Q sieno eguali, ed $(x-a)^m$ esprima un numero m di essi, il rotto si decomporrà in $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+\text{ec.}+\frac{A'x^{m-1}+B'x^{m-2}+\text{ec.}\ldots+R}{(x-a)^m}dx$, e determinati i coefficienti come sopra, s'integrerà $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m}dx+\frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m}dx+$ ec. facendo $x-a=z$.

Esemp. Sia da integrarsi $dy=\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{Adx}{x}+\frac{(Bx+C)dx}{(x-1)^2}+\frac{(Dx+E)dx}{(x+1)^2}$; onde $A=2$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{7}{4}$, $D=-\frac{5}{4}$, $E=-\frac{7}{4}$; e però $dy=\frac{2dx}{x}+\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}-\ldots\frac{(5x+7)dx}{4(x+1)^2}$. Per integrare il rotto $\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}$, faccio $x-1=z$, il che lo cangia in $\frac{(4-3z)dz}{4z^2}=\frac{dz}{z^2}-\frac{3dz}{4z}$, la cui integrale è $-\frac{1}{z}-\frac{3lz}{4}=\frac{-1}{x-1}-\frac{3l(x-1)}{4}$, e trattando così

l' altro

l'altro rotto, trovo l'integrale $y = 2lx - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4}l(x-1) - \frac{5}{4}l(x+1) + C$.

909. Se sieno in Q dei fattori immaginarj, esprimendosi un di essi con $x + a + b\sqrt{-1}$, ve ne sarà un altro della forma $x + a - b\sqrt{-1}$. Dunque il loro prodotto $x^2 + 2ax + b^2 + a^2$, o per brevità $x^2 + mx + n$, sarà un fattor reale di Q. Perciò si determinerà (346) questo fattore, e poi si supporrà che $\frac{(Ax + B)dx}{x^2 + mx + n}$ sia uno dei rotti parziali di $\frac{Pdx}{Q}$, e si avrà A e B come sopra. Quindi facendo $x + \frac{m}{2} = z$ ed $n - \frac{m^2}{4} = b'b'$, il rotto diventerà $\frac{(A'z + B')dz}{zz + b'b'} = \frac{A'zdz}{zz + b'b'} + \frac{B'dz}{zz + b'b'}$. Ora $\int \frac{A'zdz}{zz + b'b'} = \frac{A'}{2}l(zz + b'b')$ (851) e

$$B'\int \frac{dz}{zz + b'b'} = \frac{B'}{b'}\int \frac{\frac{dz}{b'}}{1 + \frac{zz}{b'b'}} = \frac{B'}{b'} \times Arcotang\frac{z}{b'} + C \ (850),$$

ove l'arco è espresso in parti del raggio 1; onde per valutarlo in gradi bisogna moltiplicarlo per 57°, 296 (521).

Es. Sia $dy = \frac{(z^2 - z + 1)dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{Adz}{1+z} + \frac{(Bz + C)dz}{1 + zz}$; si troverà $A = \frac{3}{2}$, $B = C = -\frac{1}{2}$, onde $dy = \frac{3dz}{2(1+z)} - \frac{zdz}{2(1+zz)} - \frac{dz}{2(1+zz)}$ ed $y = \frac{3}{2}l(1+z) - \frac{1}{4}l(1+z^2) - \frac{1}{2} \times Arcotang\, z + C$.

Sia anche $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$ che si riduce a $\frac{dx}{x} - \frac{(2x+3)dx}{(1+x)^2} + \frac{xdx}{1+x+xx}$. Quest' ultima quantità, posto $x = z - \frac{1}{2}$, diviene $\frac{zdz}{z^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2 + \frac{3}{4}}$, la cui integrale, fatto $B' = 1$, $b' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, è $\frac{1}{2}l(z^2 + \frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} Arctang\frac{2z}{\sqrt{3}}$. Sostituendo dunque il valor di z, si trova per l'intera integrale $lx -$

$2l(1+x)+\frac{1}{2}l(1+x+x^2)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{3}}Arc\,tang\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+C$.

910. Infine se Q abbia uno o più fattori di questa forma $(x^2+ax+b)^m$, si supporrà che il rotto parziale provenuto da questo fattore sia $dx\left(\frac{Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+ec.+R}{(x^2+ax+b)^m}\right)$ e si determineranno i coefficienti A, B ec. come sopra. Quindi facendo $x=z-\frac{a}{2}$ e sostituendo, il rotto diverrà . . . $\frac{A'z^{2m-1}+B'z^{2m-2}+ec.+R'}{(z^2+b'b')^m}dz$ che può decomporsi così: $\frac{A'z^{2m-1}}{(z^2+b'b')^m}dz+\frac{B'z^{2m-2}}{(z^2+b'b')^m}dz+$ ec.: ma i termini ove il numeratore ha una potenza impari sono integrabili in parte algebricamente e in parte per logaritmi (856), e quelli ove z nel numeratore ha una potenza pari essendo della forma $\frac{Mz^{2k}dz}{(z^2+b'b')^m}$ posson ridursi (904) a $\frac{dz}{z^2+b'b'}$, cioè possono integrarsi in parte algebricamente e in parte per archi di circolo; dunque con questo mezzo si avrà l' integrale del dato rotto.

911. Ecco un esempio che comprende tutti questi metodi. Sia $dy=\frac{dx}{(1+x)xx(x^2+2)(x^2+1)^2}=\frac{Adx}{1+x}+\frac{(Bx+C)dx}{x^2}+\frac{(Dx+E)dx}{x^2+2}+\frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(x^2+1)^2}$. Si troverà $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$, $E=-\frac{1}{6}$, $F=\frac{1}{4}$, $G=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$ e $dy=\frac{dx}{12(1+x)}+\frac{(1-x)dx}{2x^2}+\frac{(x-1)dx}{6(x^2+2)}+\frac{(x^3-x^2+3x-3)dx}{4(x^2+1)^2}$. Ora $\frac{1}{12}\int\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{12}l(1+x)$.... $\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)dx}{x^2}=\frac{1}{2}l\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}$... $\frac{1}{6}\int\frac{xdx-dx}{x^2+2}=\frac{1}{12}l(x^2+2)$ (857) $-\frac{1}{6\sqrt{2}}$ $Arc\,tang\frac{x}{\sqrt{2}}$ (858)... $\frac{1}{4}\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{8}l(x^2+1)+\frac{1}{8(x^2+1)}$ (857) ... $\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{3}{8(x^2+1)}$ (857). Per integrare I. $\frac{-x^2dx}{4(x^2+1)^2}$ II. $-\frac{3dx}{4(1+x^2)^2}$, riduco $\int\frac{dx}{1+x^2}$ alla I., e si avrà (906) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}$

$+2\int x^2dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int x^2dx(1+x^2)^{-2}=\frac{-x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}Arc\ tang\ x$: ma riducendo la I. alla II. (903), $\int x^2dx(1+x^2)^{-2}=-x(1+x^2)^{-1}+\int dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int dx(1+x^2)^{-2}=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}Arc\ tang\ x$. Riunendo dunque tutte queste integrali, sarà $y=\frac{1}{12}l(1+x)+\frac{1}{12}l(x^2+2)+\frac{1}{8}l(x^2+1)+\frac{1}{2}l\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{(x+1)}{4(1+x^2)}-\frac{1}{2}Arc\ tang\ x-\frac{1}{6\sqrt{2}}Arc\ tang\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

912. Dunque ogni differenziale frazionaria e razionale si integra o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo. La difficoltà consiste nel trovare i fattori di Q, difetto piuttosto dell' Algebra che del metodo d' integrazione. Notiamo alcuni casi in cui un rotto radicale può rendersi razionale.

913. Sia $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+xx}{x+\sqrt[4]{x}}\right)dx$: ridotti i radicali allo stesso grado (146) verrà $\frac{dx(\sqrt[12]{x^4}+x\sqrt[12]{x^6}+x^2)}{x+\sqrt[12]{x^3}}$, e fatto $\sqrt[12]{x}=z$, onde $x=z^{12}$, $dx=12z^{11}dz$, la differenziale è razionale e però integrabile.

Sia X una funzione razionale di x e $dy=Xdx\sqrt{(a+bx+cx^2)}^{\pm 1}$; cerco i due fattori di $a+bx+cx^2$, e se son reali si troverà x per la nota formula (368. 8°.), e quindi dx, dopo di che si potrà integrare. Se per esempio, $dy=dx\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}$, si farà (368. 8°.) $\pm a^2\mp x^2=Q=\frac{(x+a)(\pm a\mp x)}{(\pm a\mp x)^2}=\frac{x+a}{\pm a\mp x}=z^2$, onde $x=\frac{\mp a+az^2}{z^2\pm 1}$, $dx=\frac{\pm 4azdz}{(z^2\pm 1)^2}$, e $\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}=\frac{2az}{z^2\pm 1}$; dunque $dy=\frac{\pm 8a^2z^2dz}{(z^2\pm 1)^3}$. La formula col segno + si integra riducendo $\int dz(z^2+1)^{-1}$ a $\int z^2dz(z^2+1)^{-3}$ (906), il che dà $\int z^4dz(z^2+1)^{-3}$; onde poi riducendo questa a $\int z^2dz(z^2+1)^{-3}$ (903), si trova $8a^2\int z^2dz(1+$

$z^2)^{-3} = \frac{2a^2z^3}{(1+z^2)^2} - \frac{a^2z}{1+z^2} + a^2 \times arc\,tang\, z + C$, ovvero sostituito il valor di z, $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \times arc\,tang \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. Ma la formula col segno − si integra al solito (908) e si ha $\int -\frac{8a^2z^2dz}{(z^2-1)^3} = -\frac{a^2}{2}\,l\,\frac{z+1}{z-1} + \frac{a^2z}{2(z+1)^2} + \frac{a^2z}{2(z-1)^2} + C$, ovvero sostituito il valor di z (e osservando che $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)^2}{z^2-1} = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$), $\int dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\,l\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + C$.

Se $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}}$, fatto come prima $\frac{x+a}{\pm a \mp x} = z^2$, sarà $dy = \frac{\pm 2dz}{z^2 \pm 1}$; e col + verrà $y = 2 \times arc\,tang \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, col − si avrà $y = l\,\frac{C}{a}\,[x+\sqrt{(x^2-a)}]$ (907).

914. Se i fattori di $a+bx+cx^2$ sono immaginarj, faccio svanire il secondo termine ponendo $x+\frac{b}{2c} = z$ ed ho $Zdz \times \sqrt{[z^2+c^2]}^{\pm 1}$. Sia dunque $z^2+c^2 = Q$, onde fatto nella nota formula (368. 4°.) $a=1$, $A=u$, sarà $z = \frac{u^2-c^2}{2u}$ e $dz = \frac{du}{2u^2}(u^2+c^2)$, dopo di che si integrerà. Così se $dy = dx\sqrt{(x^2+a^2)}^{\pm 1}$, avremo $x = \frac{u^2-a^2}{2u}$, $u = x+\sqrt{(x^2+a^2)}$, $dx = \frac{du}{2u^2}(u^2+a^2)$, $\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{u^2+a^2}{2u}$, onde $dy = u^{-1}du(u^2+a^2)^{1\pm 1} \times (2u)^{-1\mp 1}$, cioè col segno di sopra, $dy = \frac{du(u^2+a^2)^2}{4u^3} = \frac{udu}{4} + \frac{a^2du}{2u} + \frac{a^4du}{4u^3}$, ed $y = C + \frac{u^4-a^4}{8u^2} + \frac{a^2}{2}\,lu$: ma $\frac{u^4-a^4}{8u^2} = \left(\frac{u^2-a^2}{4u}\right)\left(\frac{u^2+a^2}{2u}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}$; dunque $y = C +$

$\frac{x}{2}\sqrt{(x^2 \mp a^2)} \mp \frac{a^2}{2} l[\sqrt{(x^2 \mp a^2)} + x]$. Col segno di sotto, $dy = \frac{du}{u}$ ed $y = lC[\sqrt{(x^2 + a^2)} + x]$.

Metodi di integrar per Serie.

915. Quando una differenziale non ammette integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora l'ultimo compenso. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si ha una serie di termini monomj, le cui integrali riunite danno un valore approssimato di $\int X dx$. Per esempio, l' integrale di $\frac{dx}{a+x}$ è $l(a+x)$ e $\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} -$ ec. (273); dunque $\int \frac{dx}{a+x}$ ovvero $l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ ec. $+ C$: se si fa $x = 0$, sarà $C = la$, e $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ ec., onde $l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} -$ ec. Supponghiamo $\frac{x}{a} = \frac{z}{a+z}$, ed avremo $l(a-x) = 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \frac{z^2}{2(a+z)^2} -$ ec.; dunque $l(a+z) = la + \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} +$ ec., serie tanto più convergente, quanto sarà z minor di a. Per esempio $l\,11 = l(10+1) = l\,10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.11^2} +$ ec. $= 2,397$ ec.

Così si ha $dy = \frac{dx}{1+xx} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx +$ ec. (273): ed $y = arc.\,tang\,x$ (850) $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ ec.

Così $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} + \frac{1.3.5x^6}{2.4.6} + \text{ec.}\right)$ (161); ed $y = arc.\,sen\,x$ (850) $= x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} +$ ec., integrale a cui non vi è co-

stante da aggiungere. Sia $x=1$, e la circonferenza $=\pi$, sarà $y=\frac{\pi}{4}=1+\frac{1.1}{2.3}+\frac{1.3.1}{2.4\ 5}+\frac{1.3.5.1}{2.4.6.7}+$ ec. Se $x=\frac{1}{2}$, l'arco diventa $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1.1}{2.3.2^3}+\frac{1.3.1}{2.4.5.2^5}+\frac{1.3.5.1}{2.4.6.7.2^7}+$ ec.

916. Bastino questi esempj: ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $Xx=\int Xdx+\int xdX$ dà $\int Xdx=Xx-\int xdX$. Sia $dX=X'dx$; dunque $\int xdX=\int X'xdx$ e fatto $xdx=dz$ onde $\frac{x^2}{2}=z$, sarà $\int X'dz=X'z-\int zdX'=\frac{1}{2}(X'xx-\int xxdX')$. Sia $dX'=X''dx$; dunque $\int x^2dX'=\int X''x^2dx$, e fatto $x^2dx=dz$ onde $\frac{x^3}{3}=z$, sarà $\int X''dz=X''z-\int zdX''=\frac{1}{3}(X''x^3-\int x^3dX'')$ ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione si trova $\int Xdx=Xx-\frac{x^2}{2}X'+\frac{x^3}{2.3}X''-\frac{x^4}{2.3.4}X'''+\ldots\frac{x^5}{2.3.4.5}X''''-$ ec. ovvero, supposta dx costante, onde $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{ddX}{dx}=dX'$, $\frac{dX'}{dx}=X''=\frac{ddX}{dx^2}$ ec., si avrà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2dX}{2.dx}+\frac{x^3ddX}{2.3.dx^2}-\frac{x^4dddX}{2.3.4dx^3}+$ ec.

Es. Sia $X=\frac{1}{a+x}$, si avrà $\frac{dX}{dx}=\frac{-1}{(a+x)^2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=\ldots\frac{2}{(a+x)^3}$, $\frac{dddX}{dx^3}=\frac{-2.3}{(a+x)^4}$, ec. Dunque $\int Xdx=\int\frac{dx}{a+x}=\ldots\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec. $\ldots+C$, ovvero $l(a+x)=la+\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec., (891).

917. Sia $X=m(a+x)^{m-1}$, onde $\frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque $\int Xdx=(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec.

Fatto $x=0$, verrà $C=a^m$, ed $(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}$ + ec. Facendo $a+x=z$, avremo $z^m=(z-x)^m+mxz^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2z^{m-2}$ + ec., onde $(z-x)^m=z^m(1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}-$ ec.) . . $(z+x)^m=z^m(1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2.z^2}+$ ec.) .... $\frac{(z+x)^m}{z^m}=1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}+$ ec. ... e $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}}=\frac{z^m}{(z+x)^m}=1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m+1)x^2}{2.z^2}-$ ec.; dunque se $z+x=b$, avremo $(b-x)^m=b^m(1-\frac{mx}{b-x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}-$ ec.) e $(b+x)^m=b^m(1+\frac{mx}{b+x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}+$ ec.).

918. Sia $X=a^x la$, $\frac{dX}{dx}=a^x l^2a$, $\frac{ddX}{dx^2}=a^x l^3a$ ec., il che dà $\int Xdx=(852)\ a^x=C+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+\frac{1}{2.3}x^2l^2a-$ ec.). Sia $x=0$, si avrà $C=1$, ed $a^x=1+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.); dividendo per a^x, verrà $1=a^{-x}+xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.). Dunque $a^{-x}=1-xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.), e supposta x positiva, le sue potenze impari cangian segno, ed $a^x=1+xla+\frac{x^2l^2a}{2}+$ ec. (307).

919. Se $X=\frac{1}{1+x^2}$, la serie sarà troppo complicata. Pongo dunque $\frac{1}{1+x^2}=u$ onde $-\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}=du$; dunque $\int\frac{dx}{1+x^2}=\int udx=ux-\int xdu=\frac{x}{1+x^2}+\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}$. Pongo $\frac{1}{(1+x^2)^2}=u$ onde $-\frac{4xdx}{(1+x^2)^3}=du$, e fatto $2x^2dx=dz$ onde $\frac{2x^3}{3}=z$, sarà $\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}=\int udz=uz-\int zdu=\frac{2x^3}{3(1+x^2)^2}+\int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3}$. Pongo $\frac{1}{3(1+x^2)^3}=u$ onde $\frac{-6xdx}{3(1+x^2)^4}=du$, e fatto $2.4x^4dx=$

dz onde $\frac{2.4x^5}{5} = z$, sarà $\int \frac{2.4x^4 dx}{3(1+x^2)^3} = \int udz = uz - \int zdu = \frac{2.4x^5}{3.5(1+x^2)^3} + \int \frac{2.4.6x^6 dx}{3.5(1+x^2)^4}$ ec. Dunque $\int \frac{dx}{1+x^2} =$ (850) *Arco tang* $x = a = \frac{x}{1+xx} + \frac{2.x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} +$ ec. Dunque in generale poichè $x = tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a}$, sostituendo, e riducendo, si ha $a = cos\, a\,(sen\, a + \frac{2}{3} sen^3 a + \frac{2.4}{3.5} sen^5 a + \frac{2.4.6}{3.5.7} sen^7 a +$ ec. $) = \frac{sen\, 2a}{2}(1 + \frac{2}{3} sen^2 a + \frac{2.4}{3.5} sen^4 a + \frac{2.4.6}{3.5.7} sen^6 a +$ ec. $)$. Se $a = 45°$ e perciò $x = 1$, sarà la circonferenza $8a = \pi = 4(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2.3}{3.5.7} +$ ec. $)$.

Integrazione delle Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.

920. Vogliasi $\int Xdxl^n x$. Posto $lx = y$ e successivamente $Xdx = dz$, $zdy = du$, $udy = dt$, $tdy = ds$ ec., l' integrazion per parti (916) dà $\int Xdxl^n x = y^n z - ny^{n-1} u + n(n-1)y^{n-2} t - n(n-1)(n-2)y^{n-3} s +$ ec. $= l^n x \int Xdx - nl^{n-1} x \int \frac{dx}{x} \int Xdx + n(n-1) l^{n-2} x \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int Xdx - n(n-1)(n-2) l^{n-3} x \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int Xdx$ ec. Così se $n = 3$, $X = x^4$, verrà $\int Xdx = \frac{x^5}{5}$, $\int \frac{dx}{x} \int Xdx = \frac{x^5}{5^2}$ ec., e $\int x^4 dx l^3 x = \frac{x^5}{5}(l^3 x - \frac{3l^2 x}{5} + \frac{6lx}{5^2} - \frac{6}{5^3}) + C$.

921. Se n sia negativa, fatto $lx = y$ e successivamente $d(Xx) = X'dx$, $d(X'x) = X''dx$ ec., verrà $dx = xdy$, e con lo stesso metodo s' avrà $\int \frac{Xdx}{l^n x} = \int \frac{Xxdy}{y^n} = - \frac{x}{(n-1)l^{n-1}x}(X + \frac{X'lx}{n-2} + \frac{X''l^2 x}{(n-2)(n-3)} +$ ec. $) + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{X^{(n-1)}dx}{lx}$. Così se $n = 3$ ed $X = 2x(lx - 1)$, si ha $X' = 2x(2lx - 1)$,

$2x(2lx-1)$, $X''=8xlx$, e $\int \frac{2xdx(lx-1)}{l^3x} = \frac{-x}{2l^2x}$ [$2xlx - 2x + 2xlx(2lx-1)$] $+ \frac{1}{2}\int \frac{8xdxlx}{lx} = \frac{x^2}{l^2x} + C$.

922. Debba ora integrarsi l' esponenziale $a^{mx}Xdx$. Posto $a^{mx}dx = dz$, onde $\frac{a^{mx}}{mla} = z$ (852), e fatto successivamente $dX = X'dx$, $dX' = X''dx$ ec., verrà col metodo stesso $\int a^{mx}Xdx = \frac{a^{mx}}{mla}(X - \frac{X'}{mla} + \frac{X''}{m^2l^2a} - \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{m^nl^na}) \mp \ldots \frac{1}{m^{n+1}l^{n+1}a}\int a^{mx}X^{(n+1)}dx$, ove il segno di sopra è per un numero pari n d'apici, ed n è determinata da $X^{(n+1)} =$ *Costante*. Così se $m=3$ ed $X = 3x^2(xla+1)$, si ha $X' = 3x(3xla+2)$, $X'' = 6(3xla+1)$, $X''' = 18la = C$, onde $n+1=3$, $n=2$ e $\int 3a^{3x}x^2dx(xla+1) = \frac{a^{3x}}{3la}$ [$3x^2(xla+1) - \frac{3x(xla+2)}{3la} + \frac{6(3xla+1)}{9l^2a}$] $- \frac{1}{27l^3a}\int 18a^{3x}dxla = a^{3x}x^3 + C$.

923. Se $a=e$, numero il cui logaritmo iperbolico è 1, si ha $\int e^{mx}Xdx = \frac{e^{mx}}{m}(X - \frac{X'}{m} + \frac{X''}{m^2} - \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{m^n}) \mp \ldots \frac{1}{m^{n+1}}\int e^{mx}X^{(n+1)}dx$. Così se $m=2$, ed $X = 2(a-x)(a-x-1)$, verrà $X' = 2(2x-2a+1)$, $X'' = 4 = C$, onde $n+1=2$, $n=1$ e $\int 2e^{2x}(a-x)(a-x-1)dx = \frac{e^{2x}}{2}$ [$2(a-x)(a-x-1) - 2x + 2a - 1$] $+ \int e^{2x}dx = e^{2x}(a-x)^2 + C$.

924. Sia anche da integrarsi $\frac{a^xdx}{X}$. Poichè $a^x = 1 + xla + \frac{1}{2}x^2l^2a +$ ec. (918), verrà $\int \frac{a^xdx}{X} = \int \frac{dx}{X} + la\int \frac{xdx}{X} + \frac{1}{2}l^2a\int \frac{x^2dx}{X} +$ ec. Onde $\int \frac{e^xdx}{x} = C + lx + x + \frac{x^2}{4} +$ ec.; e se $e^x = z$, si avrà $\int \frac{dz}{lz} = C + llz + lz + \frac{l^2z}{2.2} + \frac{l^3z}{3.2.3} +$ ec.:

e poichè $\int\frac{dz}{zlz}=llz$ (860) $=y$, sarà $\int\frac{dz}{lz}=\int z\cdot\frac{dz}{zlz}=$ . . . $\int zdy=zy-\int ydz=zllz-\int llzdz$, e però $\int llzdz=zllz-\int\frac{dz}{lz}=zllz-C-llz-lz-$ ec.

925. Infine poichè $x^{mx}=1+mxlx+\frac{m^2x^2l^2x}{2}+$ ec., sarà $\int x^{mx}dx=\int dx+m\int xdxlx+\frac{m^2}{2}\int x^2dxl^2x+$ ec. $=$ (920) $x(1-\frac{mx}{2^2}+\frac{m^2x^2}{3^3}-$ ec.$)+mx^2lx(\frac{1}{2}-\frac{mx}{3^2}+\frac{m^2x^2}{4^3}-$ ec.$)+\frac{m^2x^3l^2x}{2}(\frac{1}{3}-\frac{mx}{4^2}+\frac{m^2x^2}{5^3}-$ ec.$)+$ ec. che nel caso di $x=1$, si riduce ad $1-\frac{m}{2^2}+\frac{m^2}{3^3}-\frac{m^3}{4^4}+$ ec.

Integrazione delle Quantità differenziali ove entrano Seni, Coseni ec.

926. Poichè (859) $\int dx\cos x=\operatorname{sen}x$, e $\int dx\operatorname{sen}x=-\cos x$, sarà $\int dy\cos ny=\frac{\operatorname{sen}ny}{n}$, e $\int dy\operatorname{sen}ny=-\frac{\cos ny}{n}$, $\int dz\times\cos z\operatorname{sen}^n z=\frac{\operatorname{sen}^{n+1}z}{n+1}$, e $\int dz\operatorname{sen}z\cos^n z=-\frac{\cos^{n+1}z}{n+1}$. Similmente $\int dy\operatorname{sen}y\cos ay=$ (619) $\frac{1}{2}\int dy\operatorname{sen}(a+1)y-\frac{1}{2}\int dy\operatorname{sen}(a-1)y=-\frac{\cos(a+1)y}{2(a+1)}+\frac{\cos(a-1)y}{2(a-1)}$. Sarebbe lo stesso per $dx\operatorname{sen}x\operatorname{sen}ax$, $dx\cos x\cos ax$ ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx\operatorname{sen}x\operatorname{sen}ax\cos bx$ ec. riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici per mezzo dei valori di $\operatorname{sen}a\cos b$, $\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$ ec.: ma per integrar $dx\operatorname{sen}^2x$, $dx\operatorname{sen}^3x$ ec. è preferibile il metodo seguente.

927. Vogliasi $\int dx\operatorname{sen}^n x$. Fatto $\operatorname{sen}x=y$, onde $dx=dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int dx\operatorname{sen}^n x=\int y^n dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ o a $\int dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}=arc.\operatorname{sen}y=x$ se n è pari, o a $\int ydy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}=-\cos x$ se n è impari, e restituiti quindi i valori,

ho $\int dx\, sen^n x = -\frac{\cos x}{n}(sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}sen^{n-3}x + \ldots \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}sen^{n-5}x + \text{ec.}) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}x$ presi $\frac{n}{2}$ termini se n è pari, e $-\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}\cos x$, presi $\frac{n-1}{2}$ termini se n è impari. Così $\int dx\, sen^6 x = C - \frac{\cos x}{6}(sen^5 x + \frac{5}{4}sen^3 x + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}sen\, x) + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}x$: e $\int dx\, sen^5 x = C - \ldots \frac{\cos x}{5}(sen^4 x + \frac{4 sen^2 x}{3} + \frac{4\cdot 2}{3})$.

928. Facciasi $x = 90° - z$; avremo $dx = -dz$, $sen\, x = \cos z$, $\cos x = sen\, z$, e $\int dz \cos^n z = \frac{sen\, z}{n}(\cos^{n-1}z + \frac{n-1}{n-2}\times \cos^{n-3}z + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}z + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)}\times \ldots \cos^{n-7}z + \text{ec.}) + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}z$ se n è pari; e se è impari, $+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}sen\, z$, presi i termini come sopra. Per esempio, $\int dy \cos^5 y = C + \frac{sen\, y}{5}(\cos^4 y + \frac{4}{3}\cos^2 y + \frac{4\cdot 2}{3\cdot 1})$; e $\int dy \cos^6 y = C + \frac{1}{6}sen\, y(\cos^5 y + \frac{5}{4}\cos^3 y + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}\cos y) + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}y$.

929. Vogliasi anche $\int dy\, sen^m y \cos^n y$. Fatto $\cos y = x$, onde $dy = -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int dy\, sen^m y \cos^n y = -\int x^n dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ o a $-\int dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \int dy\, sen^m y$ se n è pari, o a $\int x dx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \frac{sen^{m+1}y}{m+1}$ se n è impari: e restituiti i valori, ho $\int dy\, sen^m y \cos^n y = C + \ldots \frac{sen^{m+1}y}{m+n}(\cos^{n-1}y + \frac{(n-1)\cos^{n-3}y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\cos^{n-5}y}{(m+n-2)(m+n-4)} +$

ec.) $+ \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{(m+n)(m+n-2)\dots m+2}\int dy\, sen^m y$ se n è pari, e se è impari $+ \frac{(n-1)(n-3)\dots 2\, sen^{m+1} y}{(m+n)(m+n-2)\dots m+1}$, presi i termini come sopra (927).

930. Facciasi $y=90°-z$; avremo $\int dz \cos^m z\, sen^n z = C - \frac{\cos^{m+1} z}{m+n}\left(sen^{n-1} z + \frac{(n-1)\, sen^{n-3} z}{m+n-2} + \dots\dots\dots\dots \frac{(n-1)(n-3)\, sen^{n-5} z}{(m+n-2)(m+n-4)} + \text{ec.}\right) + \frac{(n-1)(n-3)\dots 1.\int dz \cos^m z}{(m+n)(m+n-2)\dots m+2}$ (928) se n pari, e $- \frac{(n-1)(n-3)\dots 2\cos^{m+1} z}{(m+n)(m+n-2)\dots m+1}$ se n è impari.

Per esempio, la prima formula dà $\int dy \cos^3 y\, sen^5 y = C + \frac{1}{8} sen^6 y(\cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8} sen^6 y(\frac{4}{3} - sen^2 y)$, e la seconda $\int dy \cos^3 y\, sen^5 y = C - \frac{1}{8}\cos^4 y(sen^4 y + \frac{2}{3} sen^2 y + \frac{1}{3})$. Bisogna dunque che i due risultati siano eguali, o differiscan solo d' una quantità costante, che nel caso nostro è $\frac{1}{24}$, riducendo tutto in seni e osservando che $\cos^4 = (1 - sen^2)^2$.

931. Consideriamo ora i rotti nei quali entrano seni ec.: 1°. $\int \frac{dy}{sen\, y} = \int \frac{dy}{2 sen\frac{1}{2}y \cos\frac{1}{2}y}$ (621) $= \int \frac{\frac{1}{2}dy}{\cos^2\frac{1}{2}y\, tang\frac{1}{2}y} = l\, tang\frac{1}{2}y$ (849.851). Fatto $y=90°-z$, avremo 2°. $\int \frac{dz}{\cos z} = -l\, tang(45° - \frac{z}{2}) = -l \cot(45° + \frac{z}{2})$ (613.3°.) $= l\, tang(45° + \frac{z}{2})$ (610): 3°. $\int \frac{dy \cos y}{sen\, y} = \int \frac{d(sen\, y)}{sen\, y} = l\, sen\, y = \int dy \cot y$: 4° $\int \frac{dy\, sen\, y}{\cos y} = \int \frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -l \cos y = l \sec y = \int dy\, tang\, y$: 5° $\int \frac{dy}{sen\, y \cos y} = \int \frac{dy}{\cos^2 y\, tang\, y} = l\, tang\, y$.

932. Posto ciò, cerco $\int \frac{dy}{sen^m y}$. Fatto $sen\, y = x^{-1}$, onde

$dy = -x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, riduco (903) $\int\frac{dy}{sen^m y} = -\ldots$ $\int x^{m-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ o a $-\int xdx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \int\frac{dy}{sen^2 y} =$ $-\cot y$ (850) se m è pari, o a $-\int dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \ldots$ $\int\frac{dy}{sen\, y} = l\,tang\,\frac{1}{2}y$ (931) se m è impari, e restituiti quindi i valori, ho $\int\frac{dy}{sen^m y} = -\frac{\cos y}{m-1}\left(\frac{1}{sen^{m-1}y} + \frac{m-2}{(m-3)\,sen^{m-3}y} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)\,sen^{m-5}y} + \text{ec.}\right) - \frac{(m-2)(m-4)\ldots 2\cot y}{(m-1)(m-3)\ldots 1}$ presi $\frac{n-2}{2}$ termini se m è pari; e se è impari, $+\frac{(m-2)(m-4)\ldots 1}{(m-1)(m-3)\ldots 2}\times$ $l\,tang\,\frac{1}{2}y$, presi $\frac{n-1}{2}$ termini.

933. Suppongasi $y = 90° - z$, e sarà $\int\frac{dz}{\cos^m z} = \frac{sen\, z}{m-1}$ $\left(\frac{1}{\cos^{m-1}z} + \frac{m-2}{(m-3)\cos^{m-3}z} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)\cos^{m-5}z} + \text{ec.}\right) +$ $\frac{(m-2)(m-4)\ldots 2\,tang\,z}{(m-1)(m-3)\ldots 1}$ se m è pari; e se è impari, $+$ $\frac{(m-2)(m-4)\ldots 1}{(m-1)(m-3)\ldots 2}\,l\,tang\left(45° + \frac{z}{2}\right)$ (931), presi i termini come prima. Per esempio $\int\frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{sen\, y}{6}\left(\frac{1}{\cos^6 y} + \frac{5}{4\cos^4 y} + \frac{5\cdot 3}{4.2.\cos^2 y}\right) + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6.4.2}\,l\,tang\left(45° + \frac{y}{2}\right)$.

934. E' dunque facile integrar la formula $\frac{dy\cos^m y}{sen^n y}$; poichè se $m = 2k+1$, si ha $\frac{dy\cos^{2k+1}y}{sen^n y} = \frac{d(sen\, y)}{sen^n y}(1 - sen^2 y)^k$, che fatto $sen\, y = z$, diventa $z^{-n}dz(1-z^2)^k$ integrabile, giacchè quì k è numero intero e positivo (858). Se $m = 2k$, allora $\frac{dy\cos^{2k}y}{sen^n y} = \frac{dy(1-sen^2 y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s' integrerà per mezzo della formula $\int\frac{dy}{sen^m y}$ (932). Lo stesso

satebbe per $\int \frac{dy\, sen^m y}{cos^n y}$ e $\int \frac{dy}{sen^m y\, cos^n y}$.

Integrazione delle Differenziali a più Variabili.

935. Se T sia una funzione di più variabili x, y, z ec., le differenze $d^x T$ di T per x, $d^y T$ di T per y, $d^z T$ di T per z ec., le quali si hanno facendo variar solamente o x o y o z ec, si chiamano *differenze parziali* di T: ed all'incontro le somme $\int^x T dx$, $\int^y T dy$, $\int^z T dz$ ec. che si hanno integrando per x o per y o per z ec., cioè considerando come variabile la sola x, la sola y, la sola z ec., posson dirsi *somme parziali* di T. Tale è la notazione che adottiamo per le differenze parziali; ella ci sembra più espressiva e meno equivoca di quante ne sono in uso tra gli Scrittori, i più dei quali indicano con $\frac{dT}{dx}dx$, $\frac{dT}{dy}dy$, $\frac{dT}{dz}dz$ ec. ciò che noi intendiamo per $d^x T$, $d^y T$, $d^z T$ ec Si osservi intanto, come per principio fondamentale di simili differenze, che supposto $T = \varphi(x, y)$ (821), sarà $d^x T = \varphi(x + dx, y) - T$ (826) e $d^y d^x T = \varphi(x + dx, y + dy) - d^y T - d^x T$: parimente $d^y T = \varphi(x, y + dy) - T$ e $d^x d^y T = \varphi(x + dx, y + dy) - d^x T - d^y T$; dunque $d^y d^x T = d^x d^y T$.

936. Data pertanto una differenziale $Pdx + Qdy$ a due variabili in cui P, Q son funzioni di x, y, se T ne sia l'integrale, avremo $dT = Pdx + Qdy$; dunque supponendosi x, y indipendenti l'una dall'altra, si potranno formar le particolari equazioni $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$: e poichè $d^y d^x T = dx d^y P$, $d^x d^y T = dy d^x Q$ e $d^y d^x T = d^x d^y T$ (935), sarà $dx d^y P = dy d^x Q$ e $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$, cioè *una differenziale* Pdx + Qdy *sarà esatta o potrà integrarsi, se la differenza parziale di* P *per* y *divisa per* dy *eguagli quella di* Q *per* x *divisa per* dx.

Dunque 1°. giacchè $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$, sarà $d^x T + d^y T = Pdx + Qdy = dT$, e in generale da V, funzione di x, y,

si ha sempre $d^x V + d^y V = dV$: 2°. se varj la sola x e poi la sola y, sarà I^a. $T = \int^x Pdx + C$, II^a. $T = \int^y Qdy + C'$ e potrà esser $C = \varphi(y)$, $C' = \varphi(x)$: 3°. le due espressioni $\int^x Pdx, \int^y Qdy$ avranno *comuni* tutti i termini ove si trova xy; onde i termini *non comuni* in quelle espressioni conterranno x senza y in $\int^x Pdx$, ed y senza x in $\int^y Qdy$ (833): 4°. poichè dalla I. equazione si ha $d^y T (= Qdy) = d^y \int^x Pdx + dy\varphi'(y)$ (853), dalla II. $d^x T (= Pdx) = d^x \int^y Qdy + dx\varphi'(x)$, sarà (860) $\varphi(y) = \int (Qdy - d^y \int^x Pdx)$, $\varphi(x) = \int (Pdx - d^x \int^y Qdy)$ e perciò III. $T = \int^x Pdx + \int (Qdy - d^y \int^x Pdx)$, IV. $T = \int^y Qdy + \int (Pdx - d^x \int^y Qdy)$.

937. Per render più comode queste integrali, chiamo S i termini *comuni* o simili, e D, D' i *non comuni* o dissimili in $\int^x Pdx, \int^y Qdy$ (936.3°.), onde $\int^x Pdx = S + D$, $\int^y Qdy = S + D'$. Sostituiti questi valori nella somma della III. e IV. equazione, verrà $2T = D + D' + 2S + \int (Pdx + Qdy) - \int (d^y D + d^y S + d^x D' + d^x S)$: ma $\int (Pdx + Qdy) = T$, $d^y S + d^x S = dS$ (936. 1°.), $d^y D = 0$, $d^x D' = 0$ (936.3°.); dunque $T = D + D' + S$, cioè *l'integrale d'una differenziale esatta* Pdx + Qdy *si ha dalle somme parziali di* Pdx *per* x *e di* Qdy *per* y, *presi una sola volta i termini simili*. Così giacchè la differenziale $(3x^2 + 2bxy - 3y^2)dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2)dy$ è esatta, trovandosi $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx} = 2bx - 6y$, integro $3x^2dx + 2byxdx - 3y^2dx$ per x e viene $x^3 + byx^2 - 3xy^2$; integro $bx^2dy - 6xydy + 3cy^2dy$ per y ed ho $bx^2y - 3xy^2 + cy^3$: onde $T = D + D' + S = x^3 + byx^2 - 3y^2x - cy^3 + C$. Ma poichè talora è necessaria qualche sostituzione per giunger più facilmente all' integrali, ne porremo quì varj esempj.

I. $\int \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$: fatto $\frac{y}{x} = z$, si ha $\int \frac{x^2dz}{(x-zx)^2} = \int \frac{dz}{(1-z)^2}$.

II. $\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$: fatto $\frac{x}{y} = z$, si ha $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$.

III. $\int \frac{3xdx + ydx - xdy - 3ydy + 2dy\sqrt{a}\sqrt{(x+y)}}{2\sqrt{(x+y)}}$: fatto $\sqrt{(x+y)} = z$, si ha $\int [(2z - \sqrt{a})dx + (2x - 3z^2 + 2z\sqrt{a})dz]$.

IV. $\int \frac{3(a+y)(3xdy + dx) + xdylx}{3x\sqrt[3]{(a+y)^2}}$: fatto $\sqrt[3]{(a+y)} = z$, si ha $\int (zx^{-1}dx + dzlx + 9z^3dz)$.

V. $\int \frac{-(5xy + 6y^2)dx - (5xy + 6x^2)dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x + y = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $dx + dy = 2zdz$, moltiplico la I. per la IV. e la II. per la III. ed ho $xydx + xydy = 2pzdz$, ed $x^2dy + xydx + xydy + y^2dx = z^2dp$; dunque $5xydx + 5xydy = 10pzdz$ e $6x^2dy + 6y^2dx = 6z^2dp - 12pzdz$; sommate queste due equazioni, la data integrale diviene $\int (p^{-3}dz - 3zp^{-4}dz)$.

VI. $\int \frac{a(x^3dy + y^3dx)}{(x^2 + y^2)\sqrt{(a^2x^2 + a^2y^2 - x^2y^2)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x^2 + y^2 = z^2$ onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx + ydy = zdz$, moltiplico come sopra ed ho $x^2ydx + xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx + xy^2dy + y^3dx = z^2dp$; dunque sottratte queste due equazioni, la data diviene $\int \frac{a(zdp - pdz)}{z\sqrt{(a^2z^2 - p^2)}}$, ove fatto $\frac{p}{z} = u$, si ha $\int \frac{adu}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}$.

VII. $\int \frac{(2x^2y - y^3)dx + (x^3 - 2xy^2)dy}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x^2 - y^2 = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx - ydy = zdz$, moltiplico al solito ed ho $yx^2dx - xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx - xy^2dy - y^3dx = z^2dp$; dunque sommando queste due equazioni, la data diviene $\int (pdz + zdp)$.

938. Data una differenziale a tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz$, e chiamata la sua integrale T, sarà $d^x T = Pdx$, $d^y T = Qdy$, $d^z T = Rdz$; dunque (936) perchè la differenziale sia completa o possa integrarsi, bisogna che sia $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$, $\frac{d^z P}{dz} = \frac{d^x R}{dx}$, $\frac{d^z Q}{dz} = \frac{d^y R}{dy}$.

939. Avve-

939. Avverandosi queste condizioni, *l'integrale* T = D + D′ + D″ + S *si otterrà integrando* Pdx *per* x, Qdy *per* y, Rdz, *per* z, *presi tutti i termini diversi e una sola volta i simili* (937). Così poichè in $(2y^2x + 4bz^2x^3)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)}} + 3y^2 + 2x^2y\right)dy + \left(4z^3 + 2bx^4z + \frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)dz$ si avverano le tre condizioni, viene $\int^x Pdx = y^2x^2 + bz^2x^4$, $\int^y Qdy = \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + x^2y^2$, $\int^z Rdz = z^4 + bx^4z^2 + \sqrt{(y^2+z^2)}$, onde $T = D + D' + D'' + S = y^2x^2 + bz^2x^4 + \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + z^4 + C$. Così si trovan le condizioni per le differenziali di un più gran numero di variabili, e si integra quando hanno luogo.

940. Data ora la differenziale del second'ordine $Pd^2x + Qdx^2$ ove P, Q son funzioni di x, prendo quella del primo Pdx, la cui differenziale è $Pd^2x + dxdP$; dunque paragonando la data con questa, verrà $Qdx = dP$, equazione che avverandosi dà $\int(Pddx + Qdx^2) = Pdx$. Così $mx^{m-1}ddx + m(m-1)x^{m-2}dx^2$ è integrabile, poichè $dP = m(m-1)x^{m-2}dx = Qdx$, e l'integrale è $mx^{m-1}dx$, che nuovamente integrata dà $x^m + C$.

941. Con dx costante la differenziale è Qdx^2, onde $\int Qdx^2 = dx\int Qdx +$ la costante Cdx. Per esempio $\int dx^2(1 - x^2) = dx\int(dx - x^2dx) = dx\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + Cdx$, e nuovamente integrando, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^4 + Cx + C'$.

942. Data la differenziale del terz' ordine $Rd^3x + Sdxd^2x + Tdx^3$, prendo quella del secondo $Pd^2x + Qdx^2$, che differenziata dà $Pd^3x + (dP + 2Qdx)d^2x + dQdx^2$, ed ho $R = P$, $Sdx = dP + 2Qdx$, $Tdx = dQ$ e perciò $Q = \int Tdx + C$. Sostituiti i valori di P, Q nella seconda equazione, verrà $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2dx} - \int Tdx = C$, equazione che avverandosi, dà l'integrale $Rddx + dx^2(\int Tdx + C)$. Per esempio $x^2d^3x + 2x^3dxddx + (3x^2 - 1)dx^3$ ha la condizione necessaria, e l'integrale è $x^2ddx + dx^2(x^3 - x + C)$.

943. Se dx è costante, si avrà l' integrale $dx^2(\int Tdx + C)$; dunque integrando, $dx\int(dx\int Tdx + C) + C'dx$, e di nuovo integrando, $\int(dx\int dx\int Tdx + C) + C'x + C''$. Così $dx^2\int x^m dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. Nel modo stesso si trovano le condizioni e le integrali di differenziali più elevate.

944. Sia la differenziale del second' ordine a due variabili $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$. Prendo la differenziale di $Adx + Bdy$, nella quale A e B son funzioni qualunque di x, y, ed ho $Addx + Bddy + dAdx + dBdy$, che fatto $dA = d^x A + d^y A$, $dB = d^x B + d^y B$, diviene $Addx + Bddy + \frac{d^x A}{dx}.dx^2 + \left(\frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx}\right)dxdy + \frac{d^y B}{dy}.dy^2$; onde $P = A$, $Q = B$, e perciò $R = \frac{d^x P}{dx}$, $S = \frac{d^y P}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, e $T = \frac{d^y Q}{dy}$. Verificandosi queste condizioni, l' integrale sarà $Pdx + Qdy$: tanto avviene in $yddx - xddy$ il cui integrale è $ydx - xdy$.

945. Con dx costante, dovrà integrarsi $Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$, che nascendo come prima da $Adx + Bdy$, darà $Q = B$, $R = \frac{d^x A}{dx}$, $S = \frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, $T = \frac{d^y Q}{dy}$; dunque $d^x A = Rdx$, $A = \int^x Rdx + \varphi(y)$, ove essendo $d^y A\,(= Sdy - \frac{d^x Qdy}{dx}) = d^y \int^x Rdx + dy\varphi'(y)$, verrà $\varphi(y) = \int(Sdy - \frac{d^x Qdy}{dx} - d^y\int^x Rdx)$; e le condizioni per integrare saranno $S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y(\int^x Rdx + \varphi(y))}{dy}$, $T = \frac{d^y Q}{dy}$; onde l' integrale $Adx + Bdy$ diverrà $dx\int^x Rdx + dx\,\varphi(y) + Qdy + Cdx$. Per esempio $(ax + x^2)ddy + ydx^2 + (3x + 2y + a)dxdy$, presa dx costante, ha le condizioni prescritte, e l' integrale è $(xy + y^2 + C)dx + (ax + x^2)dy$. Nel modo stesso si trovan le condizioni per più di due variabili.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE.

Le applicazioni del Calcolo Integrale si estendono a tutte le parti delle Matematiche; ma noi ci limiteremo a quelle che son puramente geometriche e che servon di fondamento all' altre (840).

Quadratura delle Curve.

946. Sia la curva AM con le coordinate $AP = x, PM =$
y e vogliasi la quadratura dello spazio $AMP = Q$. Condotta 180.
l'ordinata mp e la Mr parallela a Pp, sarà $Pp = Mr = \delta x, rm = \delta y$, e lo spazio $MmpP = (y + \frac{1}{2}\delta y)\,\delta x$, onde $\frac{\delta Q}{\delta x} > y + \frac{1}{2}\delta y$: dunque presi i limiti (838) o fatto $\delta y = 0$ (836), verrà $dQ = ydx$ e $Q = AMP = \int ydx + C$, onde $AMQ = \int xdy + C$: ove si noti 1°. che se le coordinate facciano un angolo obliquo $P = \varphi$, sarà (644) $AMP = sen\,\varphi \int ydx + C$: 2°. che per integrar queste formule deve y esser data per x o x per y.

947. Es. I. Sia un quadrante di circolo descritto col
centro A e col raggio a: si avrà $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ e $\int ydx =$ 181.
$AQMP = \int dx \sqrt{(aa - xx)} + C = C + ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3a} - \frac{1 \cdot x^5}{2.4\,5a^3} - \frac{1 \cdot 3x^7}{2.4.6.7a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^9}{2.4.6\,8.9a^7} -$ ec. (161). Fatto $x = 0$, sarà $AQMP = 0$, e però $C = 0$; dunque $AQMP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} -$ ec.

II. Nell'ellisse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; dunque $\int ydx = \ldots \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{ec.}\right)$.

III. Nella parabola, $ydx = dx\sqrt{px}$ e $\int ydx = \frac{2x}{3}\sqrt{px} =$ 180.

180. $\frac{2}{3}xy$. L'equazione alle parabole di tutti i gradi è $y^m = x^n a^{m-n}$; dunque $mly = nlx + (m-n)la$, $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$ ed $m:n :: ydx : xdy :: \int ydx : \int xdy ::$ AMP : AMQ: onde lo spazio AMP sta al rettangolo circoscritto APMQ $:: m : m+n$.

IV. Nell' iperbola equilatera, $xy = aa$ ed $ydx = \frac{aadx}{x}$; dun-
182. que $\int ydx = aalx + C$. Se si voglion prendere gli spazj dall' origine A, lo spazio sarà $= 0$ quando $x = 0$; dunque $C = -aal. = \infty$ (308), e lo spazio Q'APMN $= aalx - aal0 = \infty$. Se $x = AD = a$, allora lo spazio Q'ADBN $= aala - aal0$; dunque BDPM $= aalx - aala = aal\frac{x}{a}$. Quindi se la potenza $a^2 = 1$, sarà BDPM $= lx$, logaritmo naturale dell' ascissa AP $= a + x$: ed ecco perchè chiamansi iperbolici i logaritmi del modulo 1 (302).

V. Nella cicloide AEB', $xdy = dx\sqrt{(2ax - x^2)}$ (873) e
172. $\int xdy$ (= ACR) (946) $= \int dx\sqrt{(2ax - x^2)} =$ ALQP' (873. 946); dunque tutto lo spazio AED eguaglia tutto il semicircolo AQB', onde lo spazio cicloidale è triplo del circolo genitore.

183. VI. Nella cissoide, $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ (787) e $\int ydx =$ AKMPA $= \int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} =$ ACONP (I); e se si riduca $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (905) $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$, ovvero APMKA = 3ACONP − 4ANP = 3ACONA − ANP. Dunque poichè quando $x = a$, il triangolo ANP svanisce e il segmento ACONA si cangia nel semicircolo ACNB, lo spazio infinitamente lungo MKABQ è triplo del semicircolo genitore.

184. VII. Nella logaritmica, $ydx = Ady$ (862), e $\int ydx =$ BAPM $= Ay + C$: ma quando $y = 1 =$ AB, lo spazio ABMP diventa nullo; dunque $C = -A$, e ABMP $= A(y-1) =$

al rettangolo OIQM. Se si fa $y=0$, si avrà lo spazio infinitamente lungo BXYA $= - A =$ al rettangolo PQIT. 184.

VIII Sia una curva BM che abbia per equazione $y = x^x$; si avrà (925) lo spazio ABMP $= \int x^x dx = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \text{ec.}\right) + xxlx\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2} \times \ldots \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) + \text{ec.}$ Se $x = AP = PM = 1$, lo spazio ABMP $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{ec.} = 0{,}783430510712$ ec. 185.

IX. Sia la curva dei seni AMA′M′ ec. la cui equazione è $x = arc\ sen\, y$ ovvero $y = sen\ x$; si avrà APM $= \int dx\, sen\, x = C - cos\, x$. Faccio $x = 0$, sarà $C = 1$, APM $= 1 - cos\, x$. Sia $x = 180^\circ = c$, si avrà AMA′ $= 2$, doppio del quadrato del raggio. Se $x = 2c =$ AA″, si avrà lo spazio AMA′A + A′M′A″A′ $= 0$, il che è chiaro, poichè l' uno è positivo e l' altro negativo. In generale se $x = 2kc$, lo spazio sarà zero; e se $x = (2k+1)c$, lo spazio sarà $= 2$. Posta l' origine degli x nel punto A, medio di A′A′, la retta x diverrà $\frac{1}{2}c - x = 90^\circ - x$, e si avrà $y = cos\, x$; onde lo spazio ABMP $= sen\, x$, lo spazio ABA′A $= 1$, e A′MBA′A $= 0$, o non attendendo alle sue due parti positiva e negativa, A′MBA′A $= 2$. 186. 187.

X. Nella curva CE a doppia curvatura volendo lo spazio CEF (parte della superficie curva CDEF normalmente alzata sulla curva CD (802)) essendo al solito CF $= x$, si ha $y = s = \int\sqrt{(dy^2 + dz^2)}$ (802); dunque $\int ydx$ diverrà $\int dx \int\sqrt{(dy^2 + dz^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2 = px$, $(y^2 + 2p^2)^3 = 9p^4 z^2$, verrà $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dz^2 = \frac{(y^2 + 2p^2)\, y^2 dy^2}{p^4}$, $\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{dy}{p^2}(p^2 + y^2)$, $\int\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = y + \frac{y^3}{3p^2}$, e $\int dx \sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \int\left(\frac{2y^2 dy}{p} + \frac{2y^4 dy}{3p^3}\right) = \frac{2y^3}{3p} + \frac{2y^5}{15p^3}$ senza costante, perchè $y = 0$ dà lo spazio $= 0$. 193.

948. Se l' ordinate partono da un punto fisso C, il rettangolo $pPMr$ di prima (946) diventa un triangolo CMr, e 188.

188. quindi lo spazio COMC $= \frac{1}{2}\int y dx + C$. Sia φ l'angolo che fa CM con una retta fissa CA; avremo $Mr = y d\varphi$ (644.628), e $COMC = \frac{1}{2}\int y^2 d\varphi + C$.

189. Esempio I. Sia la concoide AM, il suo polo P, $PM = y$, $QM = a$, $PB = b$, e l' angolo $APM = \varphi$; si avrà (647) $PQ = \frac{b}{\cos\varphi}$, ed $y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$; dunque lo spazio $APM = \frac{b^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm ab\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a^2}{2}\int d\varphi = \frac{b^2 \, tang\,\varphi}{2} \pm ab\, l\, tang(45° + \frac{\varphi}{2})$ (931) $+ \frac{1}{2}a^2\varphi$ senza costante; dunque poichè $PBQ = \frac{1}{2}b^2 tang\,\varphi$ (648), sarà $\pm APM \mp PBQ = ABQM = ab\, l\, tang(45° + \frac{1}{2}\varphi) \pm \frac{1}{2}a^2\varphi$, ed $AAMM = 2ab\, l\, tang(45° + \frac{1}{2}\varphi)$.

183. II. Nella cissoide se si fa $AB = a$, $AM = y$, $MAB = \varphi$, sarà $AQ = \frac{a}{\cos\varphi}$ (649), $AO = MQ = a\cos\varphi$ (645), $AP = y\cos\varphi$, $PM = y\, sen\,\varphi$, $y = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi$, ed $y^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - 2a^2 + a^2\cos^2\varphi$; dunque $AKMOA = \frac{a^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - a^2\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int d\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{2}a^2(tang\,\varphi + \frac{1}{4}sen\,2\varphi - \frac{3}{2}\varphi)$ (928). Dunque $AKMPA = AMP (= \frac{1}{2}y^2 sen\,\varphi\cos\varphi) - AKMOA = \frac{1}{2}a^2(\frac{3}{2}\varphi - \frac{5}{4}sen\,2\varphi + sen\,\varphi\cos^3\varphi)$. Ma $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{4}sen\,4\varphi + sen^3\varphi \times \cos\varphi$ (633) $= \frac{1}{4}sen\,4\varphi + sen\,\varphi\cos\varphi - sen\,\varphi\cos^3\varphi$ (610) e però $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}sen\,4\varphi + sen\,2\varphi)$; dunque $AKMPA = \frac{1}{2}a^2(\frac{3}{2}\varphi - sen\,2\varphi + \frac{1}{8}sen\,4\varphi)$. Fatto $\varphi = 90° = \frac{1}{2}\pi$ (521); si ha $sen\,2\varphi = 0 = sen\,4\varphi$ (611), è poichè $\frac{1}{4}a^2\varphi$ è il semicircolo AONB (520), sarà lo spazio infinitamente lungo $MKABQ = \frac{3}{4}a^2\varphi = 3AONB$.

188. III. Nella spirale d' Archimede, $AGFBN = x$, $AGFBA = c$, $CM = y$, $CA = a$, $Mr = \frac{ydx}{a}$, $d(COMC) = \frac{Mr.CM}{2}$ (948) $= \frac{y^2dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$ (797), $dx = \frac{cdy}{a}$; dunque $COMC = \frac{cy^3}{2.3a^2}$ senza

FIG.

costante; onde fatto $y=a$, lo spazio COMAC $=\frac{ac}{2.3}=$ al terzo di tutto il circolo. 188.

Non si è preso quì l' integrale $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi$ perchè questo non può estendersi al di là di $\varphi=360°$, altrimenti i triangoli elementari $\frac{1}{2}y^2 d\varphi$ conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari compresi tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria $\int y dx$ se più ordinate corrispondano alla stessa ascissa.

IV. Nella spirale iperbolica scemando x mentre cresce y (799), sarà CN (a) : Nn $(-dx)$ :: CM (y) : M$r=-\frac{ydx}{a}$; dunque COMC $=\frac{1}{2}\int\frac{-y^2dx}{a}$: ma $xy=ab$ (800), e però $-ydx=xdy=\frac{abdy}{y}$; dunque $-\frac{y^2dx}{a}=bdy$, e lo spazio compreso tra la curva e due ordinate $=\frac{1}{2}by+C$. 190.

V. Questo metodo può applicarsi anche alle curve che han l'ordinate parallele. Vogliasi per esempio la quadratura del settor parabolico AFM. Fatto l' angolo AFM $=\beta=2\varphi$ e perciò FM $=y=\frac{\frac{1}{4}p}{\cos^2\varphi}$ (751), sarà $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi=\frac{p^2}{16}\int\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi}=$ (933) $\frac{p^2}{16}\left[\frac{1}{3}\,sen\,\varphi\left(\frac{1}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}\right)\right]=\frac{p^2}{16}\left[\frac{1}{3}\,tang\,\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}+2\right)\right]$ $=$ (610) $\frac{1}{16}p^2\left(\frac{1}{3}tang^3\varphi+tang\,\varphi\right)$ senza costante se il settore cominci dal punto A. 128.

Quindi (sia detto quì di passaggio) in due parabole AM, A′M′ col fuoco ed asse medesimo e coi parametri p, p', i settori AFM, A′FM′ compresi tra due raggi vettori comuni, saran tra loro :: $p^2:p'^2$ :: FM^2 : FM$'^2$ :: $x^2:x'^2$ ec. (751). 117.

Rettificazione delle Curve.

949. Poichè (861) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, sarà l'arco AM $=s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}+C$ o l' ordinate sieno parallele o partano da un punto fisso. 191.

181. 950. Es. I. Nel circolo, $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, $dy^2=\frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$, $dx^2+dy^2=\frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}$, e QM $=s=\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(915)\ x+\frac{x^3}{2.3a^2}+\frac{1.3x^5}{2.4.5a^4}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6}+$ ec.; dunque l'arco MB $=y+\frac{y^3}{2.3a^2}+\frac{1.3y^5}{2.4.5a^4}+$ ec. (629).

180. II. Nella parabola, AM $=\int dy\sqrt{(1+\frac{4y^2}{p^2})}=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}=(914)\ C+\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}+\frac{p}{4}l[y+\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}]$. Facciamo $y=0$, e sarà $C=-\frac{p}{4}l\frac{p}{2}$; dunque AM $=\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}+\frac{p}{4}l2\left[\frac{y+\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}}{p}\right]$.

951. Può osservarsi che se col centro A e col semiasse
191. maggiore BA $=\frac{1}{2}p$ si descrive un'iperbola equilatera BN′, lo spazio ABN′Q sarà $\int xdy$ (946) $=\int dy\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$ (768); dun-
180. que AM $=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}=\frac{2}{p}\times$ ABN′Q e però AM $\times$ $\frac{1}{2}p=$ ABN′Q; onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell' iperbola e reciprocamente*.

III. Nell' ellisse, supposto il semiasse maggiore $=1$, sarà $y^2=b^2(1-x^2)$, e fatto $1-b^2=c^2$ (746), si ha BM $=$
192. $\int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}$, integrale che non può aversi con le regole precedenti. Bisogna dunque ridurre in serie: ma per maggior semplicità riducendo solamente $\sqrt{(1-c^2x^2)}$, avremo BM $=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1-\frac{c^2x^2}{2}-\frac{c^4x^4}{2.4}-\frac{1.3c^6x^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5c^8x^8}{2.4.6.8}-\right.$ ec.$\left.\right)=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{c^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{c^4}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1.3c^6}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-$ ec. Ora riducendo le integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (903) fatto $k=-\frac{1}{2}$, $m=2$, $a=1$, $b=-1$, $n=2,4,6$, ec., $i=1,2,$ ec., $p=0$, si

avrà

 FIG.

avrà $BM = \left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{ec.}\right)$ 192.
$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + c^2 x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec.}\right]$ $+ c^4 x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} + \text{ec.}\right]$: ma $DN = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (950. I.); dunque son note tutte le quantità di questa serie di cui è facile conoscer la legge.

Sia $x = 1$; si avrà $AMB = \left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \text{ec.}\right) AND$. Dunque la periferìa dell'ellisse è a quella del circolo circoscritto :: $1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{1.1^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{3c^4}{a^4} - \frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{5c^6}{a^6} - \text{ec.} : 1$ (supposto a il semiasse maggiore). Questa serie sarà convergentissima quando i fuochi saran vicini. Per esempio se $c = \frac{1}{10} a$, la circonferenza dell'ellisse sarà a quella del circolo circoscritto :: 0,997 495 292 861 261 : 1.

La rettificazion dell'iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve l'integrali d'un gran numero d'altre differenziali.

IV. Nella seconda parabola cubica, $y^3 = ax^2$, dunque $s = \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \frac{8}{27} a \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$ (858); fatto $y = 0$, si ha $C = - \frac{8}{27} a$ e l'arco preso dall'origine $= \frac{8}{27} a \left[\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$ (872).

V. Nella cicloide, $dy = dx \sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$ (873) preso $AB = a$; dunque $s = \int dx \sqrt{\frac{a}{x}} = 2\sqrt{ax} = 2AN$ (874). 193.

VI. Nella logaritmica, $ydx = ady$, $s = \int \frac{dy}{y} \sqrt{(y^2 + a^2)}$; se $\sqrt{(y^2 + a^2)} = z$, si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{z^2 - a^2}$ ed $s = \int \frac{z^2 dz}{z^2 - a^2} = z + \frac{a}{2} l \frac{z-a}{z+a}$ (907) $= z + al \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = z + al \left(\frac{\sqrt{(z^2 - a^2)}}{z+a}\right) =$

193. $\sqrt{(y^2+a^2)}+al\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}-al\left(\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right)+C$, espressione d' un arco di logaritmica in cui C è facile a determinarsi (947. VII).

188. VII. Nella spirale d' Archimede, $ds=Mm=\sqrt{(rm^2+Mr^2)}=\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$ (948): ma $x=\frac{cy}{a}$; dunque $s=COM=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(yy+\frac{a^4}{c^2}\right)}$. Descritta una parabola CN′ con $p=\frac{2a^2}{c}$, fatto $CQ=CM=y$ e condotta l'ordinata QN′, sarà $CN'=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+yy\right)}$ (950); dunque CN′ = COM, onde regna dell' analogìa tra questa spirale e la parabola.

190. VIII. Nella spirale iperbolica, $x=\frac{ab}{y}$, $dx=-\frac{abdy}{y^2}$ ed $rM\left(=-\frac{ydx}{a}\ (948)\right)=\frac{bdy}{y}$, onde $mM^2\ (=rm^2+rM^2)=dy^2+\frac{b^2dy^2}{y^2}$, e l'arco $COM=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb+yy)}$. Dunque descritta una logaritmica NK la cui suttangente $=b=$ a quella della spirale (865), si avrà (Esem. VI.) MOC = all'arco infinito NK, prendendo l'ordinata NR = CQ = CM. Ma per l' espressione d' un'arco di spirale o di logaritmica compreso tra le due ordinate y, y', si troverà $\sqrt{(b^2+y^2)}-\sqrt{(b^2+y'y')}+bl\frac{y[b+\sqrt{(b^2+y'^2)}]}{y'[b+\sqrt{(b^2+y^2)}]}$.

173. IX. Nella spirale logaritmica (649) $\cos Mmr\ (c) : mr\ (dy) :: 1 : Mm=\frac{dy}{c}$; dunque $ADM=\frac{y}{c}=MT$ per esser simili i triangoli mrM, MAT.

193. X. Nella curva CE a doppia curvatura x è s, ed y è z (802); dunque $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ diviene $\sqrt{(ds^2+dz^2)}=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2=px$, $y^3=\frac{9}{16}pz^2$, verrà $dy^2=\frac{pdx^2}{4x}$, $dz^2=\frac{4ydy^2}{p}=dx^2\sqrt{\frac{p}{x}}$, e $\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\int\sqrt{\left(dx^2+\frac{pdx^2}{4x}+dx^2\sqrt{\frac{p}{x}}\right)}=\int dx\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}\right)=$

 FIG.

$x+\sqrt{px}=x+y$ senza costante, perchè $x=0$ dà l' arco della curva $=0$.

Misura delle Solidità.

952. Un solido S da misurarsi s' immagini decomposto in un' infinità di piccoli strati paralleli. Chiamando t la base d' un di essi, dx la sua altezza o una parte infinitesima della distanza x dello strato dal vertice, sarà $S=\int t dx+C$.

953. Per esempio, sia B la base del solido, A la sua altezza; se le basi degli strati son proporzionali a una potenza m della loro distanza dal vertice, si avrà $A^m:B::x^m:t=\frac{Bx^m}{A^m}$; dunque $\int t dx=\frac{B}{A^m}\int x^m dx=\frac{Bx^{m+1}}{(m+1)A^m}$ senza costante se la porzione cominci dal vertice. Onde il solido intero $=\frac{BA}{m+1}$, poichè allora $x=A$; perciò la solidità delle piramidi, in cui $m=2$ (539), è $\frac{1}{3}BA$ (563).

954. Se il solido $BAB'=S$ è di rivoluzione, fatta $MP=y$, $Pp=\delta x$, sarà $mp=y+\delta y$, e il cono troncato $Mmm'M'=\pi\delta x(y^2+y\delta y+\frac{1}{3}\delta y^2)$ (564), onde $\frac{\delta S}{\delta x}>\pi(y^2+y\delta y+\frac{1}{3}\delta y^2)$; dunque presi i limiti (838) o posto $\delta y=0$ (836), verrà $dS=\pi y^2 dx$ ed $S=\pi\int y^2 dx+C$. 195.

Esem. I. Nella sfera, $y^2=2ax-x^2$; dunque la solidità d'un segmento sferico (569) $=\pi x^2(a-\frac{1}{3}x)$ e la sfera $=\frac{4}{3}a^3\pi=$ ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

II. Nell' ellisse, $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$; dunque il solido generato dalla sua rivoluzione intorno all' asse maggiore sta alla sfera circoscritta $::bb:aa$, ovvero è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

955. Si chiama *Ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *Ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell' Ellisse intorno al suo asse minore. E' facile il trovare che anche quest' ultimo solido è $\frac{2}{3}$ del ci-

195. lindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa :: $abb : aab :: b : a$.

III. In una parabola di un ordine qualunque si ha $y^m = x^n a^{m-n}$, onde $\pi y^2 dx = \pi dx \sqrt[n]{a^{2m-2n} x^{2n}}$, e $\int \pi y^2 dx = \ldots$

$$\frac{m\pi \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n+m}}}{2n+m} = \frac{m\pi x \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}}{2n+m} = \frac{m\pi x y^2}{2n+m},$$

espressione del solido che perciò starà al cilindro circoscritto :: $m : m + 2n$; quindi il paraboloide ordinario nel quale $m = 2$, $n = 1$, è la metà del cilindro circoscritto.

194. IV. Similmente se l' iperbola la cui equazione è $y^m x^n = a^{m+n}$ gira intorno all' asintoto CP, prendendo CD = AD = a, il solido descritto dal trapezio ADPM avrà per espressione $\frac{m}{2n-m} \pi (a^3 - xy^2)$, e perciò supposto $2n > m$, il solido descritto dallo spazio infinitamente lungo OADX sta al cilindro descritto da APCD :: $m : 2n - m$, e nell' iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

Superficie curve dei Solidi di rivoluzione.

195. 956. Sia R una superficie di rivoluzione, e si faccia tutto come sopra (954): poichè $Mm = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$, la superficie del cono troncato $Mmm'M'$ sarà $\pi (2y + \delta y) \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ (653), onde $\frac{R}{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}} > \pi (2y + \delta y)$; dunque fatto $\delta y = 0$, verrà $dR = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ed $R = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C = 2\pi \int n dx + C$, chiamando n la normale MN (861).

Es I. Nella sfera, $n = a$ (862); dunque la superficie d' un segmento sferico qualunque è $2a\pi x$, e quella della sfera è $4a^2\pi$ o quattro circoli massimi.

II. Nel paraboloide ove $n = \sqrt{(px + \frac{1}{4} p^2)}$ (751), si ha $2\pi \int dx \sqrt{(px + \frac{1}{4} p^2)} = \frac{4\pi}{3p} \sqrt{(px + \frac{1}{4} p^2)^3} + C$ (858). Sia $x = 0$; sarà $C = -\frac{\pi p^2}{6}$.

196. III. Nell' ellisse fatto a il semiasse di rivoluzione che sarà il trasverso nell' ellissoide allungata e il conjugato nella compressa, e posto ne' due diversi casi $\pm a^2 \mp b^2 = c^2$; si

 FIG.

avrà (758) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$, e però se la curva giri o 196.
intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$.
Nel primo caso, descritto col raggio $CD = \frac{a^2}{c}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (947) $\frac{2bc\pi}{a^2} \times$ ABNP; ma nel secondo, determinata C col porre $x = 0$, sarà (914) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c} l \frac{c}{a^2}\left[x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)}\right]$.

IV. Nell' iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto $a^2 + b^2 = c^2$, si avrà (771.767) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$, e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \times$ 197.
$\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$. Nel primo caso, determinata C col fare $x = a$, la superficie cercata sarà (913) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{c} l \frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(c+b)}$: ma nel secondo, determinata C col fare $x = 0$, sarà (914) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c} l\left[\frac{cx}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4}\right)}\right]$.

Metodo inverso delle Tangenti, e Integrazione dell' Equazioni differenziali.

957. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello che insegna a trovar l' equazione d' una curva in cui si conosca una proprietà qualunque delle tangenti. Cerchisi per es. la curva in cui la sunnormale è costante ed $= a$. Poichè (861) l' espression generale di questa retta è $\frac{ydy}{dx}$, avremo $\frac{ydy}{dx} = a$, $ydy = adx$, e integrando, per esprimere che la proprietà data conviene a tutti i punti della curva, si ha $\frac{1}{2}y^2 =$

ax, cioè $y^2 = 2a(x + C)$, equazione alla parabola, che risolve il problema proposto. E' dunque chiaro che questo *Metodo* conduce alla soluzione di equazioni differenziali che diconsi *del primo*, *del secondo* ec. *ordine* se contengono le differenze prime, seconde ec.; e son poi *lineari*, *quadratiche*, *cubiche* ec. se le variabili vi si trovano alla prima, seconda, terza ec. dimensione.

958. Sieno P, Q due funzioni di x, y; tutte l'equazioni differenziali del prim' ordine a due variabili verranno rappresentate da $Pdx + Qdy = 0$, equazione integrabile 1°. se P e Q sieno funzioni di x o di y sola, giacchè in tal caso ella diventa $dy = Xdx$ o $dx = Ydy$: anzi simili equazioni, fatta dx o dy costante, si integreranno, quando pur fossero di un ordine n^{simo}, col *metodo delle ripetute integrazioni*. Poichè da $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ si ha $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = Xdx$, ed integrando, $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int Xdx + C$; di nuovo $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} = dx \int Xdx + Cdx$, ed integrando $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int dx \int Xdx + Cx + C'$ ec., ripetuta l' operazione finchè si abbia y. Così se debba sommarsi la serie $y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} +$ ec. *in inf.*, supposto x non maggiore di 1, differenziando si ha $dy = \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \text{ec.}\right) dx$, e di nuovo differenziando, $ddy = (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \text{ec.}) dx^2$, e differenziando una terza volta, $d^3 y = (1 + x^2 + x^4 + \text{ec.}) dx^3 = \frac{dx^3}{1 - x^2}$ (260); dunque 1°. $\frac{d^3 y}{dx^2} = \frac{dx}{1 - x^2}$, ed integrando (907), $\frac{ddy}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots \frac{l(1 + x) - l(1 - x)}{2}$ senza costante, perchè $x = 0$ dà $y = 0$: 2°. $\frac{ddy}{dx} = \frac{dx\,l(1 + x) - dx\,l(1 - x)}{2}$, ed integrando (920), $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x)\,l(1 + x) + (1 - x)\,l(1 - x)}{2}$: 3°. $dy = \ldots \frac{dx(1 + x)\,l(1 + x) + dx(1 - x)\,l(1 - x)}{2}$, ed integrando

(920), $y=\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 l(1+x)-\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 l(1-x)-\frac{x}{2}$.

Inoltre se sia $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{dq}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}$, $s=\frac{dr}{dx}=\frac{d^4y}{dx^4}$ ec., verrà I. $x=\int\frac{dy}{p}$, II. $x=\int\frac{dp}{q}$ ed $y=\int pdx=\int\frac{pdp}{q}$; III. $x=\int\frac{dq}{r}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}$; IV. $x=\int\frac{dr}{s}$ ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int dx\int dx\int rdx=\int\frac{dr}{s}\int\frac{dr}{s}\int\frac{rdr}{s}$ ec., formule integrabili se p sia funzione di y, q di p, r di q, s di r ec. Così per l' equazione $1=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ cioè $1=qr$ o $r=\frac{1}{q}$, la III. dà $x=\int qdq=\frac{1}{2}q^2+C$, $\int q^2dq=\frac{1}{3}q^3+C'$ ed $y=\frac{1}{3\cdot5}q^5+\frac{1}{2}C'q^2+C''=\frac{(2x-2C)^{\frac{5}{2}}}{3\cdot5}+\frac{C'(2x-2C)}{2}+C''$.

Riprese anche le formule $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ ec., verrà I. $\frac{dpdy}{dx}=pdp=qdy$, $\frac{1}{2}p^2=\int qdy$, $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int qdy}$, ed $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int qdy}}$: II. $\frac{dqdp}{dx}=qdq=rdp$, $\frac{1}{2}q^2=\int rdp$, $q=\frac{dp}{dx}=\sqrt{2\int rdp}$, $x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int rdp}}$ ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{2\int rdp}}$: III. $\frac{drdq}{dx}=rdr=sdq$, $\frac{1}{2}r^2=\int sdq$, $r=\frac{dq}{dx}=\sqrt{2\int sdq}$, $x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ed $y=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ec., formule integrabili se q sia funzione di y, r di p, s di q ec. Così per l' equazione $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ cioè $r=p$ e $\int rdp=\frac{1}{2}p^2+C$, la II. dà $x=\ldots\ldots$ $\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=(914)\, l[p+\sqrt{(p^2+2C)}-lC']=xle$, $C'e^x-$

$p=\sqrt{(p^2+2C)}, p=\frac{C'e^x}{2}-\frac{Ce^{-x}}{C'}$, ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=$
$\sqrt{(p^2+2C)}+C''=\frac{C'e^x}{2}+\frac{Ce^{-x}}{C'}+C''=Ce^x+C'e^{-x}+C''$,
preso il valore di p e mutate le costanti $\frac{C'}{2}$ in C, e $\frac{C}{C'}$ in C'.

959. 2°. Si integrerà l' equazione $Pdx+Qdy=0$ se $\frac{d^yP}{dy}=\frac{d^xQ}{dx}$ (936). Spesso però anche non avverandosi quella condizione, l' equazione può integrarsi col moltiplicarla per un fattore idoneo: tale è $xdy-ydx+xdx=0$ se si moltiplichi per $\frac{1}{x^2}$. Sia dunque F il fattor cercato, e l' equazione diverrà $FPdx+FQdy=0$, che supponendosi ora integrabile, darà $\frac{d^y(FP)}{dy}=\frac{d^x(FQ)}{dx}$, o differenziando, $\frac{Fd^yP}{dy}+\frac{Pd^yF}{dy}-\frac{Fd^xQ}{dx}-\frac{Qd^xF}{dx}=0$, formula generale da cui si avrà F se si prenda per F un' idonea funzione di x e di y con esponenti indeterminati, come $F=x^my^n$; ed m, n si determineranno col sostituir nella formula i valori di F, P, Q e loro differenziali, e con eguagliare a zero i termini omologhi. Così data l' equazione $2adx-2bydx-bxdy=0$, avrò $P=2a-2by, \frac{d^yP}{dy}=-2b, Q=-bx, \frac{d^xQ}{dx}=-b, \frac{d^yF}{dy}=nx^m\times y^{n-1}, \frac{d^xF}{dx}=my^nx^{m-1}$, e sostituendo nella formula, trovo $(m-2n-1)bx^my^n+2anx^my^{n-1}=0$. Eguaglio a zero i termini omologhi, ed ottengo 1°. $m-2n-1=0$: 2°. $2an=0$; dalla seconda equazione ricavo $n=0$, onde la prima dà $m=1$; dunque $F=xy^0=x$, per cui moltiplicando la data equazione, si ha $2axdx-2bxydx-bx^2dy=0$, ed integrando, $ax^2-byx^2=C$.

Si osservi 1°. che lo stesso metodo ha luogo se si voglia il fattore che rende esatta una data differenziale, come $dy-ydx$: 2°. che se m, n si abbiano da una sola equazione, come da $m=n+1$, si potrà fare $n=0$ e anche prender per n un numero qualunque: 3°. che non si ha fin qui regola alcuna generale per dare ad F una forma adat-

tata

tata ai particolari bisogni, benchè in certi casi sia facile di determinarlo; ed eccone il modo.

Supposto $dF = Adx + Bdy$ onde $\frac{d^xF}{dx} = A$, $\frac{d^yF}{dy} = B$ (936), la trovata formula generale diverrà $\frac{Fd^yP}{dy} + BP - \frac{Fd^xQ}{dx} - AQ = 0$, cioè $\frac{d^yP}{dy} - \frac{d^xQ}{dx} = \frac{AQ - BP}{F}$; dunque se il primo membro di quest' equazione sia funzione della sola x onde $d^xQ = dQ$, lo sarà anche il secondo e perciò anche F, e si avrà $B = 0$, $dF = Adx$, $\frac{dxd^yP}{dy} - dQ = \frac{QdF}{F}$, $\int\frac{dF}{F}\ (= lF) = \ldots \int\frac{dxd^yP}{Qdy} - \int\frac{dQ}{Q}\ (= -lQ)$, e quindi $F = \frac{1}{Q}e^{\int\frac{dxd^yP}{Qdy}}$. Data per esempio, l'equazione $rdx + tydx + udy = 0$ ove r, t, u son funzioni della sola x, sarà $P = r + ty$, $Q = u$, $\frac{d^yP}{dy} = t$ ed $F = \frac{1}{u}e^{\int\frac{tdx}{u}}$, fattore che rende esatta la data, e che per l'equazione $xdy - ydx + xdx = 0$ accennata di sopra, si trova essere $= \frac{1}{x^2}$ come dicemmo. Con questo metodo si sommano le due serie $y = x^2 \mp \frac{x^4}{4} + \frac{3x^6}{4.6} \mp \frac{3.5x^8}{4.6.8} + \text{ec.}$: poichè differenziando e poi dividendo per x^3, si ha $\frac{dy}{x^3} = \frac{2dx}{x^2} \mp dx + \frac{3x^2dx}{4} \mp \text{ec.}$; dunque $\int\frac{dy}{x^3} = -\frac{2}{x} \mp x + \frac{x^3}{4} \mp \text{ec.} = \ldots = \frac{-2 \mp y}{x}$, onde differenziando, $\frac{dy}{x} = \mp xdy + (2 \pm y)dx$, cioè $(1 \pm x^2)dy \mp yxdx - 2xdx = 0$, ove $t = \mp x$, $u = 1 \pm x^2$ ed $F = \frac{1}{1 \pm x^2}e^{\mp\int\frac{xdx}{1 \pm x^2}} = \frac{1}{1 \pm x^2}e^{-l\sqrt{(1 \pm x^2)}}$ (856) $= \ldots$

$\frac{1}{1\pm x^2}$ e $l\frac{1}{\sqrt{(1\pm x^2)}}$ (300) $= \frac{1}{\sqrt{(1\pm x^2)^3}}$ (308). Quindi . . . $\frac{(1\pm x^2)dy \mp yxdx - 2xdx}{\sqrt{(1\pm x^2)^3}} = 0$, e integrando, $\frac{y\pm 2}{\sqrt{(1\pm x^2)}} =$ $C = \pm 2$, perchè $y=0$ dà $x=0$; dunque $y = \pm 2\sqrt{(1\pm x^2)} \mp 2$.

Si noti che ad $rdx + tydx + udy = 0$ si riduce anche $ry^n dx + tydx + udy = 0$ dividendola per y^n e ponendo $y^{1-n} = z$: vi si riducono anche dell' equazioni più complicate, ma non dobbiamo allungarci di più. Intanto il metodo è particolare, e perciò qualor non riesca, si passa a *separar l' equazione* cioè a dividerla in due membri, ciascun de' quali contenga una sola variabile con la sua differenziale. Anche questo metodo non è generale: ecco alcuni casi in cui la separazione riesce.

960. Se $P = XY$, $Q = X'Y'$ (X, X' son funzioni di x, ed Y, Y' funzioni di y), sarà $\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Y'dy}{Y}$, equazione separata.

961. Se P e Q son funzioni omogenee di x,y, cioè se tutti i lor termini hanno x,y allo stesso numero di dimensioni, fatto $x=yz$, sarà $\frac{Q}{P}$ una funzione Z di z, e si avrà $dx + Zdy = 0 = zdy + ydz + Zdy$, e separando, $\frac{dz}{Z+z} = -\frac{dy}{y}$. Così $(ax+by)dx = (mx+ny)dy$, fatto $x = yz$ onde $\frac{Q}{P} = Z = \frac{-mz-n}{az+b}$, diviene $-\frac{dy}{y} = \frac{(az+b)dz}{az^2+(b-m)z-n}$, equazione facile a integrare (910.914).

962. Sia ora l' equazione generale $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} \times y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''} +$ ec. $= 0$ ove per la natura di tali equazioni si ha sempre $p+q = p'+q' = p''+q'' =$ ec.: fatto $y = z^r$, ella diventa $r^q ax^m z^{r(n+q)-q} dx^p dz^q + \ldots r^{q'} bx^{m'} z^{r(n'+q')-q'} dx^{p'} dz^{q'} + r^{q''} cx^{m''} z^{r(n''+q'')-q''} \times dx^{p''} dz^{q''} +$ ec. $= 0$, e sarà omogenea se $m + r(n+q) - q = m' + r(n'+q') - q' = m'' + r(n''+q'') - q''$ ec., cioè se $r = \frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q} = \frac{m-q-m''+q''}{n''+q''-n-q} =$ ec. Così l' equa-

zione $ay^2x^2dx + bdx + cyxdx + fx^4y^2dy = 0$ dà $m = n = 2$, $m' = n' = 0$, $m'' = n'' = 1$, $m''' = 4$, $n''' = 2$, $q = q' = q'' = 0$, $q''' = 1$ e però $r = \frac{2}{-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{2-4+1}{2+1-2} = -1$; dunque fatto $y = z^{-1}$, si avrà $az^{-2}x^2dx + bdx + cz^{-1}xdx - fx^4z^{-4}dz = 0$, equazione omogenea e perciò integrabile (961). Parimente l' equazione $ax^2dx^4 + bx^3y^3dx^2dy^2 + cx^5y^{-11}dx^3dy + gx^5ydy^4 = 0$ dà $m = 2$, $n = 0$, $m' = n' = 3$, $m'' = 5$, $n'' = -11$, $m''' = 5$, $n''' = 1$, $q = 0$, $q' = 2$, $q'' = 1$, $q''' = 4$ e però $r = \frac{2-3+2}{3+2} = \frac{2-5+1}{-11+1} = \frac{2-5+4}{1+4} = \frac{1}{5}$; dunque fatto $y = z^{\frac{1}{5}}$, si avrà $625ax^2dx^4 + 25bx^3z^{-1} \times dx^2dz^2 + 125cx^5z^{-3}dx^3dz + gx^5z^{-3}dz^4 = 0$, equazione omogenea che facendo $z = ux$ e $dz = (t + u)dx$, si riduce a $\frac{g(t+u)^4}{u^3} + \frac{25b(t+u)^2}{u} + \frac{125c(t+u)}{u^3} + 625a = 0$; or da questa si ha t data per u, onde supposta $t = U$, da $udx + xdu = (t + u)dx$ viene $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t} = \frac{du}{U}$. Del resto, se taluno dei rotti $\frac{m - q - m' + q'}{n' + q' - n - q}$ ec. divenisse $\frac{0}{0}$, non se ne farebbe conto, ciò solamente significando che qualunque valore di r rende omogenei i termini d' onde quel rotto risulta; e se divenissero $\frac{0}{0}$ tutti i rotti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

963. Passiamo ad altre equazioni, e sia da integrarsi $py - \frac{dy}{dx} + X = 0$, ove p, X possono essere funzioni di x. Paragonandola con $rdx + tydx + udy = 0$ (959), si ha $u = -1$, $t = p$ ed $F = -e^{-\int pdx}$: onde fatto $pdx = dz$, ella diverrà $-Xe^{-z}dx - ye^{-z}dz + e^{-z}dy = 0$, ed integrando (937), $-\int \frac{Xdx}{e^z} + ye^{-z} = C$, cioè $y = e^{\int pdx}$ . . . . .

$\left(\int \frac{Xdx}{e^{\int pdx}} + C\right)$. Così se si abbia $y + \frac{dy}{dx} = x^2$, sarà $p = -1$, $X = x^2$ ed $y = e^{-x}\int e^x x^2\, dx + Ce^{-x} = (923)\ Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$. A questa equazione si riduce 1°. $py - \frac{dy}{dx} + Xy^{n+1} = 0$ col dividerla per y^{n+1} e far poi $\frac{1}{y^n} = u$: 2°. $py^{m+1} - \frac{y^n dy}{dx} + Xy^n = 0$ col dividerla per y^n e far quindi $y^{m-n+1} = u$: 3°. $pXy^{m+1}\, dx - X'y^m dy + X''y^n\, dx = 0$ dividendola per Xdx, facendo $\frac{X'}{X} = r$, $\frac{X''}{X} = q$ e trattandola poi come la passata.

964. Ma sia l' equazion lineare del second' ordine $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} = 0$ ove a, b, dx son costanti. Fatto $p = \frac{dy}{dx}$ ovvero $mp - \frac{mdy}{dx} = 0$ (m è indeterminata) e sommata questa con la data, viene I. $y + (a + m)\,p - (mdy - bdp)\,\frac{1}{dx} = 0$, ove suppongo (giacchè l' indeterminata m lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y + (a + m)\,p$ sia l' integrale della seconda $mdy - bdp$; dunque $y + (a + m)\,p = \frac{1}{m}\int(mdy - bdp) = y - \frac{bp}{m}$, onde $a + m = -\frac{b}{m}$ e II. $m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$. Fatto ora III. $y + (a + m)\,p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $du = dy - \frac{bdp}{m}$ ovvero $mdu = mdy - bdp$, la I. diverrà $u - \frac{mdu}{dx} = 0$ che ci dà (963) IV. $u = Ce^{\frac{x}{m}}$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la III. si scioglierà nelle due $y + (a + m')\,p = u'$, $y + (a + m'')\,p = u''$ dalle quali si ha la V. $y = \frac{(a + m')\,u'' - (a + m'')\,u'}{m' - m''}$.

Così data $y + \frac{4dy}{5dx} - \frac{ddy}{5dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, onde per la II. viene $m = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$ e perciò $m' = \frac{1}{5}$, $m'' = -1$; dunque per la IV. $u' = Ce^{5x}$ ed $u'' = C'e^{-x}$, con che dalla V. si ottiene $y = \frac{1}{6}(Ce^{5x} + 5C'e^{-x})$.

Di quì si ha la somma di tutte le serie della forma $1 + \frac{x^r}{1.2.3...r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3..2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3...3r} +$ ec. *in infin.*, essendo r numero intero e positivo. Si voglia la somma della serie $y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ ec.: differenziando abbiamo $dy = (x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} +$ ec.$)\, dx$, e nuovamente differenziando presa dx costante, $ddy = (1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ec.$)\, dx^2 = ydx^2$. Si ha dunque $y - \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ove $a = 0$, $b = -1$, $m = \pm\sqrt{1}$, $m' = 1$, $m'' = -1$ e perciò $y = \frac{1}{2}(Ce^x + C'e^{-x})$. Per determinar le costanti si osservi che quando $x = 0$, viene $y = \frac{1}{2}(C + C') = 1$, $dy\ (= \frac{1}{2}(Ce^x dx - C'e^{-x}dx)) = 0 = C - C'$; dunque $C = C' = 1$ ed $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$.

965. Se manchi y nell' equazione data, fatto $\frac{dy}{dx} = z$, ella diverrà $az + \frac{bdz}{dx} = 0$, e il suo integrale si trova $y = -\frac{b}{a}Ce^{-\frac{ax}{b}} + C'$ (963): e se manchi anche $\frac{ady}{dx}$, si userà per $\frac{bddy}{dx^2}$ il metodo già spiegato (958). Se nella II. equazione sia $\frac{1}{4}a^2 = b$, verrà $m' = m'' = -\frac{1}{2}a$ e quindi $u' = u''$ nella IV, ed $y = \frac{0}{0}$ nella V., ciò che non potrebbe avverarsi se non fosse anche $C = C'$. Ora

per determinar y in questo caso, prendo ω infinitesima e pongo $m''=m'+\omega$; dunque $\frac{x}{m''}=\frac{x}{m'+\omega}=\frac{x}{m'}-\frac{\omega x}{m'(m'+\omega)}$, ed $u''=Ce^{\frac{x}{m'}}\left(1-\frac{\omega x}{m'm''}\right)$ (308), trascurando ω^2, ω^3 ec. (197); e poichè $m'-m''=-\omega$, la V. equazione, posti nel numeratore $Ce^{\frac{x}{m'}}$ per u' ed $m'+\omega$ per m'', diverrà $y=(1+\frac{2x}{a})Ce^{-\frac{2x}{a}}$, onde fatto $\frac{2C}{a}=C'$, viene $y=(C+C'x)e^{-\frac{2x}{a}}$: così se si abbia $y+\frac{4dy}{5dx}+\frac{4ddy}{25dx^2}=0$, sarà $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{4}{25}$ ed $y=(C+C'x)e^{-\frac{5x}{2}}$. Chè se nella stessa equazione II. le radici m', m'' sieno immaginarie, potrà supporsi (149) $m'=\frac{-a+2g\sqrt{-1}}{2}$, $m''=\ldots\frac{-a-2g\sqrt{-1}}{2}$, onde $\frac{x}{m'}=\frac{-2x(a+2g\sqrt{-1})}{(a-2g\sqrt{-1})(a+2g\sqrt{-1})}=\frac{-2ax-4gx\sqrt{-1}}{a^2+4g^2}$ ed $\frac{x}{m''}=\frac{-2ax+4gx\sqrt{-1}}{a^2+4g^2}$. Sia $\frac{2ax}{a^2+4g^2}=t$, $\frac{4gx}{a^2+4g^2}=z$; dunque $y=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{e^{-t}[(a+m')C'e^{z\sqrt{-1}}-(a+m'')Ce^{-z\sqrt{-1}}]}{m'-m''}$; ma $e^{\pm z\sqrt{-1}}=\cos z\pm\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,z$ (630); dunque sostituendo, ponendo C e C' invece di $\frac{(a+m')C'-(a+m'')C}{m'-m''}$ e di $\frac{[(a+m')C'+(a+m'')C]\sqrt{-1}}{m'-m''}$, e rimettendo i valori di t, z, verrà $y=e^{\frac{-2ax}{a^2+4g^2}}\left(C\cos\frac{4gx}{a^2+4g^2}+C'\,\text{sen}\,\frac{4gx}{a^2+4g^2}\right)$. Così se si abbia $y-\frac{4dy}{5dx}+\frac{ddy}{5dx^2}=0$, sarà $a=-\frac{4}{5}$, $b=\frac{1}{5}$, $g=\frac{1}{5}$ ed $y=e^{2x}(C\cos x+C'\,\text{sen}\,x)$.

966. Nel modo stesso potranno integrarsi due equazioni

$y+ax+\frac{bdx}{dt}=0, y+fx+\frac{gdy}{dt}=0$, supposte a,b,f,g costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l' indeterminata m e si sommi con la prima, verrà $(m+1)y+(a+fm)x+(gmdy+bdx)\frac{1}{dt}=0$; onde fatto come sopra (964), $(m+1)y+(a+fm)x=\frac{1}{m}\int(gmdy+bdx)=gy+\frac{bx}{m}$, si avrà $m+1=g$, $a+fm=\frac{b}{m}$ ed $\frac{am+fm^2}{b}=g-m$, equazione che determina m. Quindi se sia $(m+1)y+(a+fm)x=u=gy+\frac{bx}{m}$ e perciò $mdu=gmdy+bdx$, l' equazione sommata diverrà $u+\frac{mdu}{dt}=0$ e avremo al solito $u=Ce^{-\frac{t}{m}}$. Il rimanente si fa come sopra (964), e tutto ciò ha luogo quando pur l' equazioni sieno $y+ax+\frac{bdx+cdy}{Tdt}=0$, $y+a'x+\frac{b'dx+c'dy}{Tdt}=0$, e si trova $u=Ce^{-\int\frac{Tdt}{m}}$.

967. Sia anche l' equazione $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}=X$ ove X è funzione di x. Tutto si farà come sopra (964), se non che l' equazione è qui $\frac{u}{m}-\frac{du}{dx}-\frac{X}{m}=0$ che dà (963) $u=e^{\frac{x}{m}}(C-\frac{1}{m}\int e^{-\frac{x}{m}}Xdx)$. Così avendo $y-\frac{dy}{dx}-\frac{3ddy}{4dx^2}=2x$, sarà $a=-1$, $b=-\frac{3}{4}$, $m'=\frac{3}{2}$, $m''=-\frac{1}{2}$, $X=2x$, $u'=Ce^{\frac{2}{3}x}+2x+3$, $u''=C'e^{-2x}+2x-1$ (923), ed $y=\frac{1}{4}C'e^{-2x}+\frac{3}{4}Ce^{\frac{2x}{3}}+2(x+1)$.

968. Questo metodo che a cagione dell'indeterminate m ec. introdotte nell' equazioni, si chiama *dei Coefficienti In-*

determinati, vale anche per l' equazioni lineari di un qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n-1$ d' equazioni $mp-\frac{mdy}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$, $gr-\frac{gdq}{dx}=0$ ec., si integreranno con la stessa facilità: il giro però sarà in queste più lungo, attese l' equazioni $n-1$ da cui debbon dedursi i valori dell' indeterminate k, g ec. dati per m, e quelle del grado $(n-1)^{simo}$ dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''' ec. e quindi u', u'', u''' ec.

Del resto, con le due equazioni $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ si integrano anche quelle di second' ordine ove manchi y o x o sia integrabile la risultante equazione di prim' ordine tra x o y e p: allora p sarà dato per x o per y e si avrà $y=\int pdx$ o $x=\int\frac{dy}{p}$. Così da $dx^2+dxdy-Xd^2y=0$ risulta l' integrabile $\frac{dp}{1+p}=\frac{dx}{X}$: e da $d^2y+mdxdy+nydx^2=0$ risulta $q+mp+ny=0=qdy+mpdy+nydy=pdp+mpdy+nydy$, parimente integrabile perchè omogenea (961).

Ma l' omogenee di second' ordine, in cui dx, d^2x ec. si valutano per una dimensione, posson sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y=ux$ e $qx=z$, che atteso $dy=pdx$ e $dp=qdx=\frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{z}$: così $aydx^2-bxdxdy+gy^2d^2y=0$ diventa $au-bp+gu^2qx=0=au-bp+gu^2z$, onde $z=\frac{bp-au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u}=\frac{gu^2dp}{bp-au}$ e $dp=\ldots\frac{(bp-au)du}{(p-u)gu^2}$, equazion del prim' ordine che se possa separarsi (come nel caso di $a=b$) separerà anche l' altra $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Anzi tali equazioni si ridurranno, sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual' è $yd^2y-dy^2-Xydxdy=0$; poichè fatto $p=\frac{dy}{dx}=uy$, $q=\frac{dp}{dx}=yz$ onde $dy=uydx$, $dp=yzdx=udy+ydu$, $\frac{dy}{y}=udx=\frac{zdx-du}{u}$, ella diventa $yqdx^2-$

za $yqdx^2 - p^2dx^2 - Xypdx^2 = 0 = z - u^2 - uX$, che dà $udx = \frac{(u^2 + uX)dx - du}{u}$, onde $\frac{du}{u} = Xdx$, equazione separata del prim' ordine che separa anche $\frac{dy}{y} = udx$.

L' equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D' ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo quì varj esempj di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second' ordine, ove X, Y esprimon sempre una funzione di x o di y.

I. $x^2dx^2 + axydxdy = bdy^2$: compiendo il quadrato si ha $(xdx + \frac{1}{2}aydy)^2 = (\frac{1}{4}a^2y^2 + b)dy^2$, ed estraendo la radice, $xdx = \frac{1}{2}dy[\sqrt{(a^2y^2 + 4b)} - ay]$.

II. $4a^2x^2dx + 4a^2bxdx + 4abyxdx + 2ab^2ydx + b^2y^2dx - ab^3dy = 0$. Osservo che l' equazione può scriversi così: $(2ax + by + ab)^2dx - a^2b^2dx - ab^3dy = 0$; e supposto $(2ax + by + ab)^2dx = 0$; verrebbe $y = -\frac{2ax}{b} - a$. Faccio dunque $y = z - \frac{2ax}{b} - a$, $dy = dz - \frac{2adx}{b}$, e sostituendo e riducendo, viene $dx = \frac{abdz}{a^2 + z^2}$.

III. $-a^3dx - 3yx^2dx + 3y^2xdx - y^3dx + x^3dy + a^3dy = 0$. Osservo che supposto $3yxdx(y - x) = 0$, verrebbe $y = x$, il che si avrebbe anche dall' equazioni combinate $-dx(a^3 + y^3) = 0$, $dy(x^3 + a^3) = 0$. Faccio dunque $y = z + x$, $dy = dz + dx$, e sostituendo e riducendo, viene $\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{a^3 + x^3}$.

IV. $x^2dx + xydy + y^2dx = Xdx$: fatto $xy = z$, si ha $zdz = (X - x^2)xdx$.

V. $2ydy + xdy + ydx = (a + x + y)Ydy$; fatto $x + y = z$, viene $ydz + zdy = (a + z)Ydy$: fatto $yz = u$, viene $du - \frac{uYdy}{y} = aYdy$: fatto $\frac{Ydy}{y} = \frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$: fatto $\frac{u}{q} = p$, viene infine $dp = \frac{aYdy}{q}$.

VI. $\frac{2x^2dx + xydy + y^2dx}{x^4 + x^2y^2 + a^4} = \frac{xdx + ydy}{a^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}$: fatto $x^2 + y^2 = z^2$, viene $\frac{z(xdz + zdx)}{x^2z^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$: fatto $zx = p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2 + a^4} = \frac{dz}{z}$.

VII. $(a^2 - x^2)dy + yxdx = adx\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}$; fatto $a^2 - x^2 = \frac{y^2}{u^2}$ onde $-xdx = \frac{uydy - y^2du}{u^3}$, verrà $\frac{y^2du}{u^2} = adx\sqrt{(u^2 - 1)}$ e $\frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)}} = \frac{adx}{a^2 - x^2}$.

VIII. $\frac{Ydy}{x^2} = aY'dy - \frac{dx}{x}$: fatto $aY'dy = \frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^2} = \frac{xdz - zdx}{zx^2}$: fatto $\frac{z}{x} = p$, viene $\frac{Ydy}{z^2} = \frac{dp}{p^3}$.

IX. $-\frac{a^3dx}{x} + bydx = aydy$: fatto $bx - ay = az$, viene $bxdz = azdz + \frac{a^3dx}{x}$: fatto $zdz = \frac{a^2dp}{p}$: viene $bxdz = \frac{a^3(pdx + xdp)}{px}$: fatto $px = u$, viene $\frac{bdz}{p} = \frac{a^3du}{u^2}$.

X. $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} + \frac{(m+1)y^2dx}{x} = ydy$, $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} = y^2\left(\frac{dy}{y} - \frac{(m+1)dx}{x}\right)$: fatto $ly - (m+1)lx = lp$, $y = px^{m+1}$, viene $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + (m+1)bpx^m \times dx = px^{2m+2}dp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}}(-1 + (m+1)a^{m-1}bp) = a^{m-1}pdp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}} = \frac{a^{m-1}pdp}{(m+1)a^{m-1}bp - 1}$.

XI. $mydx + nxdy = y^rdy$ ovvero $xy\left(\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}\right) = y^rdy$: fatto $mlx + nly = lp$, $x^my^n = p$, viene $\frac{dp}{p}\sqrt[m]{\frac{p}{y^n}} = y^{r-1}dy$, cioè $\frac{dp}{\sqrt[m]{p^{m-1}}} = dy\sqrt[m]{y^{n+m(r-1)}}$.

XII. $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$: fatto $x=pz$, $y=p\sqrt{(1-z^2)}$, viene $\frac{-dz}{\sqrt{(p^2dz^2+dp^2(1-z^2))}}=p$: fatto $dz=udp$, quadrando, sostituendo il valor di $u=\frac{dz}{dp}$ ed estraendo la radice, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{pdp}{\sqrt{(1-p^4)}}$.

XIII. $aydy=y^2dx+x^2dx$ cioè $x^2dx=y^2\left(\frac{ady}{y}-dx\right)$: fatto $aly-x=lz$, $\frac{y^a}{e^x}=z$, $y=\sqrt[a]{e^xz}$, viene $x^2dx=\frac{dz}{z}\sqrt[a]{e^{2x}z^2}$, cioè $\frac{x^2dx}{\sqrt[a]{e^{2x}}}=\frac{dz}{\sqrt[a]{z^{a-2}}}$.

XIV. $dy=\frac{yxdx}{x^2-a^2}-\frac{y^3dx}{x^3}$: fatto $x^2-a^2=z^2$, $y=pz$, $dy=zdp+pdz=zdp+\frac{pxdx}{z}$, viene $zdp+\frac{pxdx}{z}=\frac{pxdx}{z}-\frac{z^3p^3dx}{x^3}$, cioè $\frac{dp}{p^3}=\frac{(a^2-x^2)dx}{x^3}$.

XV. $(x+y)^2dy=a^2dx$: fatto $x+y=z$, si ha $z^2(dz-dx)=a^2dx$, cioè $dx=\frac{z^2dz}{a^2+z^2}$.

XVI. $\frac{y^2dx-xydy}{\sqrt{(y^2dx^2-2xydydx+y^2dy^2)}}=Y$: fatto $\frac{x}{y}=z$ onde $x=yz$ e $dx=ydz+zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2-z^2dy^2+dy^2)}}=Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene $\frac{dz^2}{1-z^2}=\frac{Y^2dy^2}{y^4-Y^2y^2}$, cioè $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\ldots\frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2-Y^2)}}$.

XVII. $\frac{ddy}{dx^2}-\frac{dy^2}{ydx^2}-\frac{ady^2}{(1+ay)dx^2}+2ay(1+ay)=0$, cioè $\frac{ddy}{y(1+ay)}-\frac{(1+2ay)dy^2}{y^2(1+ay)^2}+2adx^2=0$, che fatta dx costante, si sa integrare (945).

XVIII. $2y^2dyddy\sqrt{xy}+y^2dy^3\sqrt{\frac{x}{y}}=dx^2(ydx-xdy)$ ove dx è costante: fatto $\frac{x}{y}=z$, viene $ydy^2=dx^2(2\sqrt{z}+C)$.

XIX. $xddx+dx^2=-\frac{yx^2dx^2}{a^3}$ ove dy è costante: fatto $xdx=zdy$, viene $\frac{a^3dz}{z^2}=-ydy$.

XX. $a^{2m}dy^{m-2}ddy=Xdx^m$ ove è costante dx: fatto $dy=zdx$, viene $a^{2m}z^{m-1}dz=Ydy$.

XXI. $adxdy=(2addy-2xddx-2ddy\sqrt{x}-dx^2)(a-x)\sqrt{x}$: se si faccia $a-x=p^2$ e $dy=pdz$, viene $\frac{adxdz}{2p^2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dpdz\sqrt{x}}{p}-ddz\sqrt{x}-\frac{dx^2}{2p}$, cioè posto il valor di $a=p^2+x$ e di $dx=-2pdp$, $ddz\sqrt{x}+\frac{dxdz}{2\sqrt{x}}=pddx-\frac{dx^2}{2p}$ il cui integrale è $dz\sqrt{x}=pdx$ cioè $pdz\ (=dy)=\frac{p^2dx}{\sqrt{x}}+C$.

XXII. $Ydx^2-mdy^2-nyddy=0$ ove dx è costante: fatto $dx=zdy\sqrt[n]{y^m}$ onde $0=(dydz+zd^2y)\sqrt[n]{y^m}+\frac{mzdy^2}{n}\times\sqrt[n]{y}^{m-n}$, cioè $nyddy=-mdy^2-\frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y}^{2m-n}=-\frac{ndz}{z^3}$ e $dx=dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2\int(Ydy\sqrt[n]{y}^{2m-n}+C)}}$.

969. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, posson generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati* $dy=ax^mdx+by^2dx$, sopra cui lasceremo che si consulti il Calcolo Integrale di Le-Seur e Iacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

Probl. I. Trovar la curva la cui suttangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{mx}{n}$. Si avrà dunque separando, $\frac{ndx}{x}=\frac{mdy}{y}$, e integrando, $nlx=mly+lC$; fatto dunque $x=y=c$, sarà $lC=(n-m)lc$, onde $y^m=x^nc^{m-n}$, equazione cercata.

II. Qual' è la curva che ha per suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 + x^2}{x}$?

Si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{a^2 + x^2}$ ed integrando, $ly = l(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = lC(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $y = C\sqrt{(a^2 + x^2)}$: fatto $x = 0$, divien costante l' ordinata $y = Ca = b$, onde $C = \frac{b}{a}$; perciò $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2)$, equazione all' iperbola (767).

III. Qual' è la curva in cui lo spazio $ABM = \frac{m}{n}.AMQ$? 198.
si ha dunque $\frac{m}{n}\int xdy = \int ydx$ (946), $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$.

IV. Trovar la curva BM il cui spazio ABMP eguagli 199.
l' arco BM moltiplicato per una costante a, onde $\int ydx = a\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Dunque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$; ed integrando, $\frac{x}{a} = l\frac{c}{a}[y + \sqrt{(y^2 - a^2)}]$ (913).

V. Trovar la curva AM, in cui il raggio osculatore 200.
$MC = \frac{m}{n}MN$. Poichè MO : MC :: MP : MN, supposta dx costante, sarà (869) $\frac{m}{n}y = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, ovvero $\frac{m}{n}yddy + dx^2 + dy^2 = 0$. Per integrare, sia $dx = pdy$ e differenziando, $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ e sostituendo nell' equazione, $\frac{ndy}{my} = \frac{dp}{p(p^2 + 1)}$; dunque $\frac{n}{m}l\frac{y}{c} = l\frac{p}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$ (851), $p = \pm\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n} - y^{2n})}}}$, e $dx = \pm dy\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n} - y^{2n})}}}$, equazione differenziale del prim' ordine della curva cercata. Se $n = m$, si ha $dx = \pm ydy(c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed $x = c' \pm \sqrt{(c^2 - y^2)}$, equazione al circolo. Se $m = 2n$, si ha $dx = \frac{\pm dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c - y)}}$, equazione alla cicloide.

VI. Trovar la curva BM tale che conducendo per l' o- 201.
rigine A dell' ascisse la retta AO che faccia coll' asse un

201. angolo di 45°, stia sempre l' ordinata PM alla suttangente PT :: una retta data a : OM. Dunque $dy : dx :: a : y - x$, e $adx = (y - x)\, dy$. Sia $y - x = z$ e si avrà $dx = dy - dz$, onde sostituendo nell' equazione, $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a - z}$, $\frac{y}{a} = l \frac{C}{a - z}$,

ed $x = y - a + Ce^{-\frac{y}{a}}$, che potea trovarsi anche per i numeri 963 e 964. La minima ordinata BD si ha facendo $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x} = \infty$ (878) e allora $x = y = al\frac{C}{a} = BD = AD$. Lo spazio $DBMP = PQ - DC - BCQM = xy - a^2 l^2 \frac{C}{a} - \int xdy$ (946).

Ora $\int xdy = \int (ydy - ady + Ce^{-\frac{y}{a}} dy) = C' + \frac{y^2}{2} - ay -$ $aCe^{-\frac{y}{a}}$ (923), e sostituendo in $- ay$ il valor di $y = x +$ $a - Ce^{-\frac{y}{a}}$, verrà $\int xdy = C' + \frac{y^2}{2} - ax - a^2$: ma quando lo spazio BCQM svanisce, si ha $y = AC = al\frac{C}{a}$ ed $x = CB =$ $al\frac{C}{a}$, onde $C' = a^2 + a^2 l \frac{C}{a} - \frac{a^2}{2} l^2 \frac{C}{a}$; dunque $\int xdy = \ldots$ $\frac{y^2}{2} - ax + a^2 l \frac{C}{a} - \frac{a^2}{2} l^2 \frac{C}{a}$, ed infine $DBMP = xy - \frac{y^2}{2} +$ $ax + a^2 l \frac{a}{C} + \frac{a^2}{2} l^2 \frac{a}{C}$.

202. VII. Trovar la Curva EM che faccia per tutto coll' ordinata PM un angolo EMP o TMP proporzionale all' ascissa AP, che sarà perciò m^{pla} dell' arco o angolo TMP. Si avrà dunque $TMP = \frac{x}{m}$, e (646) $y : \frac{ydx}{dy} :: 1 : tang \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}$,

dunque $\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} \cot \frac{x}{m} = \frac{\frac{dx}{m} \cos \frac{x}{m}}{sen \frac{x}{m}}$, e però $y = C + ml\, sen \frac{x}{m}$;

equazione che nel caso di $y = 0$ dando $l\, sen \frac{x}{m} = - \frac{C}{m} = -$

FIG. 202.

$\frac{Cle}{m}$, cioè $sen\,\frac{x}{m} = e^{-\frac{C}{m}}$, e però $x = m \times$ *arco di circolo il cui seno è* $e^{-\frac{C}{m}}$, fa vedere che la curva incontra la linea dell' ascisse in punti E, F, E', F' ec. tali, che $l\,sen\,\frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$, ed x eguaglia m moltiplicata per tutti gli archi, i cui seni sono $= e^{-\frac{C}{m}}$. Ora il numero di questi archi è infinito, poichè se il primo è a, quelli che avranno lo stesso seno saranno a, $c - a$, $2c + a$, $3c - a$, $4c + a$, $5c - a$, ec. (618): quindi le distanze a cui la curva incontrerà la linea dell' ascisse saranno espresse per ma, $m(c - a)$, $m(2c + a)$, $m(3c - a)$ ec. Presa dunque $AE = ma$, $AF = mc - ma$, $AE' = 2mc + ma$, $AF' = 3mc - ma$ ec., si avranno i valori positivi di x. Si troveranno parimente i suoi valori negativi, cioè le ascisse prese verso la sinistra di AS, e si vedrà inoltre che gli intervalli EF, E'F' ec. sono eguali.

Fatto ora $\frac{dy}{dx} = cot\,\frac{x}{m} = 0$ per avere il massimo, sarà (610.611) $sen\,\frac{x}{m} = 1$, e i valori che soddisfanno nel seno positivo a quest' equazione, preso $a = 90° = \frac{1}{2}c$ nella serie a, $c - a$, $2c + a$ ec. sono . . . .

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c,\ \text{ec.}$$

e poichè in questo caso $sen\,\frac{x}{m} = 1$ e $l\,sen\,\frac{x}{m} = 0$, si ha $y = C$; onde ai punti più elevati C, C' ec. le ordinate son eguali fra loro ed alla costante.

Se nell' equazione $y = C + l\,sen^m\,\frac{x}{m}$ si faccia $sen^m\,\frac{x}{m} = 0$, sarà $y = C + l0 = C - \infty$ (197) $= -\infty$, ovvero $-y = \infty$ e però a tutti gli archi o ascisse x che danno $sen^m\,\frac{x}{m} = 0$, corrisponde un' ordinata negativa $-y$ che è infinita o asintoto della curva: ora quest' archi sono $x = 0$, $x = \pm cm$, $x = \pm 2cm$ ec. in infinito; dunque la curva ha un numero infi-

202. nito d'asintoti perpendicolari all'asse. Il primo passa per l'origine dell'ascisse ove $n = 0$ ed è AS, il secondo passa per D alla distanza $AD = cm$, il terzo ad una distanza $AD' = 2AD = 2cm$ ec. Lo stesso è nel senso negativo.

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE.

970. Supposta $\delta x = 1$ (827), sia da integrarsi l'equazione lineare del prim'ordine $y' - py - X = 0$, ove $y' = y + \delta y$, e p, X son funzioni di x. Fatto $y = rz$, onde $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$, l'equazione si cangierà in $rz\,(p-1) - r\delta z - z\delta r - \delta r\delta z + X = 0$; e se sia $rz\,(p-1) - z\delta r = 0$ ovvero I. $pr = r + \delta r$, verrà $r\delta z + \delta r\delta z = X$, ovvero II. $\delta z = \frac{X}{pr}$. La I. si integra riducendola a $lp = l(r + \delta r) - lr = \delta(lr)$ (831), onde $lr = \sigma lp$ ed $r = e^{\sigma lp}$: perciò dalla II. si ha $\delta z = \frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, $z\ (= \frac{y}{r}) = \sigma \frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, ed $y = e^{\sigma lp}\left(\sigma \frac{X}{pe^{\sigma lp}} + C\right)$.

971. Poichè la somma σ di tutti i valori di lp dipende da x di cui p è funzione (970), ed $x = \delta\,(x - 1 + x - 2 + x - 3$ ec.) (824), si avrà σlp col cangiar successivamente x in $x-1, x-2, x-3, \ldots 3, 2, 1$, e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto (299) che chiamo $l\pi p$. Quindi $r = e^{\sigma lp} = e^{l\pi p} = \pi p$ (852) e chiamando p' il termine che viene immediatamente dopo p nella serie ec. $'p, p, p'$ ec., sarà $r + \delta r\ (= pr) = \pi p'$, e perciò $\delta z\ (= \frac{X}{pr}) = \frac{X}{\pi p'}$, $z = \sigma \frac{X}{\pi p'}$, ed $y = \pi p\left(\sigma \frac{X}{\pi p'} + C\right)$. Così data $y + (x+1)\delta y + a(2x+1) = 0$, sarà $-\frac{1}{p-1} = x + 1$, $p - 1 = -\frac{1}{x+1}$, $p = \frac{x}{x+1}$, $\pi p = \ldots \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x}$, $p' = \frac{x+1}{x+2}$, $\pi p' = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$, $\frac{X}{p-1} = a(2x+1)$, $X = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$, ed $y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x+1)) = (827)\ \frac{C}{x} - ax$.

Supposta

Supposta costante $p=f$, saranno $\pi f, \pi f'$ dei prodotti f^n, f^{n+1} di f moltiplicata per se stessa tante volte $n, n+1$ quanti sono i termini che precedono y, y' nella serie ec. ${}^{(n)}y \ldots {}''y, {}'y, y, y'$ ec., ed in tal caso si avrà $y=f^n(C+\sigma\frac{X}{f^{n+1}})$; e se sia costante anche $X=g$, il rimanente integrale $\sigma\frac{1}{f^{n+1}}$ esprimerà la somma $\frac{f^n-1}{f^n(f-1)}$ (258) della progression geometrica $\frac{1}{f^n}, \frac{1}{f^{n-1}} \ldots \frac{1}{f}$, cioè la somma di tutti i valori che si hanno da $\frac{1}{f^{n+1}}$ cangiando successivamente n in $n-1, n-2 \ldots 3, 2, 1$; si avrà dunque allora $y=Cf^n+\frac{g(f^n-1)}{f-1}$.

Può sciogliersi con questo metodo il bel Problema già proposto di sopra (390. XXIV.). Se come ivi, sia c la sorte impiegata al frutto semplice di m per 1, t gli anni in cui vuol consumarsi la sorte e il frutto, ed x la somma costante che dee spendersi annualmente, supporrò che nell'anno n^{simo} la sorte sia ridotta ad y, onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende x, la sorte nel seguente anno $(n+1)^{simo}$ sarà $y'=(m+1)y-x$, equazione da cui si ha $p=f=m+1, X=g=-x$, ed $y=C(m+1)^n-\frac{x[(m+1)^n-1]}{m}$: ma quando gli anni sono $n=1$ si ha la sorte $y=c$; dunque $c=C(m+1)-x, C=\frac{c+x}{m+1}$ ed $y=\frac{x}{m}+(c-\frac{x}{m})(m+1)^{n-1}$. Or tutto vuol consumarsi negli anni $n=t$, e perciò nell'anno $n=t+1$ dee aversi $y=0$; dunque $0=\frac{x}{m}+(c-\frac{x}{m})(m+1)^t$ e la somma cercata $x=\frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t-1}$.

972. Sia anche l'equazion lineare del second' ordine $y+a\delta y+b\delta^2 y=X$ in cui a, b son costanti e $\delta x=1$. Se-

condo il metodo dei coefficienti indeterminati (964) pongo $mp - m\delta y = 0$ e sommate le due equazioni, viene I^a. $y + (a+m)p - m\delta y + b\delta p = X$. Supposto al solito (964) $y + (a+m)p = \frac{1}{m}\sigma(m\delta y - b\delta p) = y - \frac{bp}{m}$, abbiamo $a + m = \frac{-b}{m}$ con che si determinano i valori m', m'' di m (964); e fatto II. $y + (a+m)p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $\delta u = \delta y - \frac{b\delta p}{m}$ ovvero $m\delta u = m\delta y - b\delta p$, la I. equazione diverrà $u - m\delta u = X$ che ci dà (971) $u = \pi(1 + \frac{1}{m})(C - \times \ldots \sigma \frac{X}{m \cdot \pi(1 + \frac{1}{m'})})$; onde fatta la costante $1 + \frac{1}{m} = h$ e però $m = \frac{1}{h-1}$, si avrà $u = h^n (C - (h-1)\sigma \frac{X}{h^{n+1}})$ (971); e se anche X fosse costante, verrebbe $u = h^n (C - (h - 1)X\sigma \frac{1}{h^{n+1}}) = Ch^n - X(h^n - 1)$ (971). Posti pertanto in queste i due valori m', m'' di m o h', h'' di h, si avranno i due u', u'' di u ed $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$ (964). Vale il metodo stesso per l' equazioni simili del terzo, quarto, r^{simo} ordine (966.968).

973. Bisogna trattare al solito (965) l' equazione $qy + a\delta y + b\delta^2 y \ldots + \omega\delta^r y = X$ quando $q = 0$, o resta solamente $\omega\delta^r y = X$. In quest' ultimo caso sia $\omega = 1$, $r = 4$, $X = 0$, e dovrà integrarsi $\delta^4 y = 0$ ovvero $\frac{\delta^4 y}{\delta x^3} = 0$: dunque 1°. $\frac{\sigma\delta^4 y}{\delta x^3} = \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = C$, o $\frac{\delta^3 y}{\delta x^2} = C\delta x$; 2°. $\frac{\sigma\delta^3 y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = C\delta x\sigma 1 + C' =$ (827) $Cx + C'$, o $\frac{\delta^2 y}{\delta x} = \delta x Cx + C'\delta x$; 3°. $\frac{\sigma\delta^2 y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} = C\delta x\sigma x + C'\delta x\sigma 1 + C'' =$ (827) $C(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + C'x + C''$, o $\delta y = C\delta x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + \delta x C'x + C''\delta x$; 4°. $\sigma\delta y = y = C\delta x\sigma \frac{1}{2}x^2 - C\delta x\sigma \frac{1}{2}x + C'\delta x\sigma x + C''\delta x\sigma 1 + C''' =$ (827) $C(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 +$

$\frac{1}{12}x) - C(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x) + C'(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + C''x + C''' = \frac{1}{6}Cx^3 + \frac{1}{2}(C' - C)x^2 + (\frac{1}{3}C - \frac{1}{2}C' + C'')x + C'''$.

974. Si applica questa dottrina a varie specie di *Serie Ricorrenti*: noi ci limiteremo alle più semplici. Già si sa (273) che l'equazione $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2$ ec. si riduce a

$$0 = \begin{cases} a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + a^2Ex^4 + \text{ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + 2aDx^4 + \text{ec.} \\ \quad\quad - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \text{ec.} \end{cases}$$

e i due primi coefficienti A, B si determinano dall'equazioni $a^2A - a^2 = 0$, $a^2Bx + 2aAx = 0$: riguardo agli altri C, D, E ec., si ha $C = \frac{-2B}{a} + \frac{A}{a^2}$, $D = \frac{-2C}{a} + \frac{B}{a^2}$, $E = \frac{-2D}{a} + \frac{C}{a^2}$ ec., d'onde la serie ricorrente $1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} + \frac{29x^4}{a^4}$ ec. $= \frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$ *rotto genitore* della serie. Ora le costanti quantità $\frac{-2}{a}$, $+\frac{1}{a^2}$ dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A ovvero C, B ovvero D, C ec. che precedono, nasce ciascun coefficiente C, D, E ec. che segue, si chiamano *scala di relazione*: ed è facile osservare 1°. che *la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha la variabile nel denominatore ordinato del rotto genitore presi con segni contrarj e divisi per i termini costanti*: 2°. che *per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec., e far la somma di tutto*. Così il rotto $\frac{1 + z + z^2}{1 - z - z^4 + z^5}$ si cangia nella serie $1 + 2z + 3z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8$ ec., la cui scala di relazione (mancando z^2, z^3) sarà $1, +0, +0, +1, -1$, e supposti trovati i primi cinque coefficienti 1, 2, 3, 3, 4, per avere il sesto, il settimo ec., si farà $1.4 + 0.3 + 0.3 + 1.2 - 1.1 = 5$ coefficiente del sesto termine, $1.5 + 0.4 + 0.3 + 1.3 - 1.2 = 6$, coefficiente del settimo ec.

975. Data dunque una serie ricorrente $f + gx + hx^2 + kx^3$ ec. con la scala di relazione $p, +q, +r$ ec., la sua somma all'infinito sarà un rotto genitore $\frac{s + tx + ux^2 \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ec.}}$

di cui la scala di relazione già somministra il denominatore (974) Per avere i coefficienti s, t, u ec. del numeratore, si divida $s + tx + ux^2$ ec. per $1 - px - qx^2$ ec. e paragonando il quoziente $s + (t + ps) x + (u + qs + pt + p^2 s) x^2$ ec. con la serie data, si avrà $s = f, t = g - pf, u = h - pg - qf$, ec.; dunque la somma cercata sarà . . . . $\frac{f + (g - pf) x + (h - pg - qf) x^2 \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$. Così se la serie sia $1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2}$ ec., e la scala di relazione $\frac{-2}{a}, + \frac{1}{a^2}$, avremo $f = 1, g = \frac{-2}{a}, h = \frac{5}{a^2}$ ec., $p = -\frac{2}{a}, q = \frac{1}{a^2}$, e la sua somma all' infinito sarà $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$ (974). Che se si voglia la somma fino ad un dato termine τx^n, i termini dopo di esso all' infinito saranno $\upsilon x^{n+1} + \varphi x^{n+2} + \chi x^{n+3}$ ec. $= x^{n+1} (\upsilon + \varphi x + \chi x^2 \text{ ec.}) =$ . . . . $\frac{x^{n+1} [\upsilon + (\varphi - p\upsilon) x + (\chi - p\varphi - q\upsilon) x^2 \text{ ec.}]}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$, e però la somma della serie si troverà . . . .

$$\frac{f + (g - pf) x + (h - pg - qf) x^2 \text{ ec.} - \upsilon x^{n+1} - (\varphi - p\upsilon) x^{n+2} - (\chi - p\varphi - q\upsilon) x^{n+3} \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}} ;$$

onde nel caso d' una scala bimembre $p, + q$ quando $h = pg + qf$ e $\chi = p\varphi + q\upsilon$ (974), la somma fino al termine τx^n sarà $\frac{f + (g - pf) x - \upsilon x^{n+1} - (\varphi - p\upsilon) x^{n+2}}{1 - px - qx^2} =$ . . . . . $\frac{f + (g - pf) x - (p\tau + q\sigma) x^{n+1} - q\tau x^{n+2}}{1 - px - qx^2}$ perchè $\upsilon = p\tau + q\sigma, \varphi = p\upsilon + q\tau$ (974). Così volendo la somma della serie di sopra $1 - \frac{2x}{a}$ ec. fino al quinto termine $\frac{29x^4}{a^4}$, ella si troverà $\frac{a^6 + 70ax^5 - 29x^6}{a^6 + 2a^5 x - a^4 x^2}$.

976. Ma questa formula della somma involvendo i termini particolari f, g, h ec. υ, φ, χ ec., non può darci il termine generale (275 . 276); onde alla ricerca di esso applicheremo l' equazioni a differenze finite. Supposta $q, + r$ la scala di relazione, yx^n il termine generale, y il general

coefficiente della serie ec. $'yx^{n-1}, yx^{n}, y'x^{n+1}, y''x^{n+2}$ ec. ed n il numero dei termini la cui differenza costante è $\delta n = 1$, si avrà $y'' = qy' + ry$ (974): ma $y' = y + \delta y, y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$ (823); dunque $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1-q-r} = 0$, che paragonata con l' equazione di sopra (972) ci dà $a = \ldots \frac{2-q}{1-q-r}, b = \frac{1}{1-q-r}, X = 0, m' = \frac{q-2+\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}$, $m'' = \frac{q-2-\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}, h' = 1 + \frac{1}{m'}, h'' = 1 + \frac{1}{m''}, u' = Ch'^n, u'' = C'h''^n$ ed $yx^n = \ldots \frac{[(a+m')u'' - (a+m'')u']x^n}{m'-m''}$ (972). Così data la serie $1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec. $= 1x^0 + 0x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec., la cui scala di relazione $1, +2$, sarà $q = 1, r = 2, a = -\frac{1}{2}$, $m' = -\frac{1}{2}, m'' = 1, h' = -1, h'' = 2, u' = C(-1)^n, u'' = C'2^n, y = \frac{1}{3}C'2^{n+1} + \frac{1}{3}C(-1)^n$; e poichè fatto $n = 0$, si ha dalla serie $y = 1$, e fatto $n = 1$ si ha $y = 0$, le due equazioni $1 = \frac{2}{3}C' + \frac{1}{3}C, 0 = \frac{4}{3}C' - \frac{1}{3}C$ danno $C' = \frac{1}{2}$, $C = 2$ ed $yx^n = \frac{1}{3}(2^n \pm 2)x^n$, preso il segno $+$, o il segno $-$ secondo che n è pari o impari.

977. Talvolta per esser $2 - q = 0$ ed $1 - q - r = 0$ si trova $m' = m'' = \frac{0}{0}$: allora l'equazione $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1-q-r} = 0$ si riduce a $\delta^2 y = 0$ ove la differenziale costante è $\delta n = 1$ (976); dunque $y = Cn + C'$ (973). Così data la serie $1 + 6x + 11x^2 + 16x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, + r = 2, -1$ e perciò $q - 2 = 0$, ed $1 - q - r = 0$, sarà $y = Cn + C'$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 6$, le due equazioni $1 = C', 6 = C + C'$ o $5 = C$ danno $yx^n = (5n + 1)x^n$. Può anche avvenire che si trovi $m' = m'' = -\frac{1}{2}a$ (965): allora fatta al solito $m'' = m' + \omega = \frac{2\omega - a}{2}, h' = 1 + \frac{1}{m'} = \frac{a-2}{a} = \frac{g}{a}, h'' = 1 + \frac{1}{m''} = \frac{a-2-2\omega}{a-2\omega} = \frac{g-2\omega}{a-2\omega}$, sarà $u'' = C\left(\frac{g-2\omega}{a-2\omega}\right)^n$, cioè sviluppando il binomio con trascurare ω^2, ω^3 ec., $u'' = \frac{C(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{-2\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)}$, e però

$$(823)\ y = \frac{Ca(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{-2\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)} - \frac{(a+2\omega)Cg^n}{-2\omega a^n} = [\,Cn -$$

$\frac{Cg}{a}(n-1)\,]\frac{g^{n-1}}{a^{n-1}}$; onde fatto $\frac{Cg}{a} = C'$ e restituito il valor di $g = a - 2$, si ha $y = [\,Cn - C'(n-1)\,]\left[\frac{a-2}{a}\right]^{n-1}$: così data la serie $1 + 7x + 24x^2 + 68x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, +r = 4, -4$, sarà (976) $a = -2$ ed $y = [\,Cn - C'(n-1)\,]2^{n-1}$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 7$, sarà $C' = 2$, $C = 7$ ed $yx^n = [\,7n - 2(n-1)\,]2^{n-1}x^n$. Gli immaginarj non fanno quì difficoltà, come può vedersi nella serie $1 + 2x - x^2 - 12x^3 - 19x^4$ ec. la cui scala è $2, -5$, e il cui termine generale (fatto $2\sqrt{-1} = g$) si trova $yx^n = \frac{[(1+g)^{n+1} - (1-g)^{n+1}]x^n}{2g}$ senza immaginarj.

978. Anche nell' Analisi del *Caso* e della *Probabilità* si adoperano le differenze finite. Chiamando noi fortuito o *casuale* un successo allorchè ignoriamo le cagioni che posson farlo avvenire, siamo costretti a riguardar come *egualmente probabile* l' esistenza o inesistenza di due successi casuali se l' uno o l' altro dovendo necessariamente accadere, non vi sia maggior ragione per cui l' uno debba accader piuttosto che l' altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l' esistenza di tre avvenimenti che a vicenda escludendosi mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma quì l' inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel rapporto di 2 a 1, perchè di tre casi possibili l' inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità Π, Π' dell' esistenza o inesistenza d'un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente è più grande o più piccolo il numero dei casi F, C a lei favorevoli o contrarj, e quanto reciprocamente è più piccolo o più grande quello dei casi possibili P; onde sarà $\Pi = F \times \frac{1}{P} = \frac{F}{P}$ e $\Pi' = C \times \frac{1}{P} = \frac{C}{P}$; e poichè i casi favorevoli F insieme coi contrarj C formano i casi possibili P, cioè $F + C = P$, si avrà $\Pi + \Pi' = 1$ ed 1 rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabi-

lità si determina la *speranza* Σ degli interessati all' esistenza dell' avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata S e dalla probabilità Π d' ottenerla, cioè $\Sigma = \Pi S = \frac{FS}{P}$. Ecco ora un Problema sulle probabilità per far vedere come si applichino a somiglianti ricerche le Differenze finite.

Presa a caso una quantità di monete da un mucchio n di esse, determinar la probabilità che il numero preso sia pari o caffo, supponendo che possa prendersi una sola moneta, o più, o tutte. Chiamando y i casi in cui il numero preso può esser pari, e z quelli in cui può esser caffo, una nuova moneta aggiunta al mucchio e combinata coi precedenti casi in caffo, gli renderà tutti pari, onde allora la somma dei pari sarà I^a. $y' = y + z$; ma combinata coi precedenti casi pari, gli cangierà tutti in caffo oltre l' unità aggiunta che è caffo, onde la somma dei casi in caffo sarà II^a. $z' = z + y + 1$. La I. dà $y + \delta y = y + z$ cioè $\delta y = z$ e però $\delta^2 y = \delta z$: dalla II. si ha $z + \delta z = z + y + 1$ cioè $\delta z \,(= \delta^2 y) = y + 1$ e però $y - \delta^2 y = -1$, equazione da cui abbiamo (823) $a = 0, b = -1, X = -1, m' = 1, m'' = -1, h' = 2, h'' = 0, u' = (C + 1)2^n - 1, u'' = -1$ ed $y = (C + 1)2^{n-1} - 1$; ma quando $n = 1$ non si hanno casi pari e però $y = 0$; dunque $C = 0$, $y = 2^{n-1} - 1, y' = 2^n - 1, z\,(= y' - y) = 2^{n-1}$. Ora i casi y pari coi casi z in caffo danno i casi possibili $P = y + z = 2^n - 1$; dunque la probabilità per i casi pari è $\Pi = \frac{F}{P} = \frac{y}{y+z} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, e quella per gli impari $\Pi' = \frac{C}{P} = \frac{z}{y+z} = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$; e poichè $2^{n-1} > 2^{n-1} - 1$, la scommessa per il numero caffo sarà sempre più vantaggiosa che per il pari.

INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI.

979. SUpposta z una funzione di più variabili x, y ec., diconsi *a differenze parziali del prim' ordine* quelle equazioni in cui z, x, y ec. vanno unite con $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$ ec. (935); *del secondo* allorchè oltre z, x, y ec., $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$ ec., trovansi

anche $\frac{dd^x z}{dx^2} = \frac{d^{2x} z}{dx^2}$, $\frac{dd^y z}{dy^2} = \frac{d^{2y} z}{dy^2}$ ec., $\frac{d^x d^y z}{dxdy} = \frac{d^y d^x z}{dydx}$ ec. (935), differenze parziali seconde, che nascono e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per x, $\frac{d^y z}{dy}$ per y ec. essendo costanti dx, dy ec., e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per y o $\frac{d^y z}{dy}$ per x ec.: così si dica degli altri ordini successivi. Tali equazioni qualche volta s' incontrano nell' alta Geometria, e assai spesso nella Fisica Matematica più sublime: ma come il Calcolo Infinitesimale suppone perfetta l' Algebra, così quello dell' equazioni a differenze parziali suppone perfetto l' Infinitesimale. Per esempio, quì si assume che possa sempre trovarsi il fattore m che rende esatta la differenziale qualunque $Pdx + Qdy$ (959), e si riguarda come integrata un' equazione a differenze parziali quando è ridotta all' integrazion d' un' equazione a differenze ordinarie: se il fattore non possa aversi o se non si possa integrare l' equazione differenziale, il difetto sarà dei Calcoli inferiori, non di quello di cui trattiamo. Eccone alcune più elementari nozioni.

980. Se z sia funzione di x, y, si avrà $dz = Pdx + Qdy = d^x z + d^y z$ e però $\frac{d^x z}{dx} = P$, $\frac{d^y z}{dy} = Q$ (936). Dal che si raccoglie 1°. che l' espressioni $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ son quantità variabili ma finite, denotanti il coefficiente P o Q di dx o di dy quando si differenzia z o per x o per y: 2°. che se nella differenziazione di z si prenda x o y costante, si ha $dz = d^y z = Qdy$ o $dz = d^x z = Pdx$, e l'integrale di queste equazioni sarà $z = \int^y Qdy + C$ o $z = \int^x Pdx + C'$ ove potrà essere $C = \varphi(x)$, $C' = \varphi(y)$ (936.2°.) se d' altra parte non si sappia che tali funzioni non hanno luogo: 3°. che avendosi $\int Pdx = Px - \int xdP$, e $\int Qdy = Qy - \int ydQ$ (916), sarà $z = \int Pdx + \int Qdy = Px + Qy - \int(xdP + ydQ) = \frac{xd^x z}{dx} + \frac{yd^y z}{dy} - \int\left(x . d\left(\frac{d^x z}{dx}\right) + y . d\left(\frac{d^y z}{dy}\right)\right)$.

981. Dico

981. Dico ora che se z sia una funzione di x, y onde $dz = d^x z + d^y z$, ella sarà anche una funzione di x, u (supposta u funzione di x, y) cosicchè denotando con $d'^x z$ la differenza di z per la nuova x, si avrà $dz = d'^x z + d^u z$. Infatti se $z = ax + by = nax + by - (n-1)ax = \ldots \frac{(ax+by)}{x^n} x^n =$ ec., potrà farsi $u = nax + by$, $u = by - (n-1)ax$, $u = \frac{ax+by}{x^n}$, $u = (ax+by)x^n$, $u =$ ec., ed u sarà sempre funzione di x, y, onde z lo sarà anche di x, u. Perciò u è indeterminata e suscettibile d' infinite forme differenti.

982. Anzi può u soggettarsi a soddisfare ad una condizione richiesta, per esempio, che sia tale onde abbiasi $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$, intendendo per p una data funzione di x, y; poichè preso dall' equazione proposta e sostituito in $du = d^x u + d^y u$ il valor di $d^x u$, si avrà $du = d^y u - \frac{pdxd^y u}{dy} = \frac{d^y u}{dy}(dy - pdx)$: dunque supposto m il fattore che rende esatta la differenziale $dy - pdx$ (959) onde si abbia $mdy - mpdx = dt$, verrà $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot \frac{dt}{m}$; dunque u è funzione di t, ed essendo u indeterminata (981), può farsi $u = t$ onde $\frac{d^y u}{dy} = m$, valori che danno $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$. Così se si voglia u di modo che sia $\frac{d^x u}{dx} - \frac{yd^y u}{xdy} = 0$, avremo $p = -\frac{y}{x}$ e $dy - pdx = dy + \frac{ydx}{x}$, differenziale esatta se si moltiplichi per $m = x = \frac{d^y u}{dy}$; dunque $xy = t = u$ e $\frac{d^x u}{dx} - \ldots \frac{yd^y u}{xdy} = y - \frac{yx}{x} = 0$.

983. Considerando dunque z come funzione di x, y e

di x, u, si avrà $dz = d^x z + d^y z = d'^x z + d^u z$ (981): ma $du = d^x u + d^y u$ ovvero $du d^u z = (d^x u + d^y u) d^u z$, e però $d^u z = \frac{d^u z}{du}(d^x u + d^y u)$; dunque $dz = d'^x z + \frac{d^u z}{du} . d^x u + \frac{d^u z}{du} d^y u = d^x z + d^y z$, e quindi (980) $d^x z = d'^x z + \frac{d^u z}{du} . d^x u$ e $d^y z = \frac{d^u z}{du} . d^y u$.

984. Ciò premesso, poco vi vuole a integrar l' equazioni lineari del prim' ordine a tre variabili, che tutte comprendonsi nella generale $\frac{d^x z}{dx} + \frac{p d^y z}{dy} + q = 0$, essendo p una data funzione di x, y, mentre q può esserlo di x, y, z. Poichè sostituiti in essa i valori di $d^x z, d^y z$ (983), si ha $\frac{d'^x z}{dx} + \frac{d^u z}{du}\left(\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy}\right) + q = 0$; e fatto $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0$ per determinar u (982), viene $\frac{d'^x z}{dx} + q = 0$. Posto dunque in q il valor di y ricavato da quello di u, onde q si cangi in q', avremo $d'^x z + q' dx = 0$: ma z è quì funzione di x, u e manca $d^u z$; dunque u è costante (980.2°.); dunque $d'^x z = dz = - q' dx$, dunque $z = -\int^x q' dx + \varphi\ (u)$ (980.2°.).

Esempio. Debba integrarsi $\frac{d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{x dy} + \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$: avremo $p = \frac{y}{x}$, $q = \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0 = \frac{d^x u}{dx} + \frac{y d^y u}{x dy}$. Da questa equazione si ha (982) $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{y dx}{x}\right)$, e poichè il fattore $m = \frac{1}{x}$ rende esatta la differenziale $dy - \frac{y dx}{x}$, verrà $\frac{y}{x} = t = u$, $y = ux$,

$q' = \frac{z}{ux} - ax\sqrt{(1+u^2)}$, e dovrà integrarsi $dz = -\frac{zdx}{ux} + axdx\sqrt{(1+u^2)}$ ovvero $uxdz + zdx = aux^2dx\sqrt{(1+u^2)}$ fatta u costante; integrando pertanto (968. XI.) e restituito quindi il valor di $u = \frac{y}{x}$, si ottiene $z = \frac{ayx\sqrt{(x^2+y^2)}}{2y+x} + u^{-\frac{x}{y}}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

985. Ho supposta p una data funzione di x, y: ma si deve aggiungere che può essere anche funzione di x, y, z, senza che si alteri l' operazione. Per dimostrarlo basta osservare che da un' equazione $z - axz = by$ può aversi o $z = \frac{by}{1-ax}$, valore assoluto di z, o $z = axz + by$, valore che determina z quando essa nel secondo membro si riguardi come una costante. In tal caso u che era funzione di x, y (980), lo sarà anche di x, y, z, e perciò nell' equazione $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$ (982) potrà esserlo anche p, ma z vi si dovrà prender per costante, e quindi tutte l' operazioni dovranno farsi nella consueta maniera. Così per l' equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{xzd^y z}{y^2 dy} = 0$ si ha $p = \frac{xz}{y^2}, q = 0, du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{zxdx}{y^2}\right)$, il fattore $m = y^2$, onde $u = \frac{y^3}{3} - \frac{zx^2}{2}$ e $z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}zx^2\right) = \varphi(2y^3 - 3zx^2)$.

Nè faccia stupore se qui si sopprime il denominator 6; poichè le costanti soppresse, o sieno coefficienti o esponenti o denominatori comuni, ricompariscono in seguito allorchè si determina la forma delle funzioni φ secondo certe condizioni assegnate. Per esempio se si voglia la forma della funzione φ tale che fatto $y = mx$ nell' equazione $z = \varphi(y^2 + x^2)$, si abbia $z = \frac{x^2}{a}$, è chiaro che sostituiti i valori di z ed y, l' equazione diverrà $\frac{x^2}{a} = \varphi(x^2 + m^2x^2)$; onde posto $u = x^2 + m^2x^2$ e però $x^2 = \frac{u}{m^2+1}$, si avrà $\varphi(u) =$

$\frac{u}{u(m^2+1)} = \frac{x^2+y^2}{a(m^2+1)} = \varphi(x^2+y^2) = z$; e si vede che in z era stato soppresso il denominator costante $a(m^2+1)$. In tal guisa (per avvisarne quì di passaggio) si determinano le funzioni arbitrarie dell' equazioni a differenze parziali finchè almeno le condizioni assegnate per la loro determinazione possono esprimersi analiticamente.

986. Del resto, si integrano con questo metodo anche certe equazioni per cui si suol ricorrere alla formula accennata di sopra (980.3°.). Tale è l' equazione $\frac{d^x z}{dx} \cdot \frac{d^y z}{dy} = 1$, che ridotta a $\frac{d^x z}{dx} - \frac{dy}{d^y z} = 0$, ci dà $p = 0$, $q = -\frac{dy}{d^y z}$, $du = \frac{d^y u}{dy} . dy$, onde $u = y$, $q' = -\frac{du}{d^u z}$, e quindi $dz = \frac{du}{d^u z} dx$ cioè $z = \frac{xdy}{d^y z} + \varphi(y) = \frac{xd^x z}{dx} + \varphi(y)$: dunque differenziando z per y, si avrà $d^y z \left(= \frac{dx}{d^x z} dy\right) = dy\varphi'(y)$; ed integrando, $\frac{ydx}{d^x z} = \varphi(y)$ + una *Costante* che può esser funzione di $\frac{d^x z}{dx}$; dunque $\varphi(y) = \frac{ydx}{d^x z} - f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ e perciò $z = \ldots$ $\frac{xdy}{d^y z} + \frac{ydx}{d^x z} + f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$: cosicchè se sia $\frac{d^x z}{dx} = \frac{dy}{d^y z} = r$ onde $\frac{dx}{d^x z} = \frac{d^y z}{dy} = \frac{1}{r}$, verrà $z = rx + \frac{y}{r} - f(r)$, precisamente come si avrebbe dalla citata formula.

987. Per assicurarsi poi che l' operazione è ben fatta, si torna dall' integrale all' equazion differenziale 1°. differenziando tutta l' integrale per x, dal che in luogo di φ si ha φ' (853): 2°. differenziandola nuovamente per y dal che pure si ha φ' in luogo di φ: 3°. eliminando φ' per mezzo

delle due equazioni. Si integri al solito (984) l' equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{r^2 y d^y z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$, ove fatta $r^2 = m$, $s^2 = n$, sarà $p = \frac{my}{nx}$, $q = -\frac{mz}{x}$, $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{my\,dx}{nx}\right)$, il fattore $= \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, e perciò $\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}} = u$, $dz = \frac{mz\,dx}{x}$ e $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$ ovvero $\frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$: per ritornare alla data, differenzio questa per x e viene $\frac{x^m d^x z - mzx^{m-1}dx}{x^{2m}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{-my\sqrt[n]{x^{m-n}}\,dx\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{n\sqrt[n]{x^{2m}}}$; differenzio per y ed ho $\frac{d^y z}{x^m} =$

$\frac{dy\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}$; elimino φ', riduco, e trovo la data.

988. Sia ora da integrarsi l' equazion lineare dell' ordine n^{simo} e della forma $\frac{x^n d^{nx} z}{dx^n} + \frac{nx^{n-1} y d^{(n-1)x} d^y z}{dx^{n-1} dy} + \text{ec.}\ldots + \frac{y^n d^{ny} z}{dy^n} = Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{ec.}\ldots\ldots + X\Psi\left(\frac{y}{x}\right) + X'\Psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{ec.}$: e per render più facile l' intelligenza del metodo, riduciamola ad un caso particolare e sia I^a. $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3} + \frac{3x^2 y d^{2x} d^y z}{dx^2 dy} + \frac{3xy^2 d^x d^{2y} z}{dx dy^2} + \frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3} = 0$. Pongo $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{2xy d^x d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = V$ (V è funzione di x, y) e differenziando prima per x e poi per y, viene II^a. $\frac{2x d^{2x} z}{dx} + \ldots$

$$\frac{x^2 d^{3x} z}{dx^2} + \frac{2y d^x d^y z}{dy} + \frac{2xy d^{2x} d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} d^x z}{dy^2} = d^x\ \mathrm{V},\ \mathrm{III}^a.$$

$$\frac{x^2 d^{2x} d^y z}{dx^2} + \frac{2x d^x d^y z}{dx} + \frac{2xy d^x d^{2y} z}{dx dy} + \frac{2y d^{2y} z}{dy} + \frac{y^2 d^{3y} z}{dy^2} = d^y\ \mathrm{V}.$$

Moltiplico la II. per $\frac{x}{dx}$, la III. per $\frac{y}{dy}$ e sostituiti nella data i valori di $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3}$ e di $\frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3}$, ella dopo la riduzione diventa $\frac{d^x \mathrm{V}}{dx} + \frac{y d^y \mathrm{V}}{x dy} - \frac{2\mathrm{V}}{x} = 0$, che integrata (984) dà $\mathrm{V} = x^2 \varphi(\frac{y}{x})$, onde l'integrale della I. sarà IV^a. $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{2xy d^x d^y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = x^2 \varphi(\frac{y}{x})$. Questa nuovamente si integra ponendo $\frac{x d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{dy} = \mathrm{V}$, differenziando prima per x e poi per y, moltiplicando le due dlfferenziali respettivamente per $\frac{x}{dx}, \frac{y}{dy}$, e sostituendo nella data i valori di $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$ e di $\frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2}$, che fatta la riduzione, la trasformano in $\frac{d^x \mathrm{V}}{dx} + \frac{y d^y \mathrm{V}}{x dy} - \frac{\mathrm{V}}{x} - x\varphi(\frac{y}{x}) = 0$, d'onde si ha $\mathrm{V} = x^2 \varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x})$ e per integrale della IV., $\frac{x d^x z}{dx} + \ldots \frac{y d^y z}{dy} = x^2 \varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x})$. E finalmente per l' integrale di quest' ultima, che sarà l' integrale finita della I., si trova $z = \frac{x^2}{2}\varphi(\frac{y}{x}) + x\Psi(\frac{y}{x}) + f(\frac{y}{x})$. Così si trattano tutte l'altre della medesima forma e d' un ordine qualunque, e perciò anche l' equazione proposta in principio, giacchè il se-

condo membro $Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ec. non altera punto il giro delle prescritte operazioni.

989. E' però tanto simmetrica questa equazione, che il metodo d'integrarla si stimerà forse d'un uso assai raro. Eppure con esso integreremo più facilmente di quel che altri abbia fatto finora, l'equazioni *omogenee* di un ordine n^{simo}, quelle cioè che hanno tutti i termini con differenziali al medesimo grado e con coefficienti costanti. Sia, per esempio, l'equazione I^a. $\frac{d^{2x}z}{dx^2}+\frac{bd^xd^yz}{dxdy}+\frac{cd^{2y}z}{dy^2}=R$ ove R può esser funzione di x,y. Pongo II^a. $\frac{d^xz}{dx}+\frac{md^yz}{dy}=V$ (m è un coefficiente indeterminato), e differenziando al solito per x e per y, moltiplicando le differenziali respettivamente per $\frac{1}{dx}$, $\frac{c}{mdy}$, e sostituendo nella I. i valori di $\frac{d^{2x}z}{dx^2}$ e di $\frac{cd^{2y}z}{dy^2}$, ella (se si faccia III^a. $b-m-\frac{c}{m}=0$) diverrebbe IV^a. $\frac{d^xV}{dx}+\frac{cd^yV}{mdy}=R$. Ma quì bisogna osservare che la risoluzion della III^a. dando due valori m', m'' di m, la II^a. si scioglie nelle due $\frac{d^xz}{dx}+\frac{m'd^yz}{dy}=V$, $\frac{d^xz}{dx}+\frac{m''d^yz}{dy}=V$, d'onde viene $\frac{d^xz}{dx}=V$ ovvero $\frac{d^yz}{dy}=0$; dunque V non è ora funzione di x, y ma di x solamente; dunque la IV^a. dee ridursi a $\frac{dV}{dx}=R$ (980. 2°.), da cui abbiamo $V=\int^x Rdx$ senza la solita $\varphi(y)$ che si è trovata $=0$; dunque l'integrale della I. sarà $\frac{d^xz}{dx}+\frac{md^yz}{dy}=\int^x Rdx$, che nuovamente integrata (984) dà $z=\int dx\int^x Rdx+\varphi(y-mx)$ ricordandosi di mettere in R il valor di $y=u+mx$ (984) prima di integrar $\int^x Rdx$: ma dai due valori m', m'' di m si ha

$z=\int dx\int^x \mathrm{R}dx+\varphi(y-m'x)$ e $z=\int dx\int^x \mathrm{R}dx+f(y-m''x)$; dunque sommando verrà finalmente $z=\int dx\int^x \mathrm{R}dx+\frac{1}{2}\varphi(y-m'x)+\frac{1}{2}f(y-m''x)=\int dx\int^x \mathrm{R}dx+\varphi(y-m'x)+f(y-m''x)$, la cui differenziale restituisce in fatti la data. Così presso a poco si integreranno l' equazioni omogenee degli altri ordini.

990. Al caso di $m'=m''=\frac{1}{2}b$ soddisfà anche più direttamente il metodo stesso (988); poichè avendosi allora $c=\frac{b^2}{4}$, la proposta equazione (989) diventa $\frac{d^{2x}z}{dx}+\frac{bd^x d^y z}{dxdy}+\frac{b^2 d^{2y} z}{4dy^2}=\mathrm{R}$, i cui coefficienti costanti formano un quadrato perfetto. Si ponga dunque $\frac{d^x z}{dx}+\frac{bd^y z}{2dy}=\mathrm{V}$: differenziando per x e per y, moltiplicando respettivamente le due differenziali per $\frac{1}{dx}$, $\frac{b}{2dy}$ e sostituendo al solito, si troverà $\frac{d^x \mathrm{V}}{dx}+\frac{bd^y \mathrm{V}}{2dy}=\mathrm{R}$ da cui si ottiene (984) $\mathrm{V}=\int^x \mathrm{R}dx+\varphi(y-\frac{bx}{2})$; dunque l' integrale della data sarà $\frac{d^x z}{dx}+\frac{bd^y z}{2dy}=\int^x \mathrm{R}dx+\varphi(y-\frac{1}{2}bx)$, dalla cui integrazione viene $z=\int dx\int^x \mathrm{R}dx+x\varphi(2y-bx)+f(2y-bx)$.

991. La natura del nostro Libro non ci permette di estenderci più oltre sull' equazioni a differenze parziali. Solo aggiungeremo che questa teoria si applica sempre utilmente, e spesso per necessità, a tutti i problemi geometrici ove si considerano le superficie curve. Si voglia, per esempio, l' equazion generale di tutte le superficie di rivoluzione

luzione intorno all' asse AA, e si supponga $dz = d^x z + d^y z = Pdx + Qdy$ (980) la differenziale di questa equazione. 196.
Fatta HF $= z$, FP $= y$, PC $= x$, PM $= u =$ PH, si ha (730) $u^2 = z^2 + y^2$, o differenziando, $dz = \frac{udu}{z} - \frac{ydy}{z} = Pdx + Qdy$; e poichè Qdy deve eguagliarsi a $-\frac{ydy}{z}$ (936), sarà $Pdx = \frac{udu}{z}$; dunque u è funzione di x e può farsi $u = nx$. Si avrà pertanto $Q = \frac{-y}{z}$, $P = \frac{n^2x}{z}$, $\frac{P}{n^2x} + \frac{Q}{y} = 0 = \frac{d^x z}{dx} + \ldots \frac{n^2xd^y z}{ydy}$, ed integrando (984) con prendere il fattore $m = 2y$, verrà $z = \varphi(y^2 - n^2x^2)$, equazione cercata.

992. Poichè però non possono aver quì luogo le notizie occorrenti per dedurre da questa generale equazione l' equazioni particolari di superficie determinate, rammenteremo per ora al nostro intento, che se nell' equazione $u^2 = z^2 + y^2$ si sostituisca il valor di u cavato dall' equazion della curva genitrice AEAE, si avrà subito l' equazione alla superficie generata (730): così se AEAE sia un' ellisse, avremo $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ e l' equazione alla superficie dell' ellissoide sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}$. Ma se la semiellisse AEA cresca o scemi uniformemente nel primo quarto di rivoluzione, e all' incontro scemi o cresca del pari nel secondo ec., cosicchè la superficie generata abbia il semiasse CK $= c$ oltre i due AC $= a$, CE $= b$, è ben vero che non sarà più PM $=$ PH perchè la sezione MLP normale al piano AEAE, non sarà più un circolo ma un' ellisse: per altro essendo MLP simile alla sezione EKC segata pur normalmente per ECE, avremo EC (b) : CK (c) :: MP (u) : PL $= \frac{cu}{b}$; onde HF$^2 = z^2 = \frac{c^2u^2}{b^2u^2}(u^2 - y^2)$; riducendo dunque e sostituendo il valor di $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, l' equazione a questa superficie sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

196. 993. Abbiasi dunque un' infinità di tali superficie ellittico-sferoidali AEAKL simili tra loro e concentriche, e si cerchi l' equazione di quella che tutte le tagli ad angoli retti. Poichè per una delle date superficie abbiamo $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (992) e tutte son simili, supposta $a:b:c::r:s:1$ la ragione costante dei loro semiassi, e però $a = rc$, $b = sc$, la generale equazione di tutte diverrà $1 = \ldots \frac{x^2}{r^2c^2} + \frac{y^2}{s^2c^2} + \frac{z^2}{c^2}$, ove r, s saran costanti in ciascuna sferoide e il solo c varierà dall' una all' altra: perciò differenziando, la comune equazione delle superficie da tagliarsi sarà $dz = -\frac{xdx}{r^2z} - \frac{ydy}{s^2z} = X'dx + Y'dy$ fatto $X' = -\frac{x}{r^2z}$, $Y' = -\frac{y}{s^2z}$. Ora se ad un punto qualunque R della superficie AEAKL si alzi la normale $RT = f$ che incontri il piano AEA nel punto T a cui rispondono (condotta OST parallela a CA) le coordinate $CI = OT = a'$, $IT = GS = b'$, e da R si conduca sul piano AEA la perpendicolare $RV = z$, da V sopra CA la perpendicolare $VG = y$, e congiunta RS, pongasi $CG = OS = x$, sarà $TS = IG = a' - x$, $VS = b' - y$, e il triangolo RVS rettangolo in V darà $RS^2 = z^2 + (b' - y)^2$: ma appartenendo RS al piano RVS perpendicolare ad OT, anche il triangolo RST è rettangolo in S; dunque $RT = f = \sqrt{[z^2 + (b' - y)^2 + (a' - x)^2]}$, che per la natura delle normali alle superficie dovrà esser la massima o la minima di tutte le linee che da T posson condursi alla superficie AEAKL. Differenziando pertanto, verrà $zdz - (b' - y) dy - (a' - x) dx = 0$ (878), o sostituendo il valor di dz trovato di sopra, $(X'z - (a' - x)) dx + (Y'z - (b' - y)) dy = 0$, e quindi (880) $X'z - a' + x = 0$, $Y'z - b' + y = 0$, $a' = X'z + x$, $b' = Y'z + y$ ed $f = z\sqrt{(1 + X'^2 + Y'^2)}$. Ma giacchè nei punti ove le superficie si tagliano, le coordinate della cercata e della data debbono esser le stesse, supposta $dz = d^xz + d^yz = P'dx + Q'dy$ l' equazion differenziale della cercata, $k = RZ$ la sua normale in R, $g = CY$ ed $h = YZ$ le coordinate che determinano il punto Z in cui ella incontra il piano AEA, si troverà col raziocinio medesimo $g = P'z + x$, $h = Q'z + y$ e $k = z\sqrt{(1 + P'^2 + Q'^2)}$, onde se sia $TZ = t$ l' intervallo tra le due normali f, k, si avrà $t = \sqrt{(ZX^2 + XT^2)} = \sqrt{[(a' - g)^2 + (b' - h)^2]} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$. Or le due superficie debbon tagliarsi

ad angoli retti e però è retto l' angolo ZRT; dunque $t = \sqrt{(f^2 + k^2)} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$, cioè $1 + P'X' + Q'Y' = 0$, o mettendo i valori di X', Y', P', Q' dati di sopra $\frac{d^x z}{dx} + \frac{r^2 y d^y z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$ e però (987) $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$, equazione cercata, che diviene $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se le date sferoidi si cangino in sfere, ove essendo i semiassi $a = b = c$, si ha $r^2 = s^2 = 1 = m = n$. 196.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

994. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi* di cui già parlammo di sopra (877), un altro ve ne è più elevato che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il punto di una data linea ove una certa quantità variabile diventa massima o minima, cosicchè cangiandosi gli altri punti o elementi della curva, la quantità massima o minima non soffre alcun cangiamento; in questo si vuole la linea stessa in cui abbia luogo la proprietà del massimo o del minimo, di modo che la quantità massima o minima dipende da tutta la curva, e cangiatone qualunque elemento essa pure si cangia. Così il problema di determinar nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l' isoperimetre la curva che con l' ordinata e con l' ascissa racchiude la massima area (528. II°. III°.), appartiene al secondo. E' vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo, ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

995. Sia BD una curva che abbia per asse la retta AE $= a$, e fatta l' ascissa AP $= x$, si conducano l' ordinate perpendicolari AB, PM, ED. Pongo PM $= z$ intendendo per z una quantità composta comunque di x, di y, di $p = \frac{dy}{dx}$, di $q = \frac{dp}{dx}$, di $r = \frac{dq}{dx}$ ec. e anche degli integrali $\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., supposte φ, φ' ec. delle nuove funzioni di x, y, p, q ec. Se si prenda PT $= dx$ e si conduca l' ordinata TV, 203.

203. sarà PMVT $= zdx$ (946), ABMP $= \int zdx$ che va a zero se $x = o$, e diviene ABDE se $x = a$. Chiamisi H l'area ABDE; dunque se ciascuna ordinata PM $= z$ *varj* in più o in meno di una quantità infinitesima Mf e sia β la *caratteristica della variazione* come d lo è della differenziazione, avremo $Mf = \beta z$ *variazione* di z, $MfiV = \beta zdx$ *variazione* di $zdx =$ PMVT, $BcfM = \int \beta zdx$ somma degli elementi $MfiV$ e *variazione* dell' area ABMP, e finalmente BCKD $= \beta$H *variazione* dell' area ABDE $=$ H. Quindi se quest' area H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area BckD si annulli e sarà $\beta H = \beta . ABDE = \beta \int zdx = o$ (878), presa l' integrale da $x = o$ fino ad $x = a$. Da questa formula $\beta \int zdx = o$ si avrà la relazione tra x ed y o l' equazione alla curva che ha la proprietà cercata del massimo o del minimo: cosicchè qualunque altra equazione tra x ed y darà un valor più piccolo per H quando H è un massimo, o un valor più grande quando H è un minimo.

996. Il Calcolo delle Variazioni dee dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di βH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo. Or H può riguardarsi o nello *stato primitivo* quando z o PM non ha ricevuta in H alcuna variazione, o nello *stato variato* quando z vi ha avuta una variazione Mf, e si è cangiata in PM $\pm Mf = z \pm \beta z$. Ma siccome nello stato primitivo di H se x divenga $x \pm dx$ anche y diviene $y \pm dy$ (822); così nello stato variato mentre H passa in H $\pm \beta$H ed x ($=$ AP) resta lo stesso in ambedue gli stati, z ed y diventano $z \pm \beta z, y \pm \beta y$: onde x ordinariamente non influisce nella variazione βH, che solo dipende dalla variazione βz, e si ha $\beta x = o$, e perciò anche $\beta dx = o$: pur varierà anche x in certi casi, di cui non parleremo per ora.

997. Come z diventa $z + \beta z$, così z' ($=$ QN) si cangia in $z' + \beta z' =$ Qg, z'' ($=$ RS) in $z'' + \beta z'' =$ Rh ec.: ma $z' = z + dz$ (822) onde $\beta z' = \beta z + \beta dz$; dunque $\beta dz = \beta z' - \beta z = d\beta z$ (822), cioè *la variazione d' una differenziale eguaglia la differenziale della sua variazione*. Perciò scrivendo dz in vece di z, sarà $\beta d^2 z = d\beta dz = d^2 \beta z$, e di nuovo scrivendo quì dz in luogo di z, verrà $\beta d^3 z = d\beta d^2 z = d^2 \beta dz = d^3 \beta z$; e in generale $\beta d^n z = d^n \beta z$, o preso $m < n$, $\beta d^n z = d^m \beta d^{n-m} z$.

998. Del pari supposto $u = \int zdx$ sarà variando, $\beta u =$

$\beta\int z dx$, e differenziando, $du = z dx$; dunque βdu $(= d\beta u)$ 208.
$= \beta z dx$, e integrando, $\beta u = \int \beta z dx = \beta \int z dx$, cioè *la variazione dell' integrale* $\int$zdx *eguaglia l' integrale della variazione di* zdx. Perciò scrivendo $\int z$ in vece di z, avremo $\int \beta \int z dx = \beta \iint z dx = \iint \beta z dx$ ec.

999. Si raccoglie da tutto ciò 1°. che la differenziale dz è diversissima dalla variazione βz; poichè dz è l' aumento che riceve z quando l' ordinata passa ad un altro punto della stessa curva, laddove βz è l' aumento di z quando l' ordinata passa ad un altro punto d' un'altra curva: 2°. che ciascun valore di y nel suo passaggio allo stato variato essendo bensì infinitesimo (995) ma indipendente da ogni legge o condizione (altrimenti la curva CK non rappresenterebbe tutte quelle in cui può variarsi BD, ma sarebbe determinata) le variazioni βy non hanno alcun rapporto coi valori stessi di y, e sono anzi tanto arbitrarie e indefinite che posson poi determinarsi a piacere e anche mandarsi tutte a zero, fuorchè quella o quelle che corrispondono alla linea infinitesima PT $= dx$ dalla quale risulta la formula $\int z dx$: 3°. che z cangiandosi in $z \pm dz$ nella differenziazione, ed in $z \pm \beta z$ nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di* z *come se ne ha la differenza* purchè in luogo di dz, dy si scriva $\beta z, \beta y$ e si faccia x costante: così la variazione di $z = ax^2 y + bxy^2$ sarà $\beta z = ax^2 \beta y + 2bxy\beta y$ ec.

1000. Dunque $\beta(z dx) = dx \beta z + z \beta dx$: ma $\beta dx = 0$ (996); dunque $\beta(z dx) = dx \beta z$ e $\int \beta(z dx) = \int dx \beta z = \beta \int (z dx)$ (998).

1001. Parimente poichè $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}$ ec. (995), presa dx costante, si avrà $dp = \frac{d^2y}{dx}, dq = \frac{d^2p}{dx} = \frac{d^3y}{dx^2}, dr = \frac{d^2q}{dx} = \frac{d^4y}{dx^3}$ ec. ed integrando, $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{d^2y}{dx^2}, r = \frac{d^3y}{dx^3}$ ec., dunque $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$ (996) $= \frac{d\beta y}{dx}$ (997), $\beta q = \frac{\beta d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \beta y}{dx^2}$, $\beta r = \frac{\beta d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 \beta y}{dx^3}$ ec., differenziali che facilmente si deter-

203. minano osservando che $d\beta y = \beta y' - \beta y$, $d\beta y' = \beta y'' - \beta y'$, $d\beta y'' = \beta y''' - \beta y''$ ec. (997), e perciò $d^2\beta y = d\beta y' - d\beta y = \beta y'' - \beta y' - \beta y' + \beta y = \beta y'' - 2\beta y' + \beta y$, $d^3\beta y = d\beta y'' - 2d\beta y' + d\beta y = \beta y''' - \beta y'' - 2\beta y'' + 2\beta y' + \beta y' - \beta y = \beta y''' - 3\beta y'' + 3\beta y' - \beta y$ ec.: e se le variazioni di y', y'', y''' ec. sieno zero (999), verrà $d\beta y = -\beta y$, $d^2\beta y = \beta y$, $d^3\beta y = -\beta y$ ec.

1002. Volendo pertanto la variazione di z funzione di x, y, p, q, r ec. (995), siccome la sua differenza sarebbe $dz = Pdx + Qdy + Rdp + Sdq$ ec. supposte P, Q, R, S ec. funzioni di x, y, p, q ec.; così la sua variazione, fatto $\beta x = 0$ (996), sarà $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1001).

1003. Similmente per aver la variazione di $\int zdx$, essendo sempre z una funzione di x, y, p, q ec. si farà dx costante e avremo 1°. $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1002): 2°. $\beta(zdx) = dx\beta z$ (1000) $= Qdx\beta y + Rd\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: 3°. $\int \beta z dx = \beta \int zdx$ (998) $= \int Qdx\beta y + \int Rd\beta y + \int \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.; ma $\int Rd\beta y = R\beta y - \int dR\beta y$ (916) $= R\beta y - \int \frac{dx dR \beta y}{dx}$, e parimente $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \int \frac{dSd\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \ldots\ldots \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2Sdx\beta y}{dx^2}$ ec.; dunque $\beta \int zdx = \int dx\beta y \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec.}\right) + \beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec}\right) + \frac{d\beta y}{dx}(S - \text{ec.}) +$ ec. Fermiamoci a considerar questa formula.

1004. Osservo primieramente che ella è composta di una parte integrale $\int dx\beta y \left(Q - \frac{dR}{dx} \text{ ec.}\right)$, e di una parte assoluta $\beta y(R - \text{ec.}) + d\beta y(S - \text{ec.}) +$ ec. Or nel caso del massimo o del minimo per aver tutta la variazione βH bisogna porre $x = a$ nell' intera formula (995), ciò che di fatto eseguito nella sua parte assoluta, βy vi indicherà la variazione dell' ultima ordinata ED corrispondente all' asc-

sa AE $= a$: ma tal variazione essendo arbitraria si può supporre zero (999): dunque nel caso di $x = a$ tutta la parte assoluta i cui termini son moltiplicati per $\beta y = 0$, per $d\beta y = 0$ ec., si annichilerà e avremo la sola parte integrale $\int dx \beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = \beta H = 0$ (995). FIG. 203.

1005. In secondo luogo osservo che quest'ultima espressione è la somma di tutte le variazioni che nascono dalla variazione di ciascun valore di y: ma tutte posson mandarsi a zero fuorchè una (999); dunque la somma di esse si ridurrà a quella sola, e si avrà $dx\beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = 0$, ovvero $Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.} = 0$. Dal che si raccoglie 1°. che se z è solamente funzione di x, y, nella formula di sopra $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec (1003) sarà $p = 0, q = 0, r = 0$ ec. onde $R\beta p = 0, S\beta q = 0$ ec., e l'equazione ora trovata diverrà $Q = 0$: 2°. che se z sia funzione di x, y, p, nella formula stessa (1003) sarà $q = 0, r = 0$ ec. onde $S\beta q = 0$ ec., e la nostra equazione diverrà $Q - \frac{dR}{dx} = 0$: e così di seguito.

1006. Ma riguardo a questa seconda conseguenza convien riflettere che l'equazioni $Q - \frac{dR}{dx} = 0, Q - \frac{dR}{dx} + \ldots \frac{d^2S}{dx^2} = 0$ ec. son sempre differenziali o del primo o di altri ordini più elevati: onde la loro integrazione esigendo l'aggiunta di una o più costanti arbitrarie, l'equazione tra x ed y che somministra il massimo o il minimo, non sarà interamente determinata, e si avranno tanti massimi o minimi quanti sono i valori che posson darsi a ciascuna costante. Si fissa dunque in tali casi il vero massimo o minimo colla parte assoluta $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) + d\beta y (S - \text{ec.}) + \text{ec.} = 0$ (1004) che attesa la variazione arbitraria βy (999), non può generalmente andare a zero se non vi vada ciascun suo termine, e sia perciò $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) = 0$, $d\beta y (S - \text{ec.}) = 0$ ec., ovvero $R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.} = 0$, $S - \text{ec.} = 0$ ec., sempre nella supposizione di $x = a$ (1004): ciò

determina le costanti e quindi il massimo o minimo, come vedremo.

1007. Troviamo ora la variazione di $\int z dx$ quando z contiene non solo x, y, p, q ec. ma anche un' integrale $\int \varphi dx$ (995). Sia $\int \varphi dx = r$ e avremo I. $\beta r = \beta \int \varphi dx = \int Q' dx \beta y + \int R' d\beta y + \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec. (1003): di più essendo z funzione di r, x, y, p, q ec., supposta V una funzione come z, verrà II. $\beta z = V \beta r + Q \beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec., che sostituendo il valor della I., diviene $\beta z = V \int Q' dx \beta y + V \int R' d\beta y + V \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec. $+ Q \beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec. Ora $\int \beta z dx = \beta \int z dx$ (998); dunque $\beta \int z dx = \int (V dx \int Q' dx \beta y) + \int (V dx . \int R' d\beta y) + \int (V dx \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx})$ ec. $+ \int Q dx \beta y + \int R d\beta y + \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}$ ec. Per liberar la formula dal segno integrale moltiplicato, pongo $V dx = dK$ onde $\int (V dx \int Q' dx \beta y) = \int (dK \int Q' dx \beta y) = K \int Q' dx \beta y - \int K Q' dx \beta y$, $\int (V dx \int R' d\beta y) = \int (dK \int R' d\beta y) = K \int R' d\beta y - \int K R' d\beta y$, $\int (V dx \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}) = \int (dK \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}) = K \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx} - \int \frac{K S' d^2 \beta y}{dx}$ ec.; dunque $\beta \int z dx = K \int dx (Q' \beta y + \frac{R' d\beta y}{dx} + \frac{S' d^2 \beta y}{dx^2}$ ec.$) + \int dx [(Q - KQ') \beta y + (R - KR') \frac{d\beta y}{dx} + (S - KS') \frac{d^2 \beta y}{dx^2}$ ec.$]$, ove posson farsi le riduzioni di sopra (1003).

1008. Quasi nel modo stesso potrebbe aversi la variazione di $\int z dx$ quando z contiene più integrali $\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., e generalmente quando è data da un' equazion differenziale di qualunque ordine; potrebbe anche indagarsi la variazione di $\int z dx$ o di $\int z$ quando x non fosse costante come lo abbiamo supposto di sopra, e fino introdursi in questo Calcolo le differenze parziali che ne formano un nuovo

nuovo ramo: ma tali ricerche ci devierebbero dalla presente nostra intenzione di terminar questo Libro con alcune più semplici e più elementari applicazioni dell' esposta dottrina.

1009. PROBL. I. Tra tutte le curve riferite ad una stessa ascissa determinar quella in cui $\int zdx = \int (gx - y^2)ydx$ è un massimo o un minimo. Si avrà $zdx = (gx - y^2)ydx$, $z = (gx - y^2)y$ e $\beta z = (gx - 3y^2)\beta y$ (999) $= Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (1003); dunque $Q = gx - 3y^2$, $R = 0$, $S = 0$ ec.: ma dee esser $Q = 0$ (1005. 1°.); dunque $gx - 3y^2 = 0$ ovvero $y^2 = \frac{1}{3}gx$, equazione alla parabola. Sostituito il valor di $y = \sqrt{\frac{1}{3}gx}$ nella formula $\int (gx - y^2)ydx$, ella diviene $2\int (\frac{1}{3}gx)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15}gx^2\sqrt{\frac{1}{3}gx}$ che si annulla quando $x = 0$, ed è un massimo o un minimo quando $x = a$. Per distinguere qual dei due abbia quì luogo, prendo in vece della parabola un' altra linea qualunque (995), per esempio la linea retta coincidente con l' asse onde sia $y = 0$, e trovo che $y = 0$ riduce la data formula a zero mentre $y = \sqrt{\frac{1}{3}gx}$ la riduceva a $\frac{4}{15}gx^2\sqrt{\frac{1}{3}gx} > 0$; dunque si ha quì un massimo.

II. Trovar la curva in cui $\int zdx = \int (15g^2x^2 - 15g^3x + 5g^2y^2 - 3y^4)ydx$ è un massimo o un minimo. Dunque $\beta z = (g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4)\,15\beta y = Q\beta y$, e $Q = 0 = g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4 = (195)\,(y^2 - g^2 + gx)(gx - y^2)$, e perciò soddisfanno al quesito due parabole dell' equazioni I. $y^2 = g(g - x)$, II. $y^2 = gx$. Per sapere quale delle due dia il massimo, supporrò x infinitesima, il che riduce la I. ad $y = g$ (197), valore che posto nella formula data, la cangia in $\int 2g^5dx$ (197), mentre sostituendovi $y = \sqrt{gx}$ preso dalla II., si ha $\int -10g^3xdx\sqrt{gx}$ (197); ma, fatto, come sopra, $y = 0$, la formula va a zero e $\int 2g^5dx > 0$, laddove $\int -10g^3xdx \times \sqrt{gx} < 0$; dunque la I. dà un massimo, la II. un minimo.

III. Qual è la curva in cui $\int zdx = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo? Poichè $\frac{dy}{dx} = p$, verrà $\sqrt{(dx^2 +}$

$dy^2) = dx\sqrt{(1+p^2)}$, onde $z = \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$, $dz\,(= Pdx + Qdy + Rdp) = \frac{pdp}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{dy\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$ e $\beta z = \frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{\beta y\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}} = Q\beta y + R\beta p$; dunque $P = 0$, $Q = \frac{-\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$, $R = \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$; e poichè dee quì aversi $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ (1005.2°.), sarà $Qpdx\,(= Qdy) = pdR$: ma essendo $P = 0$, viene $dz = Qdy + Rdp = pdR + Rdp$; dunque integrando, $z\,(= \ldots\ldots \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}) = pR + C = \frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}} + C$, e $C = \frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$. Pertanto se si faccia costante $y(1+p^2) = m$, sarà $C = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $p\,(= \frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e $dy = dx\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, equazione ad una cicloide (873) il cui circolo genitore ha per diametro m. La riduco a $dx = dy\sqrt{\frac{y}{m-y}} = \frac{ydy}{\sqrt{(my-y^2)}} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{mdy}{2\sqrt{(my-y^2)}} - \frac{\left(\frac{m}{2}-y\right)dy}{\sqrt{(my-y^2)}},$$

ed integrandola per un circolo del raggio $\frac{m}{2}$, ottengo $x = arc.\ sen\,v.\ y$ (850) $- \sqrt{(my - y^2)} + C$ (857), con che abbiamo le due costanti arbitrarie m, C. Per determinarle faccio $R - \frac{dS}{dx} = 0$ (1000), ove $R\,(= \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}) = 0$ perchè quì $S = 0$, e viene $p = 0 = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$ e perciò $y = m$: quindi l'equazione integrata, ponendo $x = a$ ed $x = a$ (1006), diverrà $a = arc.\ sen\,v.\ m + C$: ma essendo m il diametro, $arc.\ sen\,v.\ m$ è evidentemente la semicirconferenza $m\pi$; dunque $C = a - m\pi$; di più se quando $x = 0$ si vuole anche $y = 0$, l'equazione integrata si cangierà in $0 = a - m\pi$ e sarà $m = \frac{a}{\pi}$. Del resto, si ha quì un minimo, poichè la data formula, sostituito il valor di $p = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$, diventa $\int dx\sqrt{\frac{m}{y}}$, da cui, facendo al solito $y = 0$, viene un infinitamente grande.

IV. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella in

cui l'area $\int ydx$ ([illegible]) è un massimo o un minimo. Giacchè l'espressione della lunghezza d'un arco è ([illegible]) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (III), e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\beta\int dx\sqrt{(1+p^2)} = 0$: ma anche $\beta\int ydx = 0$ ([illegible]); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui $\int zdx = \int ydx + \int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ è un massimo o un minimo, moltiplicata per g costante l'espressione dell'arco, onde sieno omogenee le due integrali. Si avrà pertanto $z = y + g\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z = \beta y + \frac{gp\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q = 1$, $R = \frac{gp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q - \frac{dR}{dx} = 0$; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà $z\,(= y + g\sqrt{(1+p^2)}) = pR + C = \frac{gp^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + C$, $(C-y)\sqrt{(1+p^2)} = g$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}{C-y}$, e $dx = \frac{dy\,(C-y)}{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}$; dunque integrando, $x = \sqrt{[g^2-(C-y)^2]} + C'$, cioè $(C-y)^2 = g^2-(x-C')^2$ equazione al circolo, in cui le costanti g, C, C' si determineranno come sopra (III) avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporsi data: ed è chiaro che il radicale portando il doppio segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all'ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

V. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (956). Trascurato 2π che è un numero costante, e fatta $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{(1+p^2)}$, dovrà essere, come nell'antecedente problema, $\int zdx = \int ydx\sqrt{(1+p^2)} + \int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ un massimo o un minimo; dunque $z = (y+g)\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z = \beta y\sqrt{(1+p^2)} + \frac{(y+g)p\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q = \sqrt{(1+p^2)}$, $R = \frac{(y+g)p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q - \frac{dR}{dx} = 0$, e fatto il solito raziocinio, $z\,(= (y+g)\sqrt{(1+p^2)}) = pR + C = \frac{(y+g)p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + C$, $C = \frac{y+g}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right) =$

$\frac{1}{C}\sqrt{[(y+g)^2 - C^2]}$, e $dx = \frac{Cdy}{\sqrt{[(y+g)^2 - C^2]}}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria* perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E quì pure atteso il doppio segno che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all' asse, ed un minimo quando gli volga la convessità.

1010. Porremo fine con dei Problemi.

I. Elevare un polinomio a qualunque potenza m, ovvero supposto $(f + gx + hx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{ec})^m = F + Gx + Hx^2 + Kx^3 + Lx^4 +$ ec., determinare i coefficienti F, G, H, K, L ec. *Ris.* $F = f^m$, $G = \frac{mgF}{f}$, $H = \frac{2mhF + (m-1)gG}{2f}$,

$K = \frac{3mkF + (2m-1)hG + (m-2)gH}{3f}$, ...

$L = \frac{4mlF + (3m-1)kG + (2m-2)hH + (m-3)gK}{4f}$ ec.,

ove la legge è manifestissima.

II. Data una Curva di nota tangente e presa in ogni sua ordinata una media proporzionale tra l' ordinata stessa e la corrispondente ascissa, condurre la tangente alla nuova Curva che passa per l' estremità delle medie proporzionali. *Ris.* Se x, y sieno le coordinate della curva data e z l' ordinata della nuova curva, la sua suttangente sarà

$\frac{2z^2dx}{xdy + ydx}$, che essendo la data curva una parabola o un circolo del raggio a, diviene $\frac{4x}{3}$ o $\frac{4ax - 2x^2}{3a - 2x}$.

III. Trovare il punto di flesso contrario nella curva dell' equazione $y = \frac{ax}{\sqrt{(rx - x^2)}}$. *Ris.* Il punto cercato corrisponde all' ordinata che ha per ascissa $x = \frac{1}{4}r$.

IV. Qual è la linea retta che con due date forma il triangolo massimo? *Ris.* L' ipotenusa; cioè il triangolo massimo è il rettangolo.

V. Qual è il massimo dei triangoli iscrittibili in un dato circolo e sopra una corda data? *Ris.* L' isoscele.

VI. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz che abbia il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = z = \sqrt{ab}$.

VII. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz, tre de' cui lati abbiano il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, $z = \sqrt{2ab}$.

VIII. Qual è il minimo dei quadrati iscrittibili in un dato quadrato? *Ris.* Se a sia il lato del dato, quello del minimo si troverà $\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$.

IX. Qual è il massimo in superficie convessa o in solidità di tutti i cilindri iscrittibili in una data sfera o in un dato cono? *Ris* Se $2r$ sia il diametro della sfera o della base del cono, quello della base del cilindro massimo in superficie sarà $r\sqrt{2}$, in solidità sarà $\frac{4}{3}r$.

X. Qual deve essere il rapporto tra il diametro della base e l' altezza d' una Misura cilindrica di data capacità affinchè la sua superficie interiore sia un minimo? *Ris.* Il rapporto dee essere di 2:1, come si trovò sopra (VI).

XI. Determinare il valor dei rotti 1°. $\frac{b(a-x)^2}{(a-x)^2}$ quando $x = a$; 2°. $\frac{1 - sen\,x + cos\,x}{sen\,x + cos\,x - 1}$ quando $x = 90°$; 3°. $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ quando $x = 1$. *Ris.* I valori cercati si troveranno b, 1, -2.

XII. Integrare $\frac{zdz}{z^3 - c^3}$. *Ris.* $\int \frac{zdz}{z^3 - c^3} = \frac{l(z-c)}{3c} - \ldots$ $\frac{l(c^2 + cz + z^2)}{6c} + \frac{1}{c\sqrt{3}} \times arc.tang \frac{2z + c}{c\sqrt{3}} + C$.

XIII. Integrare $yxdx$ posto $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$. *Ris.*

$\int yxdx = a\int ydx - \frac{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}{3}$.

XIV. Integrare $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$. *Ris.* $\int \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}} = \sqrt{(ax - x^2)} + arc.\, sen\, v.\, x$ in un circolo del raggio $\frac{1}{2}a$.

XV. integrar $\frac{d\phi}{(1 - b\cos\phi)^2}$ supposto $b < 1$. *Ris.* . . . .

$$\int \frac{d\phi}{(1 - b\cos\phi)^2} = \frac{b\, sen\, \phi}{(1 - b^2)(1 - b\cos\phi)} + \frac{2}{(1 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\, arc.\, tang\, \frac{(1 + b)\, sen\, \phi}{(1 + \cos\phi)\sqrt{(1 - b^2)}} + C.$$

XVI. Integrar le formule $x^n dx\, sen\, x$, $x^n dx \cos x$. *Ris.* 1°. $\int x^n dx\, sen\, x = -x^n \cos x + nx^{n-1}\, sen\, x + n(n-1)x^{n-2} \times \cos x - n(n-1)(n-2)x^{n-3}\, sen\, x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \times \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.; 2°. $\int x^n dx \cos x = x^n\, sen\, x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)x^{n-2}\, sen\, x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} \times \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.: preso alternativamente in ambedue i casi $sen\, x$ e $\cos x$ fino al termine ove si trova x^{n-n} col quale è compita l' integrazione.

XVII. Quadrar la curva dell' equazione $y^m = a + x$.

Ris. $\int ydx = \frac{m[(a+x)^{\frac{m+1}{m}} - a^{\frac{m+1}{m}}]}{m+1}$.

XVIII. Costruito un circolo sull' asse trasverso a d' un' ellisse il cui conjugato sia b, trovar 1°. la ragione delle loro aree o dei loro settori corrispondenti: 2°. l' area ellittica. *Ris.* 1°. la ragione è di $a:b$; 2°. l' area è $ab\pi$.

XIX. Supposta sull' asintoto d' un' iperbola una serie d' ascisse in progression geometrica, trovar la progressione dell' aree corrispondenti. *Ris.* La progressione è aritmetica.

XX. Trovar nell' iperbola due spazj asintotici in ragio-

ne di $p:q$. *Ris.* Supposta m^2 la potenza, e z, x due ascisse dal centro, si troverà $x = \sqrt[p]{z^{q}\, m^{p-q}}$.

XXI. Data un' iperbola della potenza 1, cerco l' angolo x degli asintoti tale che il modulo dei logaritmi tavolari 0,4342944819 sia $= \sin x$. *Ris.* Valendosi della serie data al n°. 893, si troverà $x = 25° 44' 25'' 27'''$ ec.

XXII. Quadrare e rettificar la curva trascendente dell' equazione $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}$. *Ris.* Lo spazio asintotico ed infinitamente lungo compreso dalla curva e dal suo asintoto eguaglia il quadrante d' un circolo del raggio a: un suo arco qualunque eguaglia la corrispondente ascissa d' una logaritmica che cominci dal vertice della curva ed abbia a per suttangente.

XXIII. Rettificar la curva dell' equazione $dy = \dots\dots \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$. *Ris.* $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(2ax + x^2)}$.

XXIV. Misurar l' intero solido prodotto dalla rivoluzion della cissoide intorno al diametro del suo circolo genitore. *Ris.* Il solido è infinito.

XXV. Misurar la superficie del solido generato dalla rivoluzione intorno all' asintoto dello spazio asintotico ed infinitamente lungo del Probl. XIX. *Ris.* La superficie eguaglia il circolo del raggio $a\sqrt{2}$.

XXVI. Misurar la solidità e la superficie convessa dell' unghia cilindrica formata dal taglio obliquo d' un cilindro retto, in modo che la sezione passi per il centro della base. *Ris.* Se sia r il raggio della base del cilindro, a l' altezza dell' unghia, se ne troverà la solidità $= \frac{2}{3} ar^2$, e la superficie $= 2ar$.

XXVII. Trovar la curva la cui tangente è costante ed $= a$. *Ris.* L' equazione della curva cercata sarà $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

XXVIII. Trovar la curva la cui suttangente è . . . . .

$\frac{x^4}{2x^3 + ay^2 + y^2 x}$. *Ris.* L' equazione è $y^2 = \frac{x^4}{2C - 2ax - x^2}$.

XXIX. Trovar la curva la cui sunnormale è . . . . . . $\frac{-y^4}{xy^2 + bx^3}$. *Ris.* L' equazione è $y^4 = C^4(b + \frac{2y^2}{x^2})$.

XXX. Trovar la curva la cui area è $\frac{x^3}{3y}$. *Ris.* La curva è una parabola

IL FINE.

TAVOLA
DEI NUMERI PRIMI

col più piccolo divisore dei numeri impari non primi fino a 100000

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
0	.	.	.	3	.	.	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
1	.	.	.	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	.
2	3	7	3	11	.	3	7	3	13	.	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
3	7	3	.	3	.	.	.	11	3	17	3	7	.	3	.	3	11	7	.	.
4	.	13	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	19	.	3	.	3	.
5	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	17	23	3	13	3	7	.	3	.	3
6	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	17	.	3	7	3	.	.	.	11
7	.	19	7	.	3	23	3	.	7	3	.	3	17	.	11	.	3	.	3	7
8	3	11	3	.	.	3	19	3	.	.	.	.	3	7	3	.	29	3	7	3
9	17	3	.	3	.	11	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	.	23	.	13
10	7	17	19	.	3	.	3	.	.	3	13	3	.	.	17	.	3	7	3	.
11	3	.	3	.	11	3	.	3	19	.	7	.	3	11	3	17	7	3	31	3
12	.	3	17	3	7	.	.	23	3	.	3	.	.	3	.	3	17	11	29	.
13	.	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	11	31	7	13	3	17	3	19
14	3	23	3	.	17	3	13	3	7	.	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3
15	19	3	11	3	.	17	37	7	3	.	3	1	.	3	29	3	23	.	7	.
16	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	23	.	11	3	31	3	17
17	3	13	3	.	29	3	17	3	.	.	11	7	3	.	3	37	.	3	.	3
18	.	3	13	3	.	7	23	17	3	.	3	31	.	3	11	3	7	19	.	43
19	.	11	.	23	3	.	3	19	17	3	41	3	.	.	13	7	3	29	3	.
20	3	.	3	7	.	3	.	3	43	7	.	.	3	19	3	.	13	3	23	3
21	11	3	7	3	.	.	29	13	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	19	7
22	31	.	.	47	3	.	3	7	.	3	17	3	23	7	.	.	3	.	3	13
23	3	7	3	.	.	3	7	3	11	23	13	17	3	.	3	.	.	3	.	3
24	7	3	29	3	.	19	.	41	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	31
25	41	.	23	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	17	43	.	3	.	3	.
26	3	19	3	.	7	3	.	3	.	43	37	11	3	.	3	7	19	3	.	3
27	37	3	.	3	.	.	11	.	3	7	.	.	.	3	7	3	.	13	41	.
28	.	.	7	53	3	29	3	.	7	3	11	3	19	.	.	17	3	.	3	7
29	3	.	3	.	41	3	.	3	23	37	.	29	3	7	3	.	17	3	7	3
30	.	3	31	3	.	23	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	17	11	.
31	7	29	13	.	3	11	3	.	.	3	53	3	31	13	.	43	3	7	3	47
32	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	7	.	3	53	3	41	7	3	17	3
33	.	3	.	3	7	.	31	.	3	.	3	.	.	3	47	3	13	.	.	17
34	19	41	.	7	3	.	3	13	11	3	23	3	47	.	7	19	3	11	3	.
35	3	31	3	11		3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
36	13	3	.	3	23	.	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	41
37	.	7	11	.	3	47	3	.	61	3	.	3	7	.	37	.	3	19	3	23
38	3	.	3	13	37	3	11	3	.	.	43	7	3	.	3	11	23	3	.	3
39	47	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	7	.	.	11
40	.	.	.	19	3	.	3	.	.	3	.	3	29	37	11	7	3	13	3	.
41	3	11	3	7	.	3	23	3	13	7	.	.	3	.	3	.	41	3	11	3
42	.	3	7	3	.	11	.	.	3	41	3	.	.	3	19	3	.	.	31	7
43	11	13	59	31	3	19	3	7	29	3	.	3	61	7	.	.	3	43	3	.
44	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	19	43	3	11	3	23	.	3	.	3
45	7	3	.	3	13	.	.	.	3	.	3	7	23	3	13	3	19	7	.	.
46	43	.	17	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	41	.	.	3	.	3	.
47	3	.	3	17	7	3	53	3	.	.	29	.	3	.	3	7	11	3	47	3
48	.	3	11	3	17	.	.	61	3	7	3	11	.	3	7	3	47	29	37	13
49	13	.	7	.	3	17	3	.	7	3	13	3	.	.	.	11	3	.	3	7
50	3	.	3	.	.	3	29	3	.	.	11	47	3	7	3	.	71	3	7	3
51	.	3	.	3	19	.	7	.	3	47	3	23	7	3	11	3	53	37	.	19
52	7	11	41	.	3	13	3	17	23	3	.	3	.	.	.	13	3	7	3	29
53	3	.	3	.	47	3	13	3	17	.	7	73	3	.	3	19	7	3	.	3
54	11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	61	.	3	.	3	.	.	13	.
55	.	.	.	7	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	7	29	3	23	3	31
56	3	13	3	71	31	3	41	3	7	.	17	13	3	43	3	.	.	3	.	3
57	.	3	13	3	.	29	.	7	3	59	3	17	11	3	.	3	.	.	7	.
58	.	7	.	37	3	.	3	11	.	3	.	3	7	19	13	.	3	.	3	.
59	3	.	3	19	23	3	61	3	31	.	.	7	3	17	3	.	13	3	19	3
60	17	3	.	3	.	7	11	13	3	19	3	.	37	3	.	3	7	.	.	23
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
0	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
1	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.
2	.	11	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	17	3	.	3	13
3	3	.	3	.	19	3	.	3	7	.	13	.	3	.	3	.	17	3	.	3
4	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	.	13	3	.	3	.	17	7	.
5	19	7	.	13	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	19	3	.	3	.
6	3	.	3	.	.	3	23	3	11	.	.	7	3	.	3	13	.	3	17	3
7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	19	11	3	.	3	7	13	.	17
8	23	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	29
9	3	.	3	7	31	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	23	.	3	.	3
10	.	3	7	3	.	.	11	.	3	29	3	13	23	3	.	3	.	.	.	7
11	.	.	13	19	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	29	3	.	3	11
12	3	7	3	.	13	3	7	3	31	19	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
13	7	3	23	3	.	29	.	37	3	.	3	7	.	3	19	3	13	7	11	.
14	.	.	31	.	3	7	3	13	.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	.
15	3	.	3	.	7	3	.	3	.	11	19	.	3	.	3	7	37	3	.	3
16	13	3	.	3	11	.	.	.	3	7	3	23	41	3	7	3	19	.	.	.
17	17	.	7	.	3	41	3	29	7	3	.	3	13	.	.	.	3	11	3	7
18	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.	31	3	7	3
19	.	3	19	3	37	13	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	.	.	.
20	7	.	11	29	3	.	3	.	19	3	31	3	.	.	.	.	3	7	3	.
21	3	.	3	17	.	3	11	3	13	41	7	.	3	37	3	11	7	3	13	3
22	.	3	37	3	7	31	.	.	3	.	3	43	.	3	.	3	29	.	.	11
23	.	13	.	7	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.
24	3	11	3	.	23	3	.	3	7	.	.	37	3	13	3	19	47	3	11	3
25	.	3	.	3	13	11	17	7	3	31	3	.	29	3	13	3	.	.	7	23
26	11	7	.	.	3	.	3	17	.	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.
27	3	.	3	31	11	3	.	3	17	47	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3
28	.	3	.	3	.	7	47	19	3	13	3	.	43	3	.	3	7	11	.	13
29	13	.	.	11	3	.	3	.	.	3	13	3	11	19	29	7	3	41	3	.
30	3	43	3	7	.	3	.	3	37	7	17	.	3	.	3	.	11	3	19	3
31	23	3	7	3	29	.	.	.	3	19	3	11	.	3	.	3	.	31	23	7
32	.	.	.	.	3	13	3	7	.	3	29	3	17	7	19	11	3	37	3	.
33	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	11	31	3	17	3	.	.	3	43	3
34	7	3	.	3	.	.	.	.	3	23	3	7	59	3	11	3	.	7	13	.
35	53	11	.	.	3	7	3	43	.	3	7	3	.	.	17	37	3	.	3	59
36	3	13	3	.	7	3	19	3	.	.	.	13	3	29	3	7	.	3	.	3
37	11	3	13	3	.	53	.	.	3	7	3	.	19	3	7	3	17	.	.	29
38	.	.	7	17	3	.	3	53	7	3	.	3	.	11	13	.	3	17	3	7
39	3	59	3	37	17	3	.	3	11	29	41	23	3	7	3	.	13	3	7	3
40	.	3	.	3	31	17	7	13	3	.	3	.	7	3	61	3	.	.	17	.
41	7	.	.	.	3	23	3	11	43	3	.	3	37	47	53	59	3	7	3	13
42	3	.	3	.	.	3	17	3	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
43	19	3	.	3	7	.	11	17	3	.	3	29	13	3	41	3	.	23	.	53
44	.	61	.	7	3	.	3	41	17	3	11	3	.	.	7	67	3	.	3	11
45	3	29	3	47	.	3	.	3	7	17	23	19	3	.	3	13	.	3	.	3
46	.	3	.	3	59	.	13	7	3	.	3	.	31	3	43	3	.	13	7	37
47	.	7	67	.	3	11	3	19	13	3	17	3	7	.	.	.	3	.	3	.
48	3	23	3	43	.	3	31	3	.	11	.	7	3	19	3	.	67	3	59	3
49	.	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	13	17	3	.	3	7	.	19	.
50	.	31	13	.	3	61	3	37	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.
51	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	31	.	3	71	3	.	29	3	.	3
52	59	3	7	3	.	19	23	11	3	.	3	.	.	3	17	3	11	67	.	7
53	.	53	11	23	3	31	3	7	41	3	19	3	.	7	.	17	3	.	3	.
54	3	7	3	53	43	3	7	3	.	13	.	.	3	.	3	11	17	3	23	3
55	7	3	.	3	67	.	19	.	3	.	3	7	.	3	37	3	.	7	29	11
56	.	.	.	.	3	7	3	.	53	3	7	3	13	.	11	.	3	.	3	41
57	3	11	3	13	7	3	73	3	29	23	53	.	3	.	3	7	.	3	11	3
58	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	43	71	.	17
59	11	.	7	59	3	67	3	47	7	3	43	3	.	31	.	53	3	13	3	7
60	3	.	3	73	11	3	.	3	13	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
61	.	17	31	41	3	.	3	29	.	3	11	3	.	.	17	7	3	.	3	11
62	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	23	3	17	79	3	.	3
63	.	3	7	3	.	59	.	71	3	.	3	.	13	3	.	3	17	.	11	7
64	37	19	43	13	3	11	3	7	.	3	.	3	59	7	41	47	3	17	3	.
65	3	7	.	23	17	3	7	3	.	11	61	.	3	47	3	13	31	3	.	3
66	7	3	.	3	11	17	13	.	3	37	3	7	19	3	.	3	29	7	17	61
67	.	.	19	.	3	7	3	.	11	3	7	3	53	.	.	23	3	11	3	17
68	3	.	3	11	7	3	17	3	19	.	.	.	3	.	3	7	.	3	41	3
69	67	3	.	3	.	31	.	11	3	7	3	13	29	3	7	3	11	53	.	.
70	.	47	7	43	3	.	3	.	7	3	.	3	79	13	31	.	3	.	3	7
71	3	.	3	.	13	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	37	3	7	3
72	19	3	.	3	.	.	7	.	3	31	3	.	7	3	.	3	13	.	.	11
73	7	67	.	.	3	71	3	13	.	3	17	3	.	.	11	41	3	7	3	.
74	3	11	3	31	.	3	.	3	41	13	7	17	3	.	3	43	7	3	11	3
75	13	3	.	3	7	11	.	73	3	.	3	.	17	3	.	3	.	19	.	.
76	11	.	.	7	3	23	3	19	.	3	29	3	13	17	7	.	3	.	3	.
77	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	.	59	3	11	3	71	.	3	61	3
78	29	3	37	3	73	13	.	7	3	.	3	.	41	3	17	3	.	11	7	47
79	.	7	.	11	3	41	3	.	89	3	.	3	7	.	.	17	3	13	3	.
80	3	53	3	.	.	3	.	3	13	71	23	7	3	29	3	.	11	3	13	3
81	.	3	11	3	.	7	.	23	3	.	3	11	47	3	79	3	7	17	.	29
82	59	13	29	.	3	43	3	.	.	3	19	3	.	.	.	7	3	.	3	73
83	3	19	3	7	.	3	.	3	53	7	11	.	3	13	3	31	19	3	17	3
84	31	3	7	3	13	47	19	.	3	.	3	.	.	3	11	3	23	.	.	7
85	.	11	47	67	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	83
86	3	7	3	.	79	3	7	3	37	.	.	.	3	89	3	53	.	3	.	3
87	7	3	.	3	31	.	23	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13
88	13	.	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.	3	37	3	.
89	3	29	3	59	7	3	37	3	11	.	79	.	3	.	3	7	.	3	23	3
90	.	3	.	3	.	.	71	29	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	83	.
91	19	.	7	.	3	13	3	11	7	3	.	3	23	.	.	13	3	41	3	7
92	3	.	3	.	61	3	13	3	.	23	.	11	3	7	3	.	.	3	7	3
93	71	3	41	3	.	67	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	.	13	.
94	7	.	23	97	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.	3	7	3	11
95	3	13	3	37	.	3	31	3	.	89	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3
96	.	3	13	3	7	.	59	.	3	.	3	.	.	3	23	3	31	.	11	.
97	89	31	17	7	3	11	3	.	.	3	71	3	37	.	7	.	3	.	3	.
98	3	.	3	17	.	3	.	3	7	11	31	.	3	.	3	.	13	3	43	3
99	.	3	.	3	11	23	47	7	3	.	3	.	.	3	19	3	.	61	7	.
100	73	7	.	.	3	17	3	43	11	3	37	3	7	79	.	.	3	11	3	13
101	3	.	3	11	.	3	67	3	29	53	13	7	3	.	3	.	.	3	73	3
02	101	3	59	3	.	7	17	11	3	.	3	53	13	3	29	3	7	.	.	37
03	.	.	11	13	3	.	3	17	.	3	23	3	.	.	.	7	3	.	3	79
04	3	101	3	7	29	3	11	3	17	7	.	.	3	.	3	11	53	3	31	3
05	.	3	7	3	23	.	13	67	3	17	3	.	.	3	41	3	83	13	53	7
106	.	23	.	103	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	11	.	3	29	3	23
07	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	17	.	3	.	3	.	23	3	11	3
08	7	3	101	3	19	11	29	31	3	79	3	7	.	3	.	3	37	7	.	19
09	11	.	13	.	3	7	3	61	67	3	7	3	17	13	.	.	3	31	3	.
10	3	.	3	101	7	3	23	3	103	73	.	41	3	11	3	7	61	3	.	3
111	17	3	29	3	41	.	.	.	3	7	3	31	.	3	7	3	13	11	71	.
12	23	17	7	11	3	.	3	13	7	3	103	3	11	47	17	.	3	.	3	7
13	3	89	3	43	.	3	.	3	.	13	47	.	3	7	3	17	11	3	7	3
14	13	3	11	3	.	101	7	19	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	.	107
15	7	.	37	17	3	29	3	.	41	3	.	3	13	19	83	11	3	7	3	.
116	3	41	3	13	17	3	.	3	.	59	7	29	3	.	3	103	7	3	19	3
17	.	3	23	3	7	13	.	.	3	19	3	37	.	3	11	3	59	.	17	31
18	.	11	.	7	3	.	3	53	.	3	.	3	.	.	7	.	3	13	3	17
19	3	.	3	.	43	3	17	3	7	.	.	79	3	.	3	.	.	3	13	3
20	11	3	.	3	.	41	61	7	3	11	3	23	53	3	.	3	.	.	7	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
61	.	3	47	3	61	.	7	31	3	.	3	37	7	3	23	3	41	11	.	.
62	7	13	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	61	.	19	3	7	3	.
63	3	.	3	.	.	3	.	3	23	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3
64	.	3	11	3	7	23	29	.	3	.	3	11	.	3	13	3	.	43	73	67
65	.	.	79	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	29	7	11	3	19	3	.
66	3	.	3	.	.	3	59	3	7	.	11	.	3	41	3	.	.	3	37	3
67	43	3	29	3	.	.	67	7	3	13	3	.	.	3	11	3	.	.	7	13
68	13	7	.	19	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	71	83	3	61	3	.
69	3	17	3	.	.	3	.	3	.	19	.	7	3	.	3	29	.	3	.	3
70	11	3	.	3	23	7	37	.	3	11	3	.	73	3	19	3	7	41	47	31
71	.	23	17	.	3	13	3	67	71	3	.	3	43	11	.	7	3	.	3	23
72	3	.	3	7	53	3	13	3	11	7	19	29	3	.	3	37	23	3	.	3
73	.	3	7	3	17	37	53	.	3	73	3	47	11	3	83	3	19	.	13	7
74	.	29	.	.	3	17	3	7	31	3	.	3	.	7	.	.	3	59	3	.
75	3	7	3	.	.	3	7	3	67	.	.	11	3	.	3	.	.	3	71	3
76	7	3	13	3	47	79	11	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	43	.
77	23	.	.	.	3	7	3	17	19	3	7	3	31	43	13	.	3	.	3	11
78	3	.	3	29	7	3	.	3	17	.	.	.	3	.	3	7	13	3	53	3
79	.	3	73	3	19	.	31	13	3	7	3	79	23	3	7	3	61	.	11	19
80	83	.	7	.	3	11	3	.	7	3	41	3	.	59	.	.	3	.	3	7
81	3	31	3	41	.	3	.	3	.	11	13	.	3	7	3	19	.	3	7	3
82	37	3	23	3	11	.	7	.	3	.	3	17	7	3	.	3	.	.	.	43
83	7	.	61	13	3	.	3	.	11	3	.	3	17	83	.	.	3	7	3	37
84	3	79	3	11	.	3	.	3	43	37	7	61	3	17	3	13	7	3	29	3
85	17	3	43	3	7	.	13	11	3	.	3	23	.	3	31	3	11	13	.	.
86	41	17	11	7	3	.	3	.	13	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	11	3	7	31	67	.	3	.	3	11	59	3	19	3
88	53	3	17	3	.	.	.	7	3	19	3	13	83	3	.	3	17	.	7	11
89	.	7	13	17	3	.	3	.	.	3	47	3	7	13	11	89	3	17	3	.
90	3	11	3	.	13	3	.	3	47	43	29	7	3	31	3	61	.	3	11	3
91	.	3	.	3	.	7	89	53	3	.	3	67	.	3	.	3	7	29	17	.
92	11	19	.	47	3	59	3	13	73	3	.	3	.	.	37	7	3	.	3	17
93	3	47	3	7	11	3	17	3	.	7	.	83	3	11	3	41	.	3	.	3
94	13	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	.	19	3	53	3	.	11	.	7
95	.	41	19	11	3	73	3	7	17	3	61	3	11	7	.	43	3	53	3	29
96	3	7	3	13	.	3	7	3	19	17	.	.	3	23	3	.	11	3	.	3
97	7	3	11	3	43	13	.	.	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	97	41
98	.	59	.	.	3	7	3	71	.	3	7	3	41	.	.	11	3	13	3	19
99	3	37	3	23	7	3	.	3	13	.	11	17	3	67	3	7	97	3	13	3
100	19	3	89	3	.	29	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	23	.
101	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	.	17	61	23	3	.	3	7
02	3	.	3	.	31	3	.	3	.	.	43	19	3	7	3	.	41	3	7	3
03	11	3	.	3	13	43	7	.	3	11	3	97	7	3	13	3	.	19	37	.
04	7	.	.	.	3	.	3	19	37	3	.	3	47	11	.	17	3	7	3	.
05	3	61	3	.	59	3	.	3	11	97	7	71	3	19	3	.	7	3	.	3
106	.	3	.	3	7	.	.	47	3	13	3	59	11	3	.	3	.	17	19	13
07	13	.	31	7	3	47	3	11	.	3	13	3	.	41	7	.	3	43	3	.
08	3	.	3	.	.	3	.	3	7	83	73	11	3	.	3	.	.	3	17	3
09	47	3	.	3	97	19	11	7	3	.	3	.	79	3	.	3	29	.	7	17
10	43	7	.	.	3	13	3	.	.	3	11	3	7	.	.	13	3	.	3	11
111	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	.	7	3	53	3	67	19	3	.	3
12	.	3	.	3	.	7	19	59	3	.	3	.	29	3	.	3	7	23	11	.
13	.	.	41	37	3	11	3	.	83	3	31	3	19	.	59	7	3	.	3	.
14	3	13	3	7	73	3	.	3	.	7	23	13	3	.	3	.	.	3	.	3
15	.	3	7	3	11	31	43	23	3	71	3	.	37	3	.	3	67	.	.	7
116	61	43	.	89	3	107	3	7	11	3	.	3	.	7	13	.	3	11	3	.
17	3	7	3	11	19	3	7	3	79	61	.	.	3	.	3	.	13	3	47	3
18	7	3	71	3	29	.	.	11	3	31	3	7	109	3	.	3	11	7	.	73
19	17	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	.	19	3	67	3	13
20	3	17	3	31	7	3	11	3	.	.	13	47	3	43	3	7	107	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
121	.	7	.	.	3	.	3	.	17	3	67	3	7	11	53	61	3	.	3	.
22	3	.	3	29	.	3	19	3	11	17	.	7	3	13	3	.	.	3	37	3
23	.	3	31	3	13	7	109	97	3	.	3	.	11	3	13	3	7	.	.	53
24	.	79	19	.	3	.	3	11	.	3	17	3	31	.	.	7	3	23	3	59
25	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	11	3	83	3	.	.	3	.	3
126	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	73	17	3	.	3	.	47	.	7
27	13	.	97	71	3	.	3	7	.	3	11	3	29	7	47	.	3	.	3	11
28	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	101	.	3	41	3	37	.	3	29	3
29	7	3	.	3	.	37	.	.	3	.	3	7	67	3	17	3	.	7	11	23
30	.	.	.	.	3	7	3	47	29	3	7	3	83	.	.	13	3	.	3	.
131	3	.	3	.	7	3	13	3	.	11	.	19	3	23	3	7	17	3	.	3
32	43	3	47	3	11	73	.	.	3	7	3	.	101	3	7	3	.	17	13	.
33	47	53	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	67	.	.	3	11	3	7
34	3	13	3	11	.	3	.	3	.	3	29	13	3	7	3	89	.	3	7	3
35	23	3	13	3	59	.	7	11	3	.	3	83	7	3	.	3	11	29	19	17
136	7	61	11	31	3	.	3	.	53	3	.	3	43	.	13	23	3	7	3	.
37	3	71	3	.	.	3	11	3	.		7	.	3	31	3	11	7	3	59	3
38	37	3	.	3	7	19	41	13	3	2	3	.	.	3	101	3	.	109	61	11
39	.	.	.	7	3	.	3	31	.	3	19	3	.	.	7	53	3	73	3	13
40	3	11	3	.	.	3	107	3	7	37	13	.	3	.	3	101	19	3	11	3
141	59	3	.	3	103	11	19	7	3	29	3	71	13	3	67	3	79	.	7	.
42	11	7	.	13	3	61	3	59	.	3	41	3	7	43	23	29	3	.	3	.
43	3	.	3	41	11	3	103	3	.	.	.	7	3	11	3	13	.	3	.	3
44	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	47	.	3	.	3	7	11	.	.
45	17	.	89	11	3	23	3	.	13	3	73	3	11	.	.	7	3	.	3	.
146	3	17	3	7	19	3	47	3	.	7	.	.	3	.	3	.	11	3	97	3
47	61	3	7	3	47	.	.	41	3	.	3	11	.	3	.	3	.	23	.	7
48	19	113	13	59	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	37	11	3	.	3	31
49	3	7	3	17	13	3	7	3	43	.	11	.	3	109	3	.	67	3	.	3
50	7	3	43	3	17	.	.	23	3	83	3	7	.	3	11	3	13	7	41	101
151	.	11	.	29	3	7	3	13	.	3	7	3	.	37	.	.	3	19	3	.
52	3	23	3	67	7	3	.	3	31	13	.	97	3	.	3	7	.	3	79	3
53	11	3	.	3	61	.	17	.	3	7	3	.	.	3	7	3	23	67	103	.
54	.	73	7	19	3	.	3	17	7	3	.	3	13	11	43	.	3	.	3	7
55	3	37	3	13	.	3	59	3	1	19	.	53	3	7	3	41	.	3	7	3
156	.	3	.	3	67	13	7	.	3	17	3	.	7	3	19	3	.	.	.	.
57	7	41	11	23	3	19	3	11	79	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.
58	3	.	3	.	97	3	.	3	13	.	7	11	3	71	3	47	7	3	13	3
59	.	3	.	3	7	.	11	.	3	.	3	17	89	3	.	3	19	107	37	41
60	.	13	.	7	3	67	3	83	37	3	11	3	17	.	7	43	3	61	3	11
161	3	.	3	89	.	3	71	3	7	23	.	127	3	13	3	.	.	3	67	3
62	17	3	19	3	13	31	.	7	3	.	3	.	.	3	13	3	109	37	7	.
63	.	7	23	47	3	11	3	.	19	3	29	3	7	.	17	.	3	59	3	.
64	3	47	3	61	.	3	.	3	.	11	.	7	3	.	3	17	41	3	.	3
65	29	3	17	3	11	7	83	.	3	13	3	.	61	3	23	3	7	71	.	13
166	13	.	.	1.	3	37	3	.	11	3	13	3	.	.	127	7	3	11	3	.
67	3	.	3	7	17	3	73	3	23	7	43	.	3	29	3	19	.	3	.	3
68	53	3	7	3	.	17	67	11	3	.	3	.	.	3	113	3	11	.	17	7
69	.	.	11	37	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	17
70	3	7	3	73	.	3	7	3	.	29	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3
171	7	3	.	3	71	109	.	17	3	.	3	7	37	3	.	3	61	7	13	11
72	103	.	.	.	3	7	3	67	17	3	7	3	.	19	11	.	3	43	3	47
73	3	11	3	19	7	3	.	3	.	17	.	13	3	.	3	7	.	3	11	3
74	.	3	13	3	23	11	.	.	3	7	3	29	.	3	7	3	107	.	73	.
75	11	23	7	.	3	83	3	.	7	3	17	3	47	89	13	.	3	53	3	7
176	3	29	3	.	11	3	79	3	67	.	.	17	3	7	3	31	13	3	7	3
77	31	3	.	3	89	.	7	13	3	37	3	.	7	3	.	3	113	11	.	.
78	7	19	.	11	3	47	3	103	71	3	.	3	11	17	.	.	3	7	3	13
79	3	.	3	.	.	3	19	3	.	.	7	.	3	79	3	.	7	3	131	3
80	47	3	11	3	7	.	43	37	3	67	3	11	13	3	17	3	.	.	.	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
121	29	3	.	3	.	.	23	43	3	7	3	19	13	3	7	3	73	89	.	11
22	.	.	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3	.	71	11	.	3	19	3	7
23	3	11	3	17	47	3	83	3	89	.	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3
24	.	3	.	3	17	11	7	37	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	.	29
25	7	.	29	19	3	17	3	.	13	3	.	3	23	.	41	.	3	7	3	43
126	3	.	3	.	11	3	53	3	.	19	7	31	3	11	3	.	7	3	.	3
27	41	3	.	3	7	.	17	113	3	53	3	13	.	3	19	3	.	11	67	.
28	71	.	13	7	3	19	3	17	61	3	79	3	11	13	7	.	3	.	3	.
29	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	19	.	3	.	3	31	11	3	41	3
30	31	3	11	3	37	.	73	7	3	17	3	11	103	3	23	3	13	.	7	.
131	.	7	59	.	3	.	3	13	.	3	.	3	7	.	.	11	3	79	3	67
32	3	29	3	.	89	3	.	3	23	13	11	7	3	37	3	97	.	3	.	3
33	13	3	19	3	31	7	.	29	3	43	3	17	.	3	11	3	7	59	.	.
34	.	11	.	43	3	.	3	.	19	3	.	3	13	97	.	7	3	103	3	.
35	3	.	3	7	71	3	.	3	41	7	.	37	3	17	3	107	.	3	.	3
136	11	3	7	3	19	13	79	.	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
37	.	17	.	.	3	.	3	7	47	3	23	3	.	7	17	.	3	13	3	.
38	3	7	3	.	83	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	17	29	3	13	3
39	7	3	17	3	23	.	.	61	3	89	3	7	11	3	71	3	17	7	.	.
40	.	13	.	17	3	7	3	11	.	3	7	3	.	.	.	73	3	17	3	23
141	3	.	3	.	7	3	31	3	37	.	.	11	3	13	3	7	23	3	.	3
42	.	3	53	3	13	17	11	19	3	7	3	109	.	3	7	3	31	.	17	79
43	113	31	7	83	3	53	3	.	7	3	11	3	73	19	.	.	3	37	3	7
44	3	97	3	19	.	3	17	3	29	41	31	.	3	7	3	.	43	3	7	3
45	.	3	.	3	.	.	7	17	3	13	3	61	7	3	29	3	.	.	11	13
146	7	.	.	107	3	11	3	.	17	3	13	3	53	.	19	37	3	7	3	.
47	3	.	3	.	29	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3
48	.	3	83	3	7	89	.	.	3	107	3	.	23	3	.	3	.	53	.	47
49	.	19	.	7	3	13	3	.	11	3	17	3	71	.	7	13	3	11	3	53
50	3	.	3	11	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	79	.	3	31	3
151	109	3	23	3	.	59	29	7	3	.	3	43	17	3	.	3	11	.	7	.
52	101	7	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	.	3	41	3	.
53	3	13	3	.	.	3	11	3	19	.	.	7	3	.	3	11	.	3	89	3
54	.	3	13	3	.	7	.	31	3	.	3	23	113	3	17	3	7	.	.	11
55	.	103	47	.	3	79	3	.	23	3	37	3	.	.	11	7	3	31	3	19
156	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	61	.	3	.	3	29	13	3	11	3
57	19	3	7	3	.	11	.	13	3	.	3	31	43	3	.	3	.	17	.	7
58	11	83	101	.	3	29	3	7	59	3	.	3	.	7	.	.	3	23	3	13
59	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	13	19	3	11	3	59	.	3	17	3
60	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	.	17
161	31	29	107	11	3	7	3	19	103	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	97
62	3	.	3	71	7	3	.	3	53	.	41	73	3	19	3	7	11	3	43	3
63	83	3	11	3	.	.	13	.	3	7	3	11	.	3	7	3	37	13	19	23
64	.	.	7	109	3	101	3	43	7	3	.	3	.	53	.	11	3	.	3	7
65	3	.	3	29	.	3	.	3	73	.	11	59	3	7	3	53	47	3	7	3
166	.	3	.	3	.	19	7	79	3	.	3	13	7	3	11	3	.	.	59	.
67	7	11	13	.	3	.	3	41	31	3	19	3	97	13	.	103	3	7	3	107
68	3	19	3	23	13	3	101	3	.	47	7	.	3	.	3	.	7	3	61	3
69	11	3	31	3	7	.	19	71	3	11	3	.	.	3	.	3	13	.	23	89
70	17	.	37	7	3	113	3	13	43	3	.	3	19	11	7	23	3	.	3	.
171	3	17	3	.	131	3	.	3	7	13	89	41	3	.	3	.	.	3	29	3
72	13	3	.	3	41	61	31	7	3	23	3	37	11	3	59	3	.	.	7	.
73	.	7	17	.	3	97	3	11	29	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	127
74	3	31	3	13	19	3	.	3	.	101	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3
75	.	3	97	3	17	7	11	.	3	.	3	.	.	3	43	3	7	73	.	.
176	19	127	.	.	3	17	3	.	41	3	11	3	.	.	23	7	3	13	3	11
77	3	41	3	7	.	3	109	3	13	7	29	23	3	.	3	.	.	3	13	3
78	.	3	7	3	53	.	17	107	3	61	3	19	.	3	31	3	.	29	11	7
79	29	13	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	19	3	41
80	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	101	3	13	3	.	79	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
181	23	43	19	7	3	59	3	·	·	3	·	3	·	·	7	11	3	·	3	·
82	3	109	3	131	·	3	·	3	7	·	11	·	3	·	3	13	17	3	71	3
83	·	3	·	3	·	·	13	7	3	73	3	·	23	3	11	3	·	13	7	59
84	·	7	79	41	3	·	3	113	13	3	·	3	7	·	103	·	3	·	3	19
85	3	·	3	83	107	3	·	3	·	·	97	7	3	43	3	·	·	3	17	3
186	11	3	23	3	37	7	·	43	3	11	3	13	31	3	·	3	7	103	29	17
87	·	59	13	53	3	·	3	·	97	3	61	3	·	11	41	7	3	·	3	·
88	3	·	3	7	13	3	31	3	11	7	67	19	3	37	3	·	83	3	47	3
89	41	3	7	3	·	·	·	·	3	127	3	23	11	3	29	3	13	19	·	7
90	·	31	83	·	3	·	3	7	23	3	53	3	·	7	·	79	3	137	3	43
191	3	7	3	97	29	3	7	3	·	13	31	11	3	19	3	·	·	3	41	3
92	7	3	·	3	·	·	11	·	3	47	3	7	·	3	·	3	71	7	19	·
93	·	97	43	·	3	7	3	·	139	3	7	3	13	·	61	83	3	23	3	11
94	3	·	3	13	7	3	·	3	·	·	·	·	3	·	3	7	·	3	·	3
95	·	3	·	3	109	13	29	131	3	7	3	59	·	3	7	3	·	·	11	113
196	17	·	7	·	3	11	3	23	7	3	19	3	67	29	73	41	3	13	3	7
97	3	17	3	·	23	3	·	3	13	11	·	109	3	7	3	·	19	3	7	3
98	·	3	29	3	11	·	7	·	3	43	3	79	7	3	83	3	·	·	89	23
99	7	13	17	43	3	·	3	·	11	3	·	3	19	31	·	127	3	7	3	·
200	3	83	3	11	·	3	37	3	·	·	7	·	3	13	3	29	7	3	·	3
201	·	3	·	3	7	·	·	11	3	·	3	·	41	3	13	3	11	·	·	·
02	·	89	11	7	3	17	3	·	73	3	113	3	·	·	7	37	3	31	3	·
03	3	79	3	23	19	3	11	3	7	·	·	29	3	·	3	11	·	3	·	3
04	23	3	·	3	·	137	17	7	3	13	3	31	·	3	107	3	·	·	7	11
05	13	7	·	·	3	73	3	17	·	3	13	3	7	·	11	19	3	·	3	·
206	3	11	3	37	·	3	53	3	17	41	·	7	3	47	3	·	·	3	11	3
07	127	3	·	3	139	7	·	·	3	17	3	19	·	3	89	3	7	·	·	·
08	11	71	·	·	3	13	3	109	47	3	59	3	37	83	67	7	3	19	3	·
09	3	·	3	7	11	3	13	3	·	7	17	·	3	11	3	·	43	3	·	3
10	·	3	7	3	·	·	·	·	3	·	3	17	·	3	109	3	53	11	13	7
211	·	47	·	11	3	43	3	7	·	3	37	3	11	7	23	·	3	·	3	·
12	3	7	3	127	·	3	7	3	·	19	·	13	3	17	3	67	11	3	·	3
13	7	3	11	3	101	·	·	·	3	·	3	7	83	3	19	3	·	7	·	37
14	·	17	·	79	3	7	3	·	31	3	7	3	29	·	13	11	3	41	3	89
15	3	·	3	137	7	3	·	3	·	·	11	·	3	61	3	7	13	3	29	3
216	·	3	17	3	·	·	·	13	3	7	3	43	97	3	7	3	17	23	·	·
17	·	11	7	17	3	·	3	37	7	3	·	3	31	103	·	·	3	17	3	7
18	3	·	3	113	17	3	·	3	·	139	13	83	3	7	3	·	·	3	7	3
19	11	3	19	3	·	17	7	23	3	11	3	·	7	3		3	37	·	17	47
20	7	·	59	13	3	·	3	97	19	3	·	3	·	11	·	·	3	7	3	17
221	3	23	3	·	·	3	17	3	11	·	7	·	3	·	3	13	7	3	·	3
22	149	3	53	3	7	97	13	17	3	71	3	·	11	3	37	3	23	13	·	19
23	29	·	·	7	3	53	3	11	13	3	83	3	137	23	7	89	3	·	3	·
24	3	43	3	·	73	3	29	3	7	17	41	11	3	·	3	19	·	3	·	3
25	·	3	71	3	·	47	11	7	3	101	3	13	·	3	31	3	·	·	7	·
226	97	7	13	23	3	·	3	·	·	3	11	3	7	13	·	·	3	·	3	11
27	3	73	3	·	13	3	·	3	·	31	·	7	3	127	3	·	·	3	23	3
28	151	3	·	3	·	7	·	19	3	29	3	37	17	3	41	3	7	53	11	73
29	·	37	·	31	3	11	3	13	·	3	101	3	23	17	·	7	3	·	3	53
30	3	·	3	7	·	3	·	3	·	7	·	·	3	31	3	·	·	3	19	3
231	13	3	7	3	11	29	·	61	3	19	3	101	·	3	17	3	73	·	79	7
32	·	·	23	·	3	139	3	7	11	3	·	3	13	7	19	17	3	11	3	67
33	3	7	3	11	·	3	7	3	·	83	·	41	3	·	3	·	17	3	37	3
34	7	3	89	3	41	13	·	11	3	59	3	7	·	3	23	3	11	7	·	131
35	71	19	11	·	3	7	3	29	43	3	7	3	·	101	·	·	3	13	3	·
236	3	·	3	·	7	3	11	3	13	·	·	·	3	·	3	7	47	3	13	3
37	137	3	151	3	131	23	37	·	3	7	3	61	19	3	7	3	·	·	·	11
38	·	13	7	29	3	·	3	·	7	3	·	3	·	·	11	31	3	113	3	7
39	3	11	3	·	·	3	·	3	19	47	71	·	3	7	3	37	89	3	7	3
40	·	3	·	3	13	11	7	·	3	·	3	·	7	3	13	3	29	·	139	·
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
181	7	3	67	3	11	41	37	.	3	17	3	7	.	3	13	3	.	7	31	.
82	.	.	.	19	3	7	3	.	11	3	7	3	101	47	.	.	3	11	3	29
83	3	.	3	11	7	3	.	3	.	19	17	.	3	31	3	7	53	3	.	3
84	.	3	.	3	.	37	59	11	3	7	3	17	.	3	7	3	11	.	53	13
85	13	.	7	67	3	19	3	31	7	3	13	3	17	.	.	29	3	.	3	7
186	3	23	3	47	.	3	11	3	.	71	19	.	3	7	3	11	.	3	7	3
87	17	3	.	3	73	29	7	137	3	.	3	89	7	3	.	3	19	.	.	11
88	7	17	109	.	3	13	3	.	113	3	43	3	79	23	11	13	3	7	3	.
89	3	11	3	.	67	3	13	3	61	.	7	.	3	41	3	17	7	3	11	3
90	.	3	17	3	7	11	23	.	3	.	3	.	.	3	.	3	17	61	19	71
191	11	107	.	7	3	.	3	29	19	3	127	3	.	.	7	31	3	17	3	73
92	3	13	3	.	11	3	.	3	7	.	37	13	3	11	3	.	101	3	23	3
93	37	3	13	3	19	17	107	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	11	7	19
94	53	7	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	7	.	13	.	3	101	3	17
95	3	.	3	.	31	3	17	3	.	23	.	7	3	.	3	19	11	3	.	3
196	43	3	11	3	.	7	71	13	3	103	3	11	.	3	.	3	7	47	.	.
97	.	.	23	.	3	.	3	53	17	3	.	3	131	73	47	7	3	.	3	13
98	3	.	3	7	.	3	.	3	31	7	11	103	3	59	3	.	.	3	101	3
99	71	3	7	3	.	.	41	19	3	.	3	.	13	3	11	3	.	.	.	7
200	.	11	31	13	3	.	3	7	.	3	17	3	43	7	53	.	3	71	3	101
201	3	7	3	19	.	3	7	3	23	.	.	17	3	.	3	13	61	3	19	3
02	7	3	47	3	.	23	13	.	3	11	3	7	17	3	.	3	103	7	.	53
03	47	.	.	.	3	7	3	.	13	3	7	3	89	11	19	.	3	.	3	.
04	3	113	3	41	7	3	97	3	11	59	.	.	3	.	3	7	31	3	103	3
05	.	3	61	3	29	.	131	67	3	7	3	13	11	3	7	3	59	.	43	.
206	107	19	7	73	3	.	3	11	7	3	23	3	.	13	137	17	3	.	3	7
07	3	.	3	.	13	3	19	3	.	.	79	11	3	7	3	.	17	3	7	3
08	29	3	.	3	23	31	7	41	3	.	3	.	7	3	.	3	13	17	.	.
09	7	23	19	.	3	.	3	13	67	3	11	3	.	.	31	139	3	7	3	11
10	3	37	3	.	.	3	.	3	19	13	7	107	3	29	3	.	7	3	17	3
211	13	3	.	3	7	.	61	.	3	31	3	.	59	3	.	3	.	.	11	17
12	79	53	29	7	3	11	3	.	89	3	.	3	13	.	7	61	3	107	3	19
13	3	131	3	13	41	3	23	3	7	11	.	.	3	.	3	73	.	3	.	3
14	19	3	43	3	11	13	.	7	3	109	3	47	.	3	.	3	.	.	7	.
15	23	7	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	113	.	.	3	11	3	.
216	3	59	3	11	.	3	47	3	13	.	53	7	3	.	3	23	109	3	13	3
17	.	3	.	3	47	7	.	11	3	.	3	29	23	3	.	3	7	19	71	.
18	.	13	11	.	3	.	3	19	.	3	131	3	.	79	43	7	3	.	3	61
19	3	29	3	7	.	3	11	3	127	7	.	31	3	13	3	11	.	3	.	3
20	.	3	7	3	13	.	.	29	3	.	3	.	71	3	13	3	.	.	19	7
221	17	.	.	.	3	37	3	7	.	3	67	3	41	7	11	.	3	.	3	79
22	3	7	3	.	113	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	31	.	3	11	3
23	7	3	79	3	59	11	.	.	3	13	3	7	.	3	61	3	.	7	.	13
24	11	.	17	37	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	113	43	3	83	3	149
25	3	19	3	17	7	3	.	3	.	.	107	67	3	11	3	7	19	3	59	3
226	.	3	139	3	17	131	19	.	3	7	3	.	37	3	7	3	.	11	.	.
27	.	61	7	11	3	13	3	.	7	3	.	3	11	.	.	13	3	23	3	7
28	3	.	3	.	.	3	13	3	.	89	.	137	3	7	3	47	11	3	7	3
29	59	3	11	3	.	.	7	103	3	.	3	11	7	3	127	3	83	.	13	109
30	7	.	.	.	3	.	3	17	.	3	47	3	.	41	.	11	3	7	3	.
231	3	13	3	.	19	3	.	3	17	.	7	13	3	97	3	.	7	3	.	3
32	.	3	13	3	7	43	53	.	3	17	3	.	31	3	11	3	.	.	.	23
33	19	11	.	7	3	61	3	.	.	3	97	3	103	67	7	19	3	149	3	.
34	3	47	3	.	29	3	31	3	7	.	17	53	3	23	3	83	13	3	.	3
35	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	17	.	3	103	3	31	.	7	.
236	67	7	41	59	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	13
37	3	.	3	23	.	3	.	3	11	.	13	7	3	17	3	.	37	3	53	3
38	17	3	.	3	107	7	29	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	.	23	.
39	43	17	.	13	3	31	3	11	.	3	.	3	.	29	17	7	3	.	3	103
40	3	67	3	7	.	3	41	3	.	7	.	11	3	.	3	13	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
241	7	.	.	.	3	.	3	89	.	3	23	3	59	.	.	101	3	7	3	19
42	3	.	3	43	11	3	61	3	53	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3
43	19	3	109	3	7	41	.	83	3	13	3	.	29	3	.	3	101	11	97	13
44	13	23	.	7	3	.	3	.	.	3	13	3	11	53	7	.	3	.	3	23
45	3	107	3	.	127	3	.	3	7	137	.	19	3	.	3	93	11	3	.	3
246	73	3	11	3	.	151	103	7	3	.	3	11	.	3	71	3	41	19	7	157
47	17	7	31	.	3	13	3	19	59	3	79	3	7	.	29	11	3	109	3	.
48	3	17	3	.	43	3	13	3	.	103	11	7	3	19	3	59	.	3	.	3
49	37	3	.	3	29	7	.	.	3	.	3	97	107	3	11	3	7	.	13	61
50	23	11	17	89	3	.	3	127	131	3	29	3	.	.	.	7	3	79	3	37
251	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	41	3	23	31	3	.	3
52	11	3	7	3	17	19	151	.	3	11	3	.	23	3	.	3	43	.	.	7
53	.	.	.	.	3	17	3	7	.	3	19	3	73	7	13	.	3	.	3	.
54	3	7	3	.	.	3	7	3	11	.	47	59	3	29	3	.	13	3	.	3
55	7	3	23	3	97	31	17	13	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	59	29
256	.	.	29	.	3	7	3	11	.	3	7	3	19	.	31	.	3	.	3	13
57	3	.	3	47	7	3	.	3	17	29	13	11	3	.	3	7	.	3	.	3
58	.	3	131	3	53	83	11	.	3	7	3	23	13	3	7	3	.	43	.	.
59	59	.	7	13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	37	.	3	.	3	7
60	3	.	3	31	19	3	.	3	.	53	17	.	3	7	3	13	.	3	7	3
261	43	3	.	3	.	.	7	.	3	151	3	17	7	3	59	3	.	13	11	79
62	7	.	73	.	3	11	3	157	13	3	.	3	17	37	.	19	3	7	3	.
63	3	29	3	.	83	3	.	3	.	11	7	113	3	17	3	.	7	3	.	3
64	17	3	.	3	7	61	.	29	3	.	3	13	.	3	.	3	137	31	53	.
65	.	17	13	7	3	.	3	23	11	3	41	3	43	13	7	.	3	11	3	139
266	3	37	3	11	13	3	43	3	7	79	.	31	3	.	3	17	.	3	.	3
67	.	3	17	3	.	.	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	11	47	7	23
68	.	7	11	17	3	.	3	13	.	3	139	3	7	.	47	.	3	17	3	.
69	3	.	3	71	17	3	11	3	.	13	.	7	3	23	3	11	29	3	.	3
70	13	3	113	3	.	7	.	41	3	61	3	151	.	3	19	3	7	.	17	11
271	41	.	.	.	3	19	3	47	37	3	.	3	13	43	11	7	3	.	3	17
72	3	11	3	7	.	3	17	3	163	7	19	73	3	113	3	.	.	3	11	3
73	23	3	7	3	31	11	59	17	3	89	3	.	151	3	.	3	19	37	23	7
74	11	67	.	.	3	79	3	7	17	3	.	3	.	7	.	23	3	13	3	.
75	3	7	3	.	11	3	7	3	13	17	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3
276	7	3	19	3	.	53	.	71	3	23	3	7	.	3	29	3	131	7	.	43
77	.	13	103	11	3	7	3	53	19	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	.
78	3	.	3	.	7	3	.	3	43	.	.	17	3	13	3	7	11	3	.	3
79	.	3	11	3	13	103	.	.	3	7	3	11	17	3	7	3	.	.	.	19
80	.	41	7	37	3	109	3	.	7	3	.	3	.	17	23	11	3	29	3	7
281	3	157	3	.	.	3	31	3	61	.	11	23	3	7	3	19	107	3	7	3
82	.	3	67	3	.	89	7	.	3	13	3	.	7	3	11	3	31	61	47	13
83	7	11	.	.	3	23	3	.	127	3	13	3	41	29	43	17	3	7	3	.
84	3	.	3	.	.	3	157	3	97	43	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
85	11	3	29	3	7	.	.	19	3	11	3	47	103	3	.	3	.	17	.	.
286	37	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	11	7	13	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	13	3	7	.	23	.	3	59	3	29	41	3	17	3
88	83	3	.	3	47	.	.	7	3	19	3	127	11	3	.	3	151	.	7	17
89	.	7	137	.	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	19	43	3	103	3	.
90	3	13	3	.	67	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	71	113	3	31	3
291	.	3	13	3	43	7	11	37	3	.	3	.	.	3	.	3	7	151	.	103
92	.	19	.	.	3	131	3	61	.	3	11	3	.	23	13	7	3	.	3	11
93	3	.	3	7	.	3	19	3	109	7	.	139	3	.	3	.	13	3	.	3
94	.	3	7	3	.	67	23	13	3	.	3	.	19	3	.	3	59	.	11	7
95	.	163	19	23	3	11	3	7	53	3	.	3	.	7	.	109	3	31	3	13
296	3	7	3	29	.	3	7	3	19	11	13	.	3	.	3	107	.	3	23	3
97	7	3	61	3	11	43	.	113	3	.	3	7	13	3	131	3	.	7	151	71
98	17	.	41	13	3	7	3	.	11	3	7	3	43	.	.	53	3	11	3	19
99	3	17	3	11	7	3	.	3	.	23	.	173	3	37	3	7	79	3	.	3
300	19	3	37	3	.	.	13	11	3	7	3	.	59	3	7	3	11	13	.	151
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
241	.	3	7	3	37	73	11	.	3	23	3	.	.	3	19	3	17	13	.	7
42	.	79	127	17	3	19	3	7	13	3	11	3	.	7	149	107	3	17	3	11
43	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	19	.	3	37	3	29	.	3	31	3
44	7	3	37	3	61	17	43	.	3	.	3	7	.	3	47	3	19	7	11	.
45	.	43	13	41	3	7	3	79	.	3	7	3	47	13	23	67	3	.	3	17
246	3	89	3	.	7	3	17	3	.	11	.	23	3	.	3	7	.	3	.	3
47	53	3	19	3	11	.	.	17	3	7	3	71	.	3	7	3	13	.	137	.
48	.	29	7	.	3	23	3	13	7	3	.	3	139	149	41	.	3	11	3	7
49	3	.	3	11	109	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	67	3	7	3
50	13	3	.	3	19	71	7	11	3	.	3	31	7	3	.	3	11	23	.	19
251	7	.	11	139	3	.	3	.	.	3	17	3	13	.	89	.	3	7	3	113
52	3	.	3	13	.	3	11	3	37	127	7	17	3	131	3	11	7	3	41	3
53	101	3	.	3	7	13	.	23	3	.	3	41	17	3	53	3	.	67	109	11
54	31	.	.	7	3	.	3	.	.	3	73	3	83	17	7	71	3	13	3	43
55	3	11	3	61	.	3	37	3	7	107	.	.	3	.	3	.	157	3	11	3
256	113	3	.	3	67	11	.	7	3	.	3	.	61	3	17	3	23	.	7	31
57	11	7	43	.	3	.	3	73	.	3	149	3	7	19	107	17	3	.	3	.
58	3	103	3	19	11	3	.	3	41	.	113	7	3	11	3	.	17	3	19	3
59	.	3	101	3	13	7	23	.	3	19	3	83	.	3	13	3	7	11	.	.
60	109	.	71	11	3	67	3	131	29	3	89	3	11	.	19	7	3	97	3	.
261	3	.	3	7	.	3	137	3	.	7	.	47	3	.	3	.	11	3	17	3
62	.	3	7	3	.	.	.	109	3	13	3	11	41	3	97	3	61	.	.	7
63	13	19	.	43	3	41	3	7	.	3	13	3	23	7	.	11	3	.	3	.
64	3	7	3	.	47	3	7	3	103	23	11	.	3	71	3	.	59	3	.	3
65	7	3	.	3	.	101	31	163	3	.	3	7	19	3	11	3	.	7	.	67
266	29	11	19	53	3	7	3	.	149	3	7	3	.	.	.	13	3	.	3	.
67	3	31	3	.	7	3	13	3	19	41	.	61	3	.	3	7	73	3	127	3
68	11	3	107	3	.	.	67	97	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	37
69	.	.	7	.	3	59	3	149	7	3	53	3	.	11	.	137	3	.	3	7
70	3	13	3	.	.	3	.	3	11	.	.	13	3	7	3	103	.	3	7	3
271	19	3	13	3	157	23	7	101	3	29	3	.	7	3	31	3	.	71	.	59
72	7	.	97	.	3	137	3	11	.	3	.	3	.	.	13	29	3	7	3	.
73	3	17	3	109	.	3	.	3	101	31	7	11	3	139	3	61	7	3	.	3
74	97	3	.	3	7	29	11	13	3	83	3	.	.	3	.	3	37	19	31	107
75	.	59	17	7	3	43	3	19	79	3	11	3	.	.	7	47	3	41	3	11
276	3	.	3	17	139	3	73	3	7	.	13	89	3	19	3	.	.	3	.	3
77	.	3	41	3	17	.	.	7	3	.	3	.	13	3	37	3	.	.	7	.
78	.	7	89	13	3	11	3	29	47	3	61	3	7	.	79	167	3	.	3	23
79	3	.	3	73	.	3	.	3	83	11	101	7	3	.	3	13	23	3	.	3
80	.	3	.	3	11	7	13	.	3	67	3	43	.	3	.	3	7	13	.	.
281	.	47	37	29	3	.	3	17	11	3	19	3	.	.	71	7	3	11	3	163
82	3	19	3	7	59	3	23	3	17	7	.	.	3	.	3	.	19	3	.	3
83	.	3	7	3	79	113	19	11	3	17	3	13	101	3	.	3	11	.	73	7
84	23	37	11	149	3	.	3	7	71	3	.	3	19	7	61	31	3	.	3	.
85	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	17	.	3	101	3	11	.	3	.	3
286	7	3	.	3	.	.	109	.	3	53	3	7	23	3	.	3	13	7	.	11
87	.	.	149	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	107	11	.	3	.	3	31
88	3	11	3	.	7	3	.	3	.	13	67	.	3	17	3	7	167	3	11	3
89	13	3	23	3	.	11	83	59	3	7	3	.	73	3	7	3	53	79	107	47
90	11	17	7	.	3	.	3	41	7	3	.	3	13	127	17	19	3	47	3	7
291	3	.	3	13	11	3	.	3	31	.	163	.	3	7	3	17	.	3	7	3
92	.	3	17	3	29	13	7	.	3	73	3	19	7	3	.	3	17	11	.	83
93	7	149	31	11	3	.	3	43	23	3	29	3	11	.	.	.	3	7	3	.
94	3	.	3	89	17	3	79	3	13	.	7	41	3	.	3	37	7	3	13	3
95	29	3	11	3	7	17	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3	127	101	17	.
296	149	13	47	7	3	.	3	.	.	3	59	3	67	.	7	11	3	23	3	17
97	3	.	3	.	.	3	17	3	7	19	11	97	3	13	3	.	31	3	83	3
98	.	3	73	3	13	.	.	7	3	.	3	.	.	3	11	3	71	167	7	29
99	61	7	29	.	3	19	3	23	17	3	31	3	7	.	157	.	3	89	3	131
300	3	41	3	.	23	3	107	3	.	17	19	7	3	67	3	.	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
301	31	.	7	.	3	.	3	.	7	3	47	3	29	.	.	.	3	43	3	7
02	3	.	3	17	.	3	11	3	47	.	167	19	3	7	3	11	.	3	7	3
03	157	3	.	3	17	.	7	.	3	.	3	13	7	3	23	3	.	19	.	11
04	7	.	13	47	3	17	3	19	29	3	.	3	.	13	11	61	3	7	3	.
05	3	11	3	.	13	3	.	3	23	131	7	.	3	19	3	.	7	3	11	3
306	71	3	127	3	7	11	17	67	3	113	3	109	.	3	.	3	13	.	19	.
07	11	.	.	7	3	.	3	13	31	3	.	3	79	73	7	59	3	71	3	97
08	3	.	3	.	11	3	.	3	7	13	29	.	3	11	3	.	.	3	109	3
09	13	3	31	3	.	19	43	7	3	17	3	157	.	3	.	3	.	11	7	.
10	29	7	101	11	3	.	3	.	67	3	19	3	7	.	41	.	3	37	3	61
311	3	19	3	13	53	3	29	3	.	.	17	7	3	163	3	.	11	3	.	3
12	41	3	11	3	23	7	19	.	3	.	3	11	.	3	.	3	7	157	.	.
13	113	23	.	131	3	173	3	.	.	3	.	3	17	.	.	7	3	13	3	23
14	3	31	3	7	101	3	89	3	13	7	11	53	3	17	3	149	23	3	13	3
15	17	3	7	3	.	.	.	43	3	29	3	41	.	3	11	3	.	.	.	7
316	.	11	.	73	3	101	3	7	103	3	.	3	47	7	17	29	3	.	3	.
17	3	7	3	37	19	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	17	.	3	53	3
18	7	3	17	3	13	29	.	47	3	11	3	7	139	3	13	3	17	7	.	.
19	19	61	.	17	3	7	3	59	137	3	7	3	37	11	109	19	3	17	3	43
20	3	.	3	.	7	3	101	3	11	31	.	.	3	103	3	7	179	3	73	3
321	47	3	97	3	163	17	.	.	3	7	3	19	11	3	7	3	.	.	17	13
22	13	.	7	31	3	.	3	11	7	3	13	3	167	.	.	103	3	19	3	7
23	3	.	3	.	79	3	17	3	.	.	.	11	3	7	3	73	.	3	7	3
24	.	3	23	3	.	.	7	17	3	.	3	.	7	3	163	3	.	.	71	37
25	7	.	.	19	3	13	3	31	17	3	11	3	.	.	.	13	3	7	3	11
326	3	.	3	.	.	3	13	3	.	17	7	67	3	.	3	127	7	3	.	3
27	53	3	.	3	7	.	.	.	3	43	3	23	71	3	19	3	29	137	11	.
28	.	.	53	7	3	11	3	37	23	3	17	3	.	.	7	.	3	.	3	107
29	3	13	3	.	.	3	.	3	7	11	19	13	3	.	3	.	.	3	47	3
30	61	3	13	3	11	.	137	7	3	.	3	.	17	3	.	3	19	173	7	.
331	79	7	.	113	3	.	3	.	11	3	157	3	7	17	13	31	3	11	3	.
32	3	.	3	11	.	3	59	3	139	.	149	7	3	167	3	43	13	3	.	3
33	.	3	19	3	.	7	.	11	3	47	3	.	.	3	17	3	7	.	.	.
34	127	.	11	.	3	.	3	23	19	3	.	3	101	67	29	7	3	53	3	13
35	3	.	3	7	23	3	11	3	.	7	13	.	3	.	3	11	17	3	.	3
336	.	3	7	3	19	.	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	.	17	.	7
37	67	.	37	13	3	.	3	7	.	3	29	3	89	7	11	.	3	41	3	.
38	3	7	3	.	.	3	7	3	31	149	.	.	3	23	3	13	43	3	11	3
39	7	3	41	3	.	11	13	107	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	83	17
40	11	37	31	71	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	101	.	3	59	3	79
341	3	67	3	23	7	3	109	3	149	.	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3
42	23	3	79	3	.	.	.	19	3	7	3	13	.	3	7	3	97	11	23	29
43	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	13	.	23	3	61	3	7
44	3	.	3	19	13	3	127	3	.	29	173	.	3	7	3	.	11	3	7	3
45	.	3	11	3	.	.	7	.	3	19	3	11	7	3	.	3	13	.	179	.
346	7	.	.	53	3	.	3	13	89	3	31	3	.	59	19	11	3	7	3	.
47	3	.	3	61	103	3	149	3	.	13	7	.	3	47	3	.	7	3	.	3
48	13	3	.	3	7	31	37	.	3	97	3	29	61	3	11	3	.	.	.	.
49	17	11	67	7	3	.	3	.	47	3	53	3	13	181	7	.	3	83	3	.
50	3	17	3	13	157	3	19	3	7	.	.	23	3	53	3	37	67	3	101	3
351	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.	19	3	41	3	.	113	7	.
52	.	7	17	137	3	23	3	41	.	3	.	3	7	11	167	131	3	13	3	101
53	3	43	3	17	.	3	.	3	11	.	.	7	3	89	3	.	59	3	13	3
54	.	3	.	3	17	7	107	.	3	.	3	71	11	3	.	3	7	23	.	.
55	131	13	.	.	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	19
356	3	.	3	7	149	3	.	3	179	7	23	11	3	13	3	157	29	3	43	3
57	19	3	7	3	13	71	11	23	3	139	3	.	.	3	13	3	103	31	.	7
58	.	.	61	.	3	59	3	7	113	3	11	3	.	7	.	.	3	73	3	11
59	3	7	3	149	.	3	7	3	17	.	37	19	3	.	3	83	127	3	103	3
60	7	3	.	3	.	.	.	181	3	13	3	7	137	3	.	3	23	7	11	13
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
301	11	3	53	3	.	7	97	.	3	11	3	103	.	3	.	3	7	109	.	13
02	13	.	79	.	3	53	3	.	.	3	13	3	107	11	31	7	3	.	3	41
03	3	127	3	7	97	3	.	3	11	7	37	17	3	23	3	.	.	3	113	3
04	37	3	7	3	83	41	.	.	3	31	3	29	11	3	43	3	.	.	.	7
05	137	.	.	.	3	13	3	7	19	3	.	3	53	7	73	13	3	.	3	37
306	3	7	3	23	.	3	7	3	.	37	.	11	3	61	3	.	47	3	.	3
07	7	3	.	3	19	.	11	29	3	.	3	7	.	3	17	3	41	7	13	19
08	.	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	89	67	17	3	.	3	11
09	3	13	3	83	7	3	173	3	.	47	.	13	3	.	3	7	17	3	139	3
10	.	3	13	3	89	.	47	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	17	11	137
311	.	.	7	.	3	11	3	71	7	3	.	3	.	.	13	.	3	.	3	7
12	3	.	3	.	43	3	.	3	.	11	.	31	3	7	3	67	13	3	7	3
13	107	3	.	3	11	79	7	13	3	137	3	.	7	3	.	3	.	.	.	17
14	7	71	83	163	3	73	3	.	11	3	.	3	.	19	23	.	3	7	3	13
15	3	139	3	11	37	3	.	3	131	.	7	23	3	.	3	31	7	3	19	3
316	31	3	.	3	7	.	.	11	3	19	3	79	13	3	.	3	11	41	29	.
17	.	113	11	7	3	23	3	.	.	3	43	3	61	37	7	83	3	.	3	.
18	3	53	3	.	151	3	11	3	7	.	127	71	3	.	3	11	.	3	167	3
19	89	3	.	3	31	.	13	7	3	.	3	113	.	3	29	3	.	13	7	11
20	.	7	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	11	.	3	67	3	.
321	3	11	3	.	29	3	19	3	53	.	23	7	3	.	3	.	.	3	11	3
22	.	3	.	3	.	7	41	23	3	59	3	13	19	3	83	3	7	43	.	.
23	11	.	13	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	13	139	7	3	29	3	179
24	3	17	3	7	11	3	.	3	19	7	47	.	3	11	3	53	.	3	.	3
25	43	3	7	3	.	.	29	.	3	.	3	.	31	3	.	3	13	11	37	7
326	103	.	17	11	3	89	3	7	37	3	41	3	11	.	.	97	3	.	3	19
27	3	7	3	17	181	3	7	3	.	13	73	.	3	.	3	.	11	3	.	3
28	7	3	11	3	17	59	23	.	3	71	3	7	131	3	.	3	31	7	67	167
29	83	31	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	13	.	.	11	3	.	3	.
30	3	.	3	13	7	3	43	3	.	.	11	19	3	.	3	7	.	3	23	3
331	.	3	71	3	.	13	17	41	3	7	3	.	.	3	7	3	.	19	89	.
32	41	11	7	79	3	29	3	17	7	3	107	3	23	83	.	.	3	13	3	7
33	3	.	3	.	73	3	61	3	13	23	.	29	3	7	3	173	.	3	7	3
34	11	3	.	3	.	109	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	107	.	19	139
35	7	13	23	37	3	.	3	.	59	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.
336	3	73	3	97	41	3	131	3	11	151	7	.	3	13	3	59	7	3	31	3
37	.	3	.	3	7	19	.	.	3	.	3	17	11	3	13	3	.	47	.	7
38	.	97	.	7	3	.	3	11	.	3	19	3	17	31	7	.	3	.	3	109
39	3	19	3	29	.	3	.	3	7	53	61	11	3	17	3	41	19	3	.	3
40	17	3	.	3	.	21	11	7	3	13	3	53	173	3	89	3	73	103	7	13
341	13	7	.	.	3	127	3	47	.	3	11	3	7	.	17	179	3	31	3	11
42	3	.	3	.	.	3	.	3	43	.	151	7	3	.	3	17	53	3	.	3
43	.	3	17	3	.	7	.	.	3	37	3	31	.	3	137	3	7	163	11	41
44	47	131	.	17	3	11	3	.	.	3	23	3	29	.	.	7	3	17	3	.
45	3	109	3	7	17	3	13	3	181	7	71	151	3	.	3	.	.	3	29	3
346	.	3	7	3	11	17	.	37	3	.	3	.	79	3	.	3	113	.	13	7
47	19	23	.	.	3	.	3	7	11	3	83	3	.	7	43	19	3	11	3	17
48	3	7	3	11	71	3	7	3	.	43	.	13	3	.	3	139	23	3	.	3
49	7	3	13	3	.	.	73	11	3	41	3	7	.	3	59	3	11	7	79	31
50	.	.	11	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	13	.	3	19	3	.
351	3	.	3	.	7	3	11	3	.	17	29	127	3	151	3	7	13	3	61	3
52	.	.	.	3	37	179	.	13	3	7	3	.	.	3	7	3	.	29	47	11
53	23	[illegible]	.	19	3	.	3	113	7	3	17	3	.	41	11	43	3	.	3	7
54	3	11	[illegible]	59	.	3	29	3	79	19	13	17	3	7	3	23	.	3	7	3
55	73	3	31	3	43	11	7	.	3	.	3	47	7	3	19	3	.	.	.	97
356	7	101	181	13	3	19	3	53	.	3	.	3	31	17	127	89	3	7	3	29
57	3	.	3	.	11	3	47	3	.	83	7	37	3	11	3	13	7	3	.	3
58	.	3	23	3	7	.	13	.	3	29	3	.	53	3	17	3	19	11	.	.
59	.	157	41	7	3	.	3	.	13	3	.	3	11	.	7	17	3	.	3	.
60	.	31	3	107	.	3	.	3	7	.	43	109	3	.	3	151	11	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
361	13	79	.	.	3	7	3	19	41	3	7	3	.	23	.	71	3	47	3	37
62	3	41	3	.	7	3	.	3	29	11	17	.	3	19	3	7	.	3	67	3
63	31	3	.	3	11	.	23	.	3	7	3	17	47	3	7	3	.	.	19	163
64	89	59	7	23	3	13	3	79	7	3	73	3	17	.	83	13	3	11	3	7
65	3	173	3	11	29	3	13	3	59	.	.	.	3	7	3	61	.	3	7	3
366	17	3	.	3	31	19	7	11	3	53	3	.	7	3	.	3	11	.	13	67
67	7	17	11	.	3	.	3	73	.	3	19	3	23	109	17	.	3	7	3	.
68	3	13	3	.	131	3	11	3	.	23	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3
69	.	3	13	3	7	.	19	.	3	.	3	.	.	3	43	3	17	.	.	11
70	163	.	23	7	3	.	3	.	.	3	61	3	19	29	7	.	3	17	3	.
371	3	11	3	43	17	3	.	3	7	.	137	107	3	71	3	.	13	3	11	3
72	.	3	29	3	127	11	.	7	3	.	3	59	31	3	23	3	167	.	7	193
73	11	7	.	.	3	.	3	67	.	3	163	3	7	37	.	.	3	107	3	13
74	3	113	3	.	11	3	17	3	23	.	13	7	3	11	3	29	.	3	.	3
75	.	3	.	3	.	7	.	17	3	157	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.
376	19	31	.	11	3	29	3	.	17	3	191	3	11	.	61	7	3	.	3	.
77	3	37	3	7	43	3	.	3	67	7	31	29	3	97	3	13	11	3	.	3
78	103	3	7	3	.	.	13	59	3	109	3	11	.	3	157	3	79	13	.	7
79	151	29	.	167	3	31	3	7	13	3	17	3	83	7	59	11	3	19	3	137
80	3	7	3	191	.	3	7	3	193	47	11	17	3	73	3	.	109	3	.	3
381	7	3	53	3	23	.	47	.	3	67	3	7	17	3	11	3	43	7	37	.
82	.	11	13	19	3	7	3	.	37	3	7	3	.	13	.	.	3	167	3	23
83	3	.	3	29	7	3	.	3	.	19	.	.	3	.	3	7	23	3	31	3
84	11	3	193	3	71	107	41	103	3	7	3	83	.	3	7	3	13	37	.	.
85	.	139	7	97	3	19	3	13	7	3	59	3	53	11	89	17	3	.	3	7
386	3	.	3	.	.	3	23	3	11	13	19	.	3	7	3	.	17	3	7	3
87	13	3	.	3	.	.	7	31	3	.	3	.	7	3	.	3	19	17	.	.
88	7	.	151	197	3	37	3	11	.	3	41	3	13	.	71	.	3	7	3	53
89	3	.	3	13	167	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	23	7	3	17	3
90	43	3	19	3	7	13	11	.	3	.	3	31	23	3	103	3	.	.	.	17
391	61	.	.	7	3	.	3	.	19	3	11	3	109	.	7	.	3	13	3	11
92	3	197	3	.	113	3	.	3	7	61	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
93	.	3	23	3	19	.	.	7	3	.	3	67	37	3	139	3	.	.	7	19
94	31	7	157	.	3	11	3	.	79	3	89	3	7	47	113	.	3	.	3	103
95	3	.	3	.	.	3	43	3	.	11	29	7	3	13	3	19	.	3	71	3
396	199	3	.	3	11	7	173	.	3	.	3	23	.	3	13	3	7	29	41	31
97	29	.	59	.	3	151	3	.	11	3	.	3	67	.	79	7	3	11	3	.
98	3	53	3	7	41	3	29	3	.	7	.	.	3	61	3	.	.	3	.	3
99	.	3	7	3	107	167	179	11	3	13	3	.	73	3	.	3	11	59	43	7
400	13	109	11	.	3	.	3	7	31	3	13	3	.	7	.	.	3	23	3	29
401	3	7	3	19	.	3	7	3	53	.	.	.	3	67	3	11	137	3	19	3
02	7	3	31	3	79	.	131	37	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	167	11
03	191	41	17	173	3	7	3	23	61	3	7	3	31	53	11	13	3	.	3	157
04	3	11	3	17	7	3	13	3	83	.	.	.	3	.	3	7	37	3	11	3
05	101	3	.	3	17	11	31	.	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	13	23
406	11	19	7	.	3	17	3	151	7	3	.	3	41	179	.	.	3	97	3	7
07	3	13	3	.	11	3	19	3	43	193	139	13	3	7	3	.	131	3	7	3
08	.	3	13	3	37	.	7	.	3	.	3	.	7	3	97	3	.	11	.	.
09	7	.	19	11	3	163	3	17	151	3	.	3	11	.	13	.	3	7	3	.
10	3	131	3	23	.	3	.	3	17	.	7	89	3	37	3	.	7	3	.	3
411	23	3	11	3	7	.	.	13	3	17	3	11	.	3	31	3	.	.	23	.
12	.	.	89	7	3	.	3	47	.	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	13
13	3	103	3	101	109	3	79	3	7	31	11	37	3	.	3	67	.	3	173	3
14	19	3	47	3	.	.	83	7	3	23	3	17	13	3	11	3	29	.	7	181
15	47	7	.	13	3	.	3	.	.	3	131	3	7	41	73	.	3	.	3	.
416	3	.	3	.	.	3	.	3	.	107	.	7	3	17	3	13	.	3	.	3
17	11	3	179	3	53	7	13	.	3	11	3	.	29	3	.	3	7	13	109	83
18	.	17	97	.	3	.	3	19	13	3	151	3	59	11	17	7	3	.	3	.
19	3	.	3	7	.	3	167	3	11	7	.	23	3	19	3	17	.	3	.	3
20	97	3	7	3	43	.	.	.	3	.	3	13	11	3	127	3	17	.	19	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
361	.	3	11	3	.	29	59	7	3	61	3	11	97	3	.	3	.	17	7	53
62	.	7	13	101	3	.	3	.	19	3	.	3	7	13	131	11	3	.	3	.
63	3	.	3	103	13	3	41	3	37	.	11	7	3	.	3	.	151	3	17	3
64	.	3	.	3	19	7	.		3	.	3	.	191	3	11	3	7	.	.	17
65	.	11	139	.	3	.	3	13	.	3	79	3	157	.	.	7	3	23	3	.
366	3	.	3	7	61	3	37	3	.	7	.	43	3	.	3	19	.	3	.	3
67	11	3	7	3	.	97	.	83	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	31	7
68	43	137	.	29	3	191	3	7	.	3	.	3	13	7	.	37	3	79	3	.
69	3	7	3	13	23	3	7	3	11	.	103	.	3	31	3	47	71	3	.	3
70	7	3	.	3	.	13	101	19	3	131	3	7	11	3	.	3	29	7	.	23
371	97	53	73	.	3	7	3	11	.	3	7	3	.	19	41	.	3	13	3	.
72	3	.	3	19	7	3	83	3	13	.	.	11	13	23	3	7	89	3	13	3
73	41	3	.	3	.	.	11	.	3	7	3	.	29	3	7	3	139	61	.	149
74	17	13	7	47	3	.	3	89	7	3	11	3	37	.	19	.	3	.	3	7
75	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	53	.	3	7	3	.	.	3	7	3
376	23	3	.	3	13	.	7	139	3	101	3	41	7	3	13	3	.	.	11	.
77	7	19	17	61	3	11	3	179	107	3	37	3	.	.	29	23	3	7	3	.
78	3	.	3	17	.	3	19	3	.	11	7	.	3	43	3	.	7	3	.	3
79	.	3	.	3	7	.	.	43	3	13	3	163	19	3	.	3	.	.	.	13
80	13	.	19	7	3	17	3	.	11	3	13	3	113	.	7	41	3	11	3	31
381	3	.	3	11	31	3	.	3	7	59	.	73	3	.	3	.	181	3	.	3
82	29	3	67	3	.	83	17	7	3	.	3	101	.	3	.	3	11	149	7	.
83	.	7	11	89	3	13	3	17	.	3	.	3	7	131	23	13	3	.	3	19
84	3	.	3	.	.	3	11	3	17	79	109	7	3	29	3	11	61	3	137	3
85	19	3	.	3	.	7	.	.	3	17	3	173	41	3	47	3	7	.	13	11
386	.	.	29	67	3	23	3	.	.	3	.	3	47	101	11	7	3	.	3	.
87	3	11	3	7	83	3	.	3	137	7	17	13	3	.	3	79	.	3	11	3
88	.	3	7	3	.	11	.	47	3	.	3	17	59	3	37	3	.	19	97	7
89	11	.	163	.	3	47	3	7	.	3	.	3	17	7	13	127	3	.	3	59
90	3	7	3	139	11	3	7	3	89	41	23	.	3	11	3	.	13	3	.	3
391	7	3	.	3	.	.	53	13	3	43	3	7	.	3	149	3	.	7	19	.
92	.	17	37	11	3	7	3	107	173	3	7	3	11	163	17	101	3	.	3	13
93	3	23	3	.	7	3	.	3	.	.	13	53	3	.	3	7	11	3	.	3
94	.	3	11	3	.	19	61	29	3	7	3	11	13	3	7	3	17	73	127	.
95	.	37	7	13	3	.	3	.	7	3	19	3	.	23	31	11	3	17	3	7
396	3	19	3	.	17	3	.	3	.	97	11	.	3	7	3	13	19	3	7	3
97	127	3	83	3	.	17	7	.	3	31	3	.	7	3	11	3	.	13	17	.
98	7	11	.	23	3	.	3	.	13	3	.	3	19	.	.	113	3	7	3	17
99	3	.	3	31	89	3	17	3	.	71	7	.	3	.	3	.	7	3	23	3
400	11	3	41	3	7	.	103	17	3	11	3	13	149	3	.	3	47	.	101	.
401	.	.	13	7	3	.	3	.	17	3	.	3	23	11	7	.	3	.	3	61
02	3	.	3	127	13	3	67	3	7	17	.	47	3	.	3	.	43	3	59	3
03	.	3	.	3	.	181	37	7	3	47	3	149	11	3	.	3	13	31	7	71
04	19	7	23	.	3	43	3	11	.	3	17	3	7	.	.	19	3	.	3	.
05	3	107	3	.	47	3	113	3	29	13	.	7	3	.	3	37	.	3	.	3
406	13	3	109	3	73	7	11	67	3	89	3	19	17	3	23	3	7	.	.	.
07	.	83	53	.	3	.	3	59	.	3	11	3	13	17	.	7	3	19	3	11
08	3	.	3	7	29	3	.	3	23	7	41	.	3	.	3	31	103	3	.	3
09	31	3	7	3	.	13	71	53	3	.	3	43	107	3	17	3	179	.	11	7
10	.	61	.	19	3	11	3	7	67	3	.	3	.	7	181	17	3	13	3	73
411	3	7	3	79	.	3	7	3	13	11	.	.	3	.	3	.	17	3	13	3
12	7	3	.	3	11	.	29	.	3	149	3	7	.	3	19	3	157	7	61	.
13	.	13	.	59	3	7	3	41	11	3	7	3	.	29	.	.	3	11	3	.
14	3	.	3	11	7	3	.	3	113	67	19	.	3	13	3	7	.	3	17	3
15	37	3	29	3	13	89	197	11	3	7	3	.	43	3	7	3	11	.	.	17
416	.	23	7	.	3	61	3	.	7	3	71	3	.	73	.	47	3	173	3	7
17	3	43	3	.	.	3	11	3	.	37	.	41	3	7	3	11	23	3	7	3
18	.	3	19	3	41	.	7	149	3	13	3	.	7	3	.	3	163	.	.	11
19	7	.	.	.	3	29	3	.	19	3	13	3	.	.	11	199	3	7	3	.
20	3	11	3	137	.	3	23	.	.	.	7	29	3	.	3	.	7	3	11	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
421	.	71	13	17	3	23	3	7	73	3	103	3	.	7	29	.	3	17	3	113
22	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	.	11	3	157	3	.	53	3	83	3
23	7	3	.	3	29	17	11	101	3	.	3	7	.	3	.	3	13	7	17	.
24	109	.	.	.	3	7	3	13	59	3	7	3	151	.	.	31	3	.	3	11
25	3	19	3	.	7	3	17	3	101	13	23	71	3	.	3	7	19	3	157	3
426	13	3	137	3	.	43	19	47	3	7	3	47	89	3	7	3	.	.	11	.
27	.	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	13	151	.	79	3	.	3	7
28	3	23	3	13	31	3	47	3	.	11	113	.	3	7	3	.	.	3	7	3
29	.	3	107	3	11	13	7	167	3	.	3	.	7	3	.	3	23	.	67	29
30	7	.	29	41	3	.	3	.	11	3	17	3	37	23	.	193	3	7	3	.
431	3	.	3	11	19	3	.	3	13	29	7	17	3	.	3	179	7	3	13	3
32	.	3	.	3	7	79	23	11	3	.	3	139	17	3	.	3	11	83	59	61
33	19	13	11	7	3	.	3	.	.	3	37	3	.	17	7	19	3	89	3	67
34	3	.	3	83	.	3	11	3	7	173	.	137	3	13	3	11	.	3	23	3
35	41	3	139	3	13	53	.	7	3	71	3	19	101	3	13	3	.	.	7	11
436	59	7	.	.	3	.	3	53	181	3	.	3	7	.	11	17	3	19	3	.
37	3	11	3	109	.	3	.	3	.	23	73	7	3	101	3	191	17	3	11	3
38	.	3	71	3	193	7	43	29	3	13	3	41	53	3	59	3	7	17	163	13
39	11	43	23	19	3	.	3	37	167	3	13	3	197	.	53	7	3	.	3	71
40	3	79	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	47	.	3	17	3
441	.	3	7	3	.	31	157	.	3	.	3	.	.	3	19	3	37	11	131	7
42	.	.	.	11	3	13	3	7	.	3	47	3	11	7	31	13	3	151	3	.
43	3	7	3	59	73	3	7	3	23	127	19	97	3	43	3	101	11	3	61	3
44	7	3	11	3	89	23	.	43	3	31	3	7	157	3	37	3	19	7	13	.
45	.	191	.	47	3	7	3	.	211	3	7	3	.	.	.	11	3	.	3	.
446	3	13	3	31	7	3	.	3	.	.	11	13	3	.	3	7	.	3	.	3
47	.	3	13	3	.	61	97	197	3	7	3	.	41	3	7	3	.	101	29	73
48	71	11	7	.	3	41	3	.	7	3	23	3	127	107	13	.	3	.	3	7
49	3	83	3	.	97	3	.	3	29	167	.	179	3	7	3	.	13	3	7	3
50	11	3	.	3	19	.	7	13	3	11	3	37	7	3	29	3	73	31	107	19
451	7	23	43	79	3	197	3	.	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	13
52	3	17	3	53	29	3	103	3	11	41	7	31	3	.	3	19	7	3	.	3
53	89	3	.	3	7	113	.	.	3	61	3	.	11	3	.	3	.	.	137	101
54	83	.	17	7	3	.	3	11	53	3	.	3	181	.	7	.	3	29	3	47
55	3	.	3	17	71	3	23	3	7	.	53	11	3	.	3	13	.	3	37	3
456	31	3	59	3	17	.	11	7	3	43	3	103	.	3	47	3	.	13	7	191
57	23	7	.	43	3	17	3	131	13	3	11	3	7	19	.	53	3	149	3	11
58	3	163	3	19	61	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	23	.	3	19	3
59	197	3	29	3	31	7	17	47	3	19	3	13	23	3	71	3	7	.	11	.
60	157	179	13	139	3	11	3	17	.	3	.	3	191	13	19	7	3	41	3	.
461	3	.	3	7	13	3	107	3	17	7	193	163	3	.	3	29	.	3	.	3
62	47	3	7	3	11	37	113	.	3	17	3	.	83	3	.	3	13	131	103	7
63	.	19	.	.	3	29	3	7	11	3	.	3	107	7	.	149	3	11	3	.
64	3	7	3	11	.	3	7	3	61	13	17	29	3	59	3	.	.	3	.	3
65	7	3	.	3	.	193	181	11	3	.	3	7	19	3	173	3	11	7	89	.
466	.	29	11	127	3	7	3	.	23	3	7	3	13	.	149	.	3	.	3	.
67	3	.	3	13	7	3	11	3	19	.	.	83	3	17	3	7	43	3	.	3
68	17	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	139	79	11
69	.	17	7	61	3	43	3	.	7	3	167	3	71	.	11	73	3	13	3	7
70	3	11	3	29	53	3	.	3	13	59	31	131	3	7	3	17	.	3	7	3
471	19	3	17	3	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	17	.	.	.
72	7	13	.	17	3	31	3	23	.	3	83	3	73	149	.	97	3	7	3	37
73	3	.	3	.	11	3	.	3	79	37	7	19	3	11	3	.	7	3	113	3
74	107	3	.	3	7	17	.	.	3	47	3	43	.	3	13	3	.	11	17	23
75	.	67	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	137	3	.	3	17
476	3	181	3	.	47	3	17	3	7	.	97	.	3	19	3	.	11	3	29	3
77	.	3	11	3	.	.	.	7	3	13	3	11	59	3	.	3	.	.	7	13
78	13	7	.	.	3	137	3	.	17	3	13	3	7	31	.	11	3	.	3	59
79	3	.	3	23	.	3	.	3	173	17	11	7	3	.	3	.	191	3	.	3
80	23	3	61	3	41	7	.	31	3	.	3	.	43	3	11	3	7	107	23	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
421	61	3	.	3	7	11	149	.	3	181	3	.	.	3	.	3	31	.	.	19
22	11	29	.	7	3	13	3	43	41	3	67	3	.	.	7	13	3	.	3	.
23	3	41	3	.	11	3	13	3	7	.	31	.	3	11	3	19	.	3	.	3
24	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	107	23	3	.	3	.	11	7	.
25	17	7	.	11	3	31	3	.	.	3	.	3	7	97	37	.	3	191	3	41
426	3	13	3	29	37	3	.	3	71	139	.	7	3	.	3	.	11	3	.	3
27	.	3	11	3	61	7	.	19	3	.	3	11	179	3	.	3	7	.	.	127
28	73	.	17	.	3	.	3	163	43	3	53	3	137	19	13	7	3	59	3	.
29	3	.	3	7	.	3	.	3	97	7	11	.	3	53	3	.	13	3	19	3
30	.	3	7	3	17	.	.	13	3	19	3	23	67	3	11	3	41	.	71	7
431	.	11	103	.	3	17	3	7	23	3	.	3	29	7	19	.	3	47	3	13
32	3	7	3	181	.	3	7	3	.	109	13	113	3	.	3	73	.	3	29	3
33	7	3	191	3	131	103	17	31	3	11	3	7	13	3	43	3	.	7	.	.
3	.	19	.	13	3	7	3	17	29	3	7	3	.	11	.	157	3	23	3	.
35	3	97	3	43	7	3	19	3	11	.	.	.	3	41	3	7	.	3	.	3
436	.	3	149	3	.	47	13	.	3	7	3	31	11	3	7	3	.	13	37	89
37	67	.	7	.	3	107	3	11	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7
38	3	.	3	61	23	3	.	3	19	73	17	11	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	113	3	.	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	29	.	23
40	7	.	13	.	3	139	3	127	.	3	11	3	17	13	.	.	3	7	3	11
441	3	67	3	.	13	3	29	3	.	163	7	.	3	17	3	.	7	3	193	3
42	17	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	.	3	67	3	13	.	11	31
43	.	17	.	7	3	11	3	13	.	3	199	3	.	.	7	.	3	103	3	29
44	3	.	3	23	173	3	53	3	7	11	79	19	3	.	3	17	.	3	.	3
45	13	3	17	3	11	.	41	7	3	29	3	.	109	3	.	3	17	19	7	103
446	.	7	.	17	3	59	3	19	11	3	43	3	7	.	.	23	3	11	3	.
47	3	.	3	11	17	3	89	3	.	.	.	7	3	19	3	.	47	3	.	3
48	.	3	31	3	113	7	.	11	3	23	3	.	37	3	.	3	7	.	17	59
49	79	.	11	.	3	.	3	193	.	3	41	3	31	.	.	7	3	13	3	17
50	3	.	3	7	.	3	11	3	13	7	.	61	3	.	3	11	67	3	13	3
451	163	3	7	3	.	19	31	17	3	199	3	.	.	3	73	3	.	43	.	7
52	37	13	167	.	3	.	3	7	17	3	19	3	.	7	11	.	3	.	3	97
53	3	7	3	67	.	3	7	3	59	17	.	23	3	13	3	.	19	3	11	3
54	7	3	131	3	13	11	19	41	3	37	3	7	.	3	13	3	.	7	.	173
55	11	.	.	29	3	7	3	.	199	3	7	3	19	79	.	.	3	127	3	.
456	3	71	3	.	7	3	.	3	109	.	.	17	3	11	3	7	.	3	.	3
57	.	3	.	3	67	.	.	37	3	7	3	.	17	3	7	3	29	11	41	13
58	13	.	7	11	3	.	3	.	7	3	13	3	11	17	.	109	3	.	3	7
59	3	.	3	.	19	3	43	3	.	31	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3
60	.	3	11	3	.	73	7	23	3	.	3	11	7	3	17	3	.	.	31	.
461	7	.	101	31	3	13	3	137	.	3	61	3	.	.	.	11	3	7	3	.
62	3	23	3	167	.	3	13	3	.	.	7	.	3	31	3	41	7	3	67	3
63	.	3	151	3	7	71	199	89	3	79	3	19	.	3	11	3	23	17	13	.
64	.	11	.	7	3	97	3	31	.	3	.	3	53	23	7	.	3	19	3	.
65	3	13	3	.	101	3		3	7	.	47	13	3	37	3	.	.	3	17	3
466	11	3	13	.	29	.	23	7	3	11	3	.	.	3	.	3	.	53	7	17
6	.	7	.	19	3	101	3	.	.	3	29	3	7	11	13	71	3	73	3	53
68	3	.	3	47	.	3	.	3	11	19	.	7	3	173	3	.	13	3	23	3
69	29	3		.	151	7	67	13	3	107	3	109	11	3	19	3	7	.	.	43
70	.	211	.	.	3	19	3	11	103	3	179	3	23	197	.	7	3	.	3	13
471	3	61	3	7	.	3	101	3	43	7	13	11	3	29	3	.	41	3	109	3
72	.	3	7	3	167	151	11	.	3	41	3	.	13	3	.	3	19	.	.	7
73	.	.	23	13	3	.	3	7	127	3	11	3	.	7	.	.	3	83	3	11
74	3	7	3	.	31	3	7	3	37	29	197	79	3	103	3	13	.	3	.	3
75	7	3	19	3	199	.	13	.	3	113	3	7	.	3	23	3	.	7	11	.
476	17	.	.	.	3	7	3	73	13	3	7	3	.	41	43	103	3	37	3	.
77	3	17	3	163	7	3	37	3	23	11	.	.	3	71	3	7	.	3	.	3
78	109	3	.	3	11	23	151	.	3	7	3	13	.	3	7	3	83	47	211	19
79	.	79	7	199	3	.	3	.	7	3	.	3	.	13	47	37	3	11	3	7
80	3	29	3	11	1·	3	71	3	53	.	131	.	3	7	3	19	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
481	103	11	73	.	3	13	3	.	.	3	17	3	.	127	37	7	3	31	3	89
82	3	19	3	7	37	3	13	3	.	7	29	17	3	139	3	.	19	3	.	3
83	11	3	7	3	.	.	19	211	3	11	3	31	17	3	.	3	.	29	13	7
84	29	97	.	.	3	.	3	7	41	3	79	3	19	7	.	59	3	193	3	.
85	3	7	3	179	139	3	7	3	11	.	.	13	3	.	3	.	.	3	43	3
486	7	3	13	3	.	173	61	.	3	.	3	7	11	3	17	3	127	7	.	.
87	31	113	53	67	3	7	3	11	83	3	7	3	.	.	13	17	3	79	3	29
88	3	37	3	.	7	3	.	3	.	.	157	11	3	47	3	7	13	3	.	3
89	79	3	.	3	59	41	11	13	3	7	3	113	167	3	7	5	109	17	.	31
90	19	.	7	.	3	23	3	.	7	3	11	3	.	.	.	19	3	.	3	7
491	3	.	3	.	67	3	.	3	.	.	13	73	3	7	3	.	157	3	7	3
92	.	3	.	3	.	29	7	83	3	.	3	19	7	3	53	3	41	23	11	17
93	7	47	.	13	3	11	3	149	31	3	107	3	.	.	103	.	3	7	3	61
94	3	127	3	.	.	3	.	3	73	11	7	.	3	.	3	13	7	3	197	3
95	59	3	31	3	7	67	13	23	3	.	3	.	.	3	.	3	107	13	.	.
496	193	.	113	7	3	.	3	29	11	3	.	3	31	.	7	.	3	11	3	131
97	3	23	3	11	.	3	83	3	7	19	.	223	3	41	3	.	.	3	.	3
98	.	3	.	3	.	109	31	7	3	.	3	13	.	3	19	3	11	.	7	79
99	139	7	11	29	3	19	3	.	.	3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	199
500	3	31	3	43	13	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	163	3	.	3
501	.	3	89	3	.	7	23	.	3	.	3	.	.	3	181	3	7	41	.	11
02	17	61	.	23	3	149	3	13	.	3	.	3	.	191	11	7	3	47	3	109
03	3	11	3	7	.	3	67	3	.	7	59	.	3	.	3	71	.	3	11	3
04	13	3	7	3	.	11	.	127	3	.	3	211	29	3	31	3	.	73	61	7
05	11	.	17	53	3	.	3	7	19	3	.	3	13	7	97	.	3	.	3	.
506	3	7	3	13	11	3	7	3	223	23	.	197	3	11	3	79	89	3	.	3
07	7	3	.	3	17	13	41	67	3	.	3	7	97	3	113	3	.	7	31	19
08	37	101	23	11	3	7	3	89	.	3	7	3	11	.	29	.	3	13	3	.
09	3	109	3	.	7	3	59	3	13	.	127	.	3	31	3	7	11	3	13	3
10	.	3	11	3	29	139	17	163	3	7	3	11	.	3	7	.	43	.	.	71
511	137	13	7	.	3	79	3	17	7	3	29	3	.	.	.	11	3	199	3	7
12	3	.	3	41	83	3	.	3	17	181	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3
13	29	3	.	3	13	23	7	19	3	17	3	.	7	3	11	3	.	.	.	.
14	7	11	.	101	3	.	3	.	.	3	.	3	.	19	.	.	3	7	3	.
15	3	.	3	19	.	3	.	3	.	67	7	127	3	29	3	.	7	3	19	3
516	11	3	.	3	7	.	71	41	3	11	3	17	.	3	.	3	113	43	.	13
17	13	149	29	7	3	.	3	.	.	3	13	3	17	11	7	31	3	59	3	.
18	3	.	3	103	197	3	.	3	7	29	.	.	3	17	3	.	47	3	139	3
19	17	3	.	3	23	.	193	7	3	137	3	.	11	3	167	3	.	127	7	.
20	149	7	131	.	3	13	3	11	.	3	.	3	7	61	17	13	3	71	3	23
521	3	.	3	107	31	3	13	3	.	47	.	7	3	37	3	17	23	3	.	3
22	.	3	17	3	109	7	11	79	3	.	3	29	19	3	.	3	7	89	13	.
23	.	193	19	17	3	.	3	113	.	3	11	3	43	59	199	7	3	17	3	11
24	3	13	3	7	17	3	23	3	19	7	103	13	3	.	3	41	229	3	179	3
25	.	3	7	3	.	17	.	29	3	53	3	.	131	3	107	3	.	.	11	7
526	23	41	31	.	3	11	3	7	101	3	.	3	.	7	13	.	3	61	3	17
27	5	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	67	3	.	3	23	13	3	.	3
28	7	3	.	3	11	.	.	13	3	101	3	7	23	3	.	3	53	7	43	41
29	.	.	191	157	3	7	3	.	11	3	7	3	41	43	.	167	3	11	3	13
30	3	.	3	11	7	3	.	3	37	17	13	19	3	181	3	7	29	3	.	3
531	.	3	23	3	173	.	.	11	3	7	3	.	13	3	7	3	11	19	.	.
32	.	83	7	13	3	127	3	19	7	3	17	3	.	.	139	.	3	37	3	7
33	3	151	3	.	89	3	11	3	71	.	.	17	3	7	3	11	41	3	7	3
34	.	3	.	3	.	31	7	.	3	41	3	23	7	3	.	3	.	13	19	11
35	7	.	.	73	3	59	3	109	13	3	.	3	199	17	11	37	3	7	3	.
536	3	11	3	.	.	3	.	3	29	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
37	83	3	43	3	7	11	.	.	3	31	3	13	.	3	17	3	61	223	71	59
38	11	173	13	7	3	.	3	.	107	3	19	3	.	13	7	17	3	23	3	.
39	3	19	3	31	11	3	.	3	7	.	.	199	3	11	3	.	17	3	73	3
40	.	3	53	3	.	.	19	7	3	89	3	97	71	3	.	3	13	11	7	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
481	179	3	.	3	17	.	7	11	3	67	3	.	7	3	.	3	11	.	.	157
82	7	73	11	.	3	17	3	13	.	3	23	3	.	53	109	43	3	7	3	.
83	3	.	3	37	137	3	11	3	.	13	7	101	3	.	3	11	7	3	.	3
84	13	3	37	3	7	.	17	19	3	.	3	.	.	3	.	3	.	71	.	11
85	47	23	59	7	3	.	3	17	.	3	31	3	13	19	7	.	3	.	3	23
486	3	11	3	13	.	3	41	3	7	.	.	.	3	89	3	181	23	3	11	3
87	.	3	.	3	.	11	.	7	3	17	3	.	.	3	.	3	97	59	7	.
88	11	7	.	.	3	131	3	.	.	3	37	3	7	.	19	.	3	13	3	107
89	3	.	3	173	11	3	23	3	13	.	17	7	3	11	3	.	.	3	13	3
90	181	3	.	3	71	7	139	.	3	31	3	17	.	3	191	3	7	11	29	37
491	23	13	.	11	3	211	3	.	.	3	.	3	11	137	101	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	.	3	19	3	29	7	.	.	3	13	3	23	11	3	.	3
93	17	3	7	3	13	.	.	.	3	97	3	11	19	3	13	3	.	.	47	7
94	.	17	19	.	3	.	3	7	61	3	.	3	.	7	17	11	3	43	3	.
95	3	7	3	.	29	3	7	3	19	89	11	43	3	179	3	17	101	3	.	3
496	7	3	17	3	53	.	.	.	3	13	3	7	.	3	11	3	17	7	.	13
97	13	11	.	17	3	7	3	157	71	3	7	3	67	.	.	.	3	17	3	19
98	3	.	3	73	7	3	47	3	.	53	.	31	3	83	3	7	.	3	41	3
99	11	3	.	3	47	17	29	107	3	7	3	23	151	3	7	3	.	.	17	.
500	.	.	7	113	3	13	3	.	7	3	.	3	61	11	.	13	3	.	3	7
501	3	.	3	.	103	3	13	3	11	131	.	19	3	7	3	31	53	3	7	3
02	31	3	29	3	.	.	7	17	3	.	3	137	7	3	.	3	.	19	13	179
03	7	43	37	.	3	.	3	11	17	3	.	3	83	.	.	41	3	7	3	101
04	3	13	3	.	.	3	109	3	41	17	7	11	3	19	3	29	7	3	.	3
05	.	3	13	3	7	59	11	61	3	103	3	37	.	3	.	3	.	.	19	.
506	.	37	179	7	3	29	3	23	.	3	11	3	59	.	7	173	3	103	3	11
07	3	.	3	193	23	3	.	3	7	.	.	17	3	43	3	.	13	3	79	3
08	211	3	.	3	181	19	.	7	3	.	3	83	17	3	151	3	.	.	7	23
09	.	7	.	131	3	11	3	.	.	3	19	3	7	17	67	.	3	.	3	13
10	3	19	3	.	.	3	223	3	.	11	13	7	3	23	3	47	19	3	37	3
511	.	3	.	3	11	7	19	.	3	73	3	61	13	3	17	3	7	.	.	.
12	53	107	.	13	3	.	3	167	11	3	47	3	19	.	.	7	3	11	3	43
13	3	89	3	7	.	3	31	3	47	7	83	191	3	.	3	13	17	3	103	3
14	23	3	7	3	.	53	13	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	13	23	7
15	.	31	11	47	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	79	23	3	.	3	.
516	3	7	3	.	19	3	7	3	163	.	31	.	3	.	3	11	.	3	17	3
17	7	3	73	3	191	37	.	.	3	23	3	7	53	3	.	3	67	7	.	11
18	19	.	13	.	3	7	3	.	.	3	7	3	29	13	11	19	3	.	3	.
19	3	11	3	223	7	3	157	3	.	.	.	59	3	227	3	7	.	3	11	3
20	.	3	.	3	79	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	13	113	59	53
521	11	.	7	43	3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	23	.	3	19	3	7
22	3	.	3	.	11	3	.	3	167	13	61	23	3	7	3	.	.	3	7	3
23	13	3	41	3	.	.	7	.	3	83	3	.	7	3	.	3	.	11	151	61
24	7	.	.	11	3	23	3	71	137	3	97	3	11	31	73	.	3	7	3	47
25	3	.	3	13	.	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	43	7	3	149	3
526	37	3	11	3	7	13	.	31	3	.	3	11	139	3	19	3	.	23	.	151
27	17	71	.	7	3	19	3	.	113	3	89	3	47	.	7	11	3	13	3	37
28	3	17	3	.	.	3	29	3	7	37	11	.	3	.	3	.	227	3	13	3
29	.	3	.	3	211	.	.	7	3	.	3	31	.	3	11	3	19	197	7	.
30	.	7	17	97	3	47	3	.	73	3	.	3	7	109	.	.	3	.	3	29
531	3	23	3	17	.	3	79	3	.	.	41	7	3	13	3	.	43	3	.	3
32	11	3	19	3	13	7	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	7	137	223	.
33	31	.	229	.	3	17	3	83	19	3	.	3	.	11	197	7	3	107	3	67
34	3	.	3	7	193	3	127	3	11	7	53	.	3	79	3	89	149	3	61	3
35	.	3	7	3	19	29	17	.	3	13	3	131	11	3	41	3	.	.	.	7
536	13	.	.	23	3	103	3	7	191	3	13	3	.	7	37	53	3	.	3	.
37	3	7	3	.	37	3	7	3	17	.	.	11	3	.	3	19	.	3	23	3
38	7	3	.	3	.	61	11	103	3	17	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.
39	.	163	79	.	3	7	3	29	31	3	7	3	23	37	.	13	3	.	3	11
0	3	191	3	.	7	3	13	3	139	23	17	41	3	.	3	7	.	3	47	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
541	.	7	61	11	3	53	3	13	.	3	113	3	7	.	43	.	3	29	3	173
42	3	67	3	151	23	3	.	3	59	13	211	7	3	193	3	73	11	3	17	3
43	13	3	11	3	.	7	29	.	3	.	3	11	.	3	67	3	7	31	.	17
44	.	.	41	.	3	.	3	.	.	3	37	3	13	29	.	7	3	.	3	.
45	3	.	3	7	19	3	.	3	.	7	11	31	3	23	3	.	.	3	.	3
546	.	3	7	3	97	13	.	193	3	.	3	.	.	3	11	3	101	53	.	7
47	19	11	227	.	3	.	3	7	.	3	.	3	229	7	127	19	3	13	3	53
48	3	7	3	23	59	3	7	3	13	73	109	.	3	.	3	29	173	3	13	3
49	7	3	.	3	43	89	.	.	3	11	3	7	163	3	137	3	.	7	23	.
50	.	13	67	.	3	7	3	37	.	3	7	3	113	11	47	23	3	19	3	.
551	3	.	3	.	7	3	.	3	11	199	.	29	3	13	3	7	67	3	.	3
52	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3	37	.	101	.
53	17	29	7	19	3	.	3	11	7	3	61	3	.	.	.	.	3	.	3	7
54	3	17	3	67	.	3	151	3	157	19	43	11	3	7	3	.	.	3	7	3
55	.	3	47	3	.	43	7	59	3	13	3	.	7	3	19	3	.	67	.	13
556	7	.	17	.	3	19	3	.	.	3	11	3	.	.	23	.	3	7	3	11
57	3	53	3	17	.	3	.	3	.	103	7	23	3	.	3	139	7	3	107	3
58	41	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	31	3	.	3	19	.	11	.
59	.	.	37	7	3	11	3	199	.	3	.	3	.	.	7	13	3	43	3	.
60	3	.	3	.	79	3	13	3	7	11	179	43	3	137	3	.	.	3	41	3
561	.	3	19	3	11	.	17	7	3	.	3	37	.	3	73	3	31	23	7	.
62	43	7	.	.	3	67	3	17	11	3	59	3	7	53	.	.	3	11	3	.
63	3	13	3	11	.	3	199	3	17	151	23	7	3	.	3	53	103	3	29	3
64	.	3	13	3	19	7	.	11	3	17	3	73	.	3	.	3	7	.	47	19
65	.	.	11	.	3	31	3	.	29	3	.	3	.	.	13	7	3	.	3	193
566	3	23	3	7	.	5	11	3	41	7	17	.	3	.	3	11	13	3	37	3
67	.	3	7	3	.	.	43	13	3	131	3	17	.	3	.	3	23	179	.	7
68	79	43	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	11	113	5	.	3	13
69	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	.	3	17	3	97	.	3	11	3
70	7	3	109	3	47	11	23	19	3	127	3	7	13	3	.	3	.	7	.	89
571	11	17	.	13	3	7	3	.	239	3	7	3	.	19	17	.	3	.	3	.
72	3	.	3	19	7	3	29	3	.	.	89	151	3	11	3	7	.	3	19	3
73	.	3	17	3	223	37	13	31	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	.
74	61	137	7	11	3	.	3	67	7	3	.	3	11	79	19	71	3	17	3	7
75	3	.	3	131	17	3	113	3	97	23	.	.	3	7	3	163	11	3	7	3
576	.	3	11	3	53	17	7	157	3	29	3	11	7	3	.	3	.	59	17	.
77	7	19	13	.	3	.	3	.	197	3	.	3	.	13	.	11	3	7	3	17
78	3	.	3	.	13	3	17	3	67	53	7	.	3	151	3	.	7	3	.	3
79	.	3	79	3	7	29	.	17	3	.	3	53	19	3	11	3	13	.	.	167
80	31	11	19	7	3	.	3	13	17	3	.	3	.	131	7	127	3	.	3	.
581	3	97	3	.	.	3	89	3	7	13	37	.	3	61	3	47	53	3	.	3
82	11	3	.	3	.	23	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3	139	.	7	31
83	173	7	199	.	3	.	3	29	.	3	17	3	7	11	.	227	3	41	3	19
84	3	.	3	13	.	3	.	3	11	37	.	7	3	71	3	.	.	3	211	3
85	19	3	41	3	.	7	163	139	3	43	3	107	11	5	.	3	7	.	127	.
586	.	.	103	29	3	.	3	11	31	3	23	3	.	17	191	7	3	13	3	223
87	3	47	3	7	.	3	71	3	13	7	.	11	3	.	3	151	.	3	13	3
88	127	3	7	3	23	103	11	131	3	59	3	89	.	3	17	3	29	19	83	7
89	.	13	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	31	7	.	17	3	.	3	11
90	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	67	.	3	13	3	43	17	3	137	3
591	7	3	.	3	13	.	31	.	3	.	3	7	29	3	13	3	.	7	11	.
92	53	73	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	61	.	37	.	3	.	3	179
93	3	31	3	127	7	3	23	3	137	11	41	79	3	.	3	7	.	3	17	3
94	191	3	.	3	11	19	.	.	3	7	3	67	103	3	7	3	.	.	.	13
95	13	157	7	.	3	.	3	53	7	3	13	3	59	37	29	.	3	11	3	7
596	3	19	3	11	.	3	.	3	.	109	.	.	3	7	3	23	19	3	7	3
97	227	3	.	3	29	211	7	11	3	.	3	.	7	3	31	3	11	.	.	149
98	7	79	11	.	3	13	3	41	163	3	29	3	19	.	53	13	3	7	3	97
99	3	37	3	139	181	3	11	3	.	31	7	.	3	73	3	11	7	3	151	3
600	29	3	23	3	7	.	.	47	3	193	3	.	173	3	.	3	.	97	13	11
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
541	.	3	31	3	41	.	.	19	3	7	3	17	.	3	7	3	47	.	11	83
42	.	227	7	29	3	11	3	.	7	3	.	3	17	19	.	233	3	.	3	7
43	3	13	3	19	.	3	.	3	.	11	.	13	3	7	3	157	109	3	7	3
44	17	3	13	3	11	107	7	.	3	19	3	157	7	3	23	3	29	.	.	.
45	7	17	89	.	3	.	3	197	11	3	.	3	.	.	13	79	3	7	3	71
546	3	31	3	11	47	3	.	3	23	.	7	.	3	149	3	17	7	3	83	3
47	.	3	17	3	7	23	.	11	3	.	3	.	29	3	.	3	11	157	37	.
48	.	19	11	7	3	83	3	.	37	3	.	3	.	71	7	131	3	17	3	13
49	3	179	3	.	17	3	11	3	7	.	13	.	3	.	3	11	127	3	43	3
50	.	3	.	3	.	17	53	7	3	.	3	.	13	3	31	3	89	37	7	11
551	131	7	19	13	3	.	3	43	.	3	23	3	7	139	11	229	3	97	3	17
52	3	11	3	.	73	3	17	3	19	31	167	7	3	59	3	13	.	3	11	3
53	.	3	197	3	23	7	13	17	3	.	3	79	.	3	97	3	7	13	31	.
54	11	23	.	31	3	37	3	.	13	3	29	3	109	113	.	7	3	211	3	19
55	3	73	3	7	11	3	181	3	61	7	149	.	3	11	3	.	23	3	53	3
556	19	3	7	3	.	.	.	179	3	.	3	13	.	3	233	3	.	11	.	7
57	197	127	13	11	3	.	3	7	43	3	17	3	11	7	.	47	3	.	3	.
58	3	7	3	83	13	3	7	3	.	59	71	17	3	29	3	.	11	3	.	3
59	7	3	11	3	107	191	.	97	3	223	3	7	17	3	.	3	13	7	.	29
60	23	.	29	61	3	7	3	13	47	3	7	3	.	17	.	11	3	.	3	.
561	3	233	3	89	7	3	.	3	.	13	11	.	3	19	3	7	83	3	.	3
62	13	3	101	3	127	.	.	.	3	7	3	167	23	3	7	3	181	41	19	.
63	37	11	7	.	3	157	3	.	7	3	.	3	13	.	113	17	3	.	3	7
64	3	.	3	13	131	3	.	3	149	.	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3
65	11	3	23	3	163	13	7	.	3	11	3	29	7	3	71	3	.	17	.	.
566	7	181	53	.	3	.	3	61	.	3	19	3	.	11	.	83	3	7	3	31
67	3	19	3	211	31	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	109	7	3	13	3
68	139	3	.	3	7	101	19	29	3	.	3	23	11	3	163	3	.	.	.	17
69	.	13	.	7	3	.	3	11	23	3	227	3	19	.	7	.	3	.	3	.
70	3	59	3	.	43	3	149	3	7	.	.	11	3	19	3	.	37	3	.	3
571	67	3	61	3	13	.	11	7	3	.	3	.	211	3	13	3	.	.	7	47
72	.	7	31	.	3	173	3	.	.	3	11	3	7	.	.	59	3	23	3	11
73	3	83	3	41	19	3	.	3	103	.	181	7	3	.	3	.	29	3	.	3
74	73	3	.	3	37	7	.	101	3	13	3	229	47	3	.	3	7	.	11	13
75	13	67	.	.	3	11	3	23	.	3	13	3	71	89	.	7	3	.	3	239
576	3	.	3	7	23	3	.	3	101	7	137	.	3	37	3	.	31	3	.	3
77	.	3	7	3	11	47	61	41	3	.	3	19	.	3	.	3	.	.	29	7
78	17	.	47	.	3	13	3	7	11	3	31	3	.	7	107	13	3	11	3	.
79	3	7	3	11	149	3	7	3	29	.	.	37	3	23	3	103	.	3	59	3
80	7	3	.	3	.	51	.	11	3	.	3	7	241	3	29	3	11	7	13	.
581	.	.	11	19	3	7	3	.	.	3	7	3	73	83	31	.	3	.	3	.
82	3	13	3	17	7	3	11	3	.	19	101	13	3	167	3	7	71	3	97	3
83	23	3	13	3	17	.	.	.	3	7	3	.	79	3	7	3	.	.	23	11
84	.	.	7	53	3	17	3	59	7	3	.	3	.	233	11	23	3	29	3	7
85	3	11	3	31	157	3	.	3	37	.	19	.	3	7	3	41	13	3	7	3
586	89	3	.	3	.	11	7	13	3	23	3	.	7	3	.	3	19	.	79	.
87	7	41	.	67	3	.	3	17	.	3	53	3	43	29	.	.	3	7	3	13
88	3	229	3	71	11	3	37	3	17	113	7	97	3	11	3	.	7	3	.	3
89	167	3	19	3	7	.	.	109	3	17	3	.	13	3	61	3	.	11	.	41
90	.	.	73	7	3	.	3	.	19	3	.	3	11	.	7	37	3	.	3	113
591	3	149	3	.	67	3	.	3	7	47	17	23	3	.	3	13	11	3	.	3
92	193	3	11	3	19	.	13	7	3	.	3	11	.	3	101	3	211	13	7	19
93	.	7	.	.	3	23	3	.	13	3	.	3	7	43	.	11	3	.	3	.
94	3	.	3	37	97	3	.	3	.	.	11	7	3	17	3	19	41	3	.	3
95	17	3	.	3	.	7	.	71	3	41	3	13	.	3	11	3	7	23	61	107
596	.	11	13	.	3	.	3	.	.	3	83	3	37	13	17	7	3	.	3	.
97	3	.	3	7	13	3	59	3	.	7	23	.	3	191	3	17	.	3	.	3
98	11	3	7	3	31	.	131	19	3	11	3	.	233	3	.	3	13	101	89	7
99	.	167	.	17	3	61	3	7	.	3	37	3	.	7	223	239	3	17	3	.
600	3	7	3	19	17	3	7	3	11	13	.	73	3	.	3	.	.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
601	.	.	.	7	3	47	3	79	59	3	.	3	157	.	7	.	3	137	3	.
02	3	11	3	.	19	3	.	3	7	.	229	13	3	29	3	59	107	3	11	3
03	47	3	13	3	41	11	.	7	3	179	3	23	.	3	.	3	83	.	7	29
04	11	7	29	193	3	.	3	31	23	3	.	3	7	223	13	19	3	.	3	.
05	3	17	3	.	11	3	73	3	.	29	.	7	3	11	3		13	3	191	3
606	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	19	.	3	.	3	7	11	.	.
07	101	.	17	11	3	109	3	.	41	3	.	3	11	.	.	7	3	19	3	13
08	3	41	3	7	.	3	61	3	.	7	13	59	3	127	3	83	11	3	71	3
09	.	3	7	3	17	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	149	.	59	7
10	.	53	.	13	3	17	3	7	139	3	.	3	.	7	67	11	3	.	3	41
611	3	7	3	53	23	3	7	3	.	19	11	.	3	113	3	13	.	3	47	3
12	7	3	97	3	.	41	13	29	3	.	3	7	.	3	11	3	47	7	73	23
13	59	11	101	37	3	7	3	17	13	3	7	3	.	.	83	.	3	.	3	31
14	3	.	3	.	7	3	.	3	17	239	19	47	3	23	3	7	.	3	43	3
15	11	3	.	3	.	137	227	.	3	7	3	13	37	3	7	3	19	.	.	61
616	229	.	7	.	3	.	3	43	7	3	.	3	.	11	.	53	3	.	3	7
17	3	.	3	23	13	3	.	3	11	.	17	.	3	7	3	107	29	3	7	3
18	23	3	19	3	113	.	7	.	3	211	3	17	7	3	.	3	13	.	23	127
19	7	103	31	.	3	101	3	11	19	3	.	3	17	.	241	23	3	7	3	.
20	3	.	3	59	.	3	.	3	109	13	7	11	3	17	3	.	7	3	.	3
621	13	3	173	3	7	179	11	.	3	23	3	.	.	3	.	3	.	.	29	19
22	.	17	.	7	3	.	3	.	43	3	11	3	13	.	7	109	3	67	3	11
23	3	.	3	13	.	3	101	3	7	.	.	157	3	83	3	17	31	3	.	3
24	.	3	17	3	139	13	.	7	3	.	3	163	149	3	29	3	17	41	7	197
25	.	7	.	17	3	11	3	101	103	3	31	3	7	.	23	.	3	13	3	.
626	3	.	3	137	17	3	.	3	13	11	.	7	3	.	3	.	37	3	13	3
27	.	3	73	3	11	7	59	19	3	.	3	149	.	3	43	3	7	.	17	131
28	.	13	181	107	3	23	3	.	11	3	.	3	83	19	31	7	3	11	3	17
29	3	.	3	7	53	3	17	3	.	7	.	.	3	13	3	.	113	3	19	3
30	251	3	7	3	13	61	29	11	3	19	3	.	.	3	13	3	11	23	67	7
631	89	.	11	223	3	.	3	7	17	3	.	3	.	7	19	103	3	233	3	.
32	3	7	3	31	.	3	7	3	191	17	23	53	3	37	3	11	.	3	.	3
33	7	3	29	3	.	.	.	23	3	13	3	7	.	3	.	3	97	7	.	11
34	13	19	163	.	3	7	3	.	.	3	7	3	137	229	11	.	3	.	3	67
35	3	11	3	41	7	3	19	3	.	139	.	17	3	.	3	7	.	3	11	3
636	.	3	.	3	.	11	.	113	3	7	3	.	17	3	7	3	23	31	.	.
37	11	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	101	17	.	13	3	.	3	7
38	3	.	3	.	11	3	13	3	19	.	83	29	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	.	3	79	.	7	41	3	97	3	.	7	3	17	3	43	11	13	.
40	7	29	.	11	3	.	3	.	73	3	43	3	11	.	.	17	3	7	3	19
641	3	13	3	.	61	3	97	3	37	.	7	13	3	59	3	31	7	3	23	3
42	19	3	11	3	7	157	.	149	3	.	3	11	.	3	.	3	227	17	41	47
43	.	.	107	7	3	73	3	.	131	3	.	3	23	.	7	11	3	37	3	229
44	3	.	3	29	41	3	37	3	7	23	11	19	3	.	3	.	13	3	17	3
45	53	3	251	3	31	.	149	7	3	113	3	173	47	3	11	3	233	19	7	17
646	.	7	23	.	3	.	3	19		3	.	3	7	.	109	37	3	127	3	13
47	3	89	3	.	163	3	.	3	61	59	13	7	3	19	3	41	101	3	.	3
48	11	3	229	3	.	7	.	53	3	11	3	241	13	3	23	3	7	61	19	
49	.	41	47	13	3	139	3	.	.	3	.	3	29	11	.	7	3	101	3	107
50	3	.	3	7	.	3	79	3	11	7	.	.	3	.	3	13	193	3	29	3
651	.	3	7	3	.	19	13	.	3	.	3	.	11	3	53	3	.	13	.	7
52	113	.	197	61	3	.	3	7	13	3	19	3	37	7	89	.	3	53	3	71
53	3	7	3	.	241	3	7	3	83	.	.	11	3	79	3	223	19	3	101	3
54	7	3	.	3	149	.	11	.	3	.	3	7	59	3	.	3	31	7	.	.
55	17	31	13	109	3	7	3	.	.	3	7	3	19	13	.	.	3	.	3	11
656	3	17	3	.	7	3	.	3	211	137	29	.	3	.	3	7	41	3	.	3
57	.	3	.	3	23	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	13	29	11	37
58	29	23	7	.	3	11	3	13	7	3	.	3	.	43	.	.	3	.	3	7
59	3	59	3	17	19	3	29	3	.	11	.	.	3	7	3	233	23	3	7	3
60	13	3	149	3	11	251	7	107	3	103	3	.	7	3	.	3	.	211	.	257
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
601	7	3	43	3	.	17	.	.	3	19	3	7	11	3	139	3	23	7	17	37
02	.	89	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	13	23	19	.	3	.	3	17
03	3	.	3	13	7	3	17	3	73	.	173	11	3	.	3	7	131	3	.	3
04	61	3	.	3	103	13	11	17	3	7	3	197	31	3	7	3	241	.	.	101
05	151	19	7	23	3	71	3	37	7	3	11	3	29	47	43	.	3	13	3	7
606	3	131	3	.	.	3	19	3	13	17	47	.	3	7	3	.	137	3	7	3
07	79	3	.	3	.	.	7	67	3	.	3	.	7	3	89	3	31	.	11	163
08	7	13	19	.	3	11	3	.	29	3	17	3	23	107	.	.	3	7	3	.
09	3	.	3	47	.	3	41	3	19	11	7	17	3	13	3	71	7	3	181	3
10	.	3	.	3	7	227	79	173	3	157	3	163	17	3	13	3	.	199	107	.
611	.	.	23	7	3	31	3	.	11	3	131	3	193	17	7	43	3	11	3	19
12	3	.	3	11	.	3	197	3	7	71	29	233	3	.	3	167	.	3	.	3
13	19	3	.	3	43	.	109	7	3	13	3	.	.	3	17	3	11	29	7	13
14	13	7	11	41	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	89
15	3	.	3	.	.	3	11	3	23	67	139	7	3	.	3	11	17	3	31	3
616	.	3	.	3	197	7	.	83	3	.	3	37	.	3	.	3	7	17	103	11
17	.	37	.	151	3	13	3	19	223	3	163	3	.	31	11	7	3	61	3	29
18	3	11	3	7	.	3	13	3	.	7	43	.	3	19	3	199	59	3	11	3
19	41	3	7	3	.	11	.	31	3	29	3	.	.	3	.	3	.	47	13	7
20	11	.	.	229	3	53	3	7	.	3	23	3	.	7	47	29	3	31	3	.
621	3	7	3	61	11	3	7	3	.	79	97	13	3	11	3	.	.	3	37	3
22	7	3	13	3	23	19	71	73	3	.	3	7	61	3	199	3	167	7	.	.
23	.	23	127	11	3	7	3	47	97	3	7	3	11	.	13	89	3	43	3	23
24	3	19	3	.	7	3	.	3	179	.	.	43	3	.	3	7	11	3	.	3
25	71	3	11	3	73	.	19	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	53	.	59
626	31	.	7	.	3	223	3	29	7	3	233	3	19	.	.	11	3	71	3	7
27	3	.	3	97	.	3	23	3	41	.	11	67	3	7	3	37	.	3	7	3
28	.	3	239	3	.	37	7	.	3	.	3	227	7	3	11	3	61	109	.	31
29	7	11	157	13	3	79	3	.	.	3	71	3	.	.	.	.	3	7	3	73
30	3	17	3	.	19	3	.	3	59	.	7	.	3	199	3	13	7	3	.	3
631	11	3	137	3	7	83	13	181	3	11	3	.	23	3	179	3	29	13	.	.
32	19	43	17	7	3	41	3	151	13	3	.	3	.	11	7	19	3	167	3	.
33	3	.	3	17	.	3	.	3	7	127	.	61	3	241	3	.	.	3	.	3
34	107	3	23	3	17	.	.	7	3	.	3	13	11	3	.	3	173	.	7	.
35	103	7	13	.	3	17	3	11	151	3	.	3	7	13	.	.	3	19	3	.
636	3	53	3	.	13	3	.	3	.	41	37	7	3	43	3	.	.	3	.	3
37	37	3	103	3	.	7	11	43	3	.	3	23	.	3	227	3	7	.	131	.
38	67	.	.	19	3	.	3	13	23	3	11	3	127	193	29	7	3	181	3	11
39	3	31	3	7	167	3	47	3	17	7	.	137	3	109	3	61	89	3	.	3
40	13	3	7	3	29	.	.	79	3	17	3	139	.	3	19	3	.	107	11	7
641	.	.	.	83	3	11	3	7	.	3	29	3	13	7	.	.	3	23	3	43
42	3	7	3	13	179	3	7	3	.	11	17	.	3	.	3	53	239	3	113	3
43	7	3	139	3	11	13	191	59	3	.	3	7	.	3	31	3	19	7	71	.
44	.	.	43	73	3	7	3	23	11	3	7	3	17	.	59	.	3	11	3	.
45	3	.	3	11	7	3	.	3	13	3	.	.	3	17	3	7	.	3	13	3
646	17	3	19	3	.	.	.	11	3	7	3	.	71	3	7	3	11	.	31	23
47	73	13	7	31	3	.	3	239	7	3	211	3	.	.	17	67	3	.	3	7
48	3	.	3	79	37	3	11	3	.	29	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3
49	.	3	17	3	13	167	7	.	3	43	3	181	7	3	13	3	17	103	.	11
50	7	.	67	17	3	.	3	31	.	3	59	3	151	37	11	.	3	7	3	.
651	3	11	3	23	17	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	19	7	3	11	3
52	23	3	.	3	7	11	.	.	3	13	3	29	97	3	.	3	109	.	17	13
53	11	.	.	7	3	163	3	131	.	3	13	3	.	151	7	23	3	.	3	17
54	3	29	3	67	11	3	17	3	7	233	41	.	3	11	3	43	79	3	.	3
55	.	3	.	3	53	.	173	7	3	23	3	.	.	3	.	3	107	11	7	.
656	.	7	.	11	3	13	3	97	17	3	.	3	7	19	.	13	3	179	3	.
57	3	47	3	19	.	3	13	3	89	17	.	7	3	157	3	.	11	3	19	3
58	.	3	11	3	67	7	.	199	3	19	3	11	.	3	41	3	7	131	13	.
59	.	101	.	71	3	.	3	41	37	3	17	3	.	.	19	7	3	.	3	31
60	3	13	3	7	31	3	.	3	.	7	11	13	3	.	3	.	29	3	157	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
661	7	.	.	.	3	17	3	37	11	3	89	3	13	41	.	19	3	7	3	29
62	3	239	3	11	73	3	23	3	.	47	7	103	3	107	3	.	7	3	31	3
63	.	3	61	3	7	13	17	11	3	29	3	19	113	3	.	3	11	.	.	43
64	23	.	11	7	3	.	3	17	127	3	181	3	.	31	7	29	3	13	3	.
65	3	73	3	.	227	3	11	3	7	.	71	.	3	.	3	11	.	3	13	3
666	.	3	43	3	59	29	.	7	3	17	3	.	23	3	37	3	103	.	7	11
67	.	7	41	19	3	.	3	137	.	3	53	3	7	.	11	.	3	31	3	.
68	3	11	3	.	71	3	109	3	.	19	17	7	3	13	3	89	.	3	11	3
69	149	3	23	3	13	7	61	.	3	.	3	17	.	3	13	3	7	.	.	.
70	11	.	37	113	3	19	3	29	.	3	97	3	17	.	43	7	3	.	3	.
671	3	.	3	7	11	3	41	3	.	7	19	.	3	11	3	.	.	3	83	3
72	17	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	23	.	3	71	3	19	11	.	7
73	13	17	.	11	3	83	3	7	23	3	13	3	11	7	17	.	3	.	3	.
74	3	7	3	.	.	3	7	3	.	191	.	.	3	.	3	17	11	3	.	3
75	7	3	11	3	.	181	107	251	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	.	31
676	.	67	.	17	3	7	3	.	19	3	7	3	.	47	239	11	3	17	3	61
77	3	79	3	.	7	3	13	3	241	.	11	89	3	.	3	7	.	3	37	3
78	.	3	.	3	19	17	73	.	3	7	3	.	29	3	7	3	179	.	13	19
79	.	11	7	59	3	113	3	23	7	3	.	3	.	.	41	.	3	.	3	7
80	3	13	3	47	23	3	17	3	251	.	59	13	3	7	3	19	.	3	7	3
681	11	3	13	3	.	.	7	17	3	11	3	193	7	3	61	3	.	83	.	23
82	7	241	.	.	3	.	3	.	17	3	.	3	31	11	13	.	3	7	3	139
83	3	167	3	83	.	3	53	3	11	17	7	.	3	23	3	37	7	3	41	3
84	73	3	67	3	7	37	31	13	3	53	3	41	11	3	.	3	89	.	.	.
85	.	61	.	7	3	131	3	11	.	3	17	3	.	19	7	.	3	.	3	13
686	3	31	3	19	.	3	59	3	7	163	13	11	3	.	3	.	83	3	19	3
87	23	3	127	3	.	.	11	7	3	19	3	.	13	3	.	3	53	.	7	.
88	107	7	83	13	3	.	3	.	.	3	11	3	7	17	19	23	3	43	3	11
89	3	.	3	.	137	3	.	3	41	157	.	7	3	29	3	13	71	3	.	3
90	.	3	151	3	.	7	13	.	3	23	3	.	.	3	17	3	7	13	11	29
691	43	19	29	.	3	11	3	.	13	3	.	3	73	257	47	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	67	3	19	3	.	7	37	107	3	.	3	.	17	3	.	3
93	37	3	7	3	11	.	.	103	3	181	3	13	19	3	.	3	.	17	31	7
94	.	.	13	31	3	41	3	7	11	3	.	3	.	7	23	.	3	11	3	37
95	3	7	3	11	13	3	7	3	19	37	251	23	3	31	3	.	197	3	17	3
696	7	3	47	3	151	67	43	11	3	.	3	7	179	3	83	3	11	7	257	17
97	47	43	11	.	3	7	3	13	113	3	7	3	103	137	.	.	3	97	3	19
98	3	29	3	.	7	3	11	3	.	13	.	.	3	.	3	7	211	3	.	3
99	13	3	53	3	.	151	139	29	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	113	11
700	.	.	7	.	3	53	3	.	7	3	239	3	13	59	11	.	3	89	3	7
701	3	11	3	13	.	3	.	3	.	.	23	19	3	7	3	.	.	3	7	3
02	.	3	.	3	61	11	7	23	3	.	3	.	7	3	.	3	.	19	199	.
03	7	229	167	.	3	.	3	19	.	3	.	3	53	61	37	31	3	7	3	103
04	3	23	3	181	11	3	67	3	13	.	7	.	3	11	3	.	7	3	13	3
05	.	3	.	3	7	107	151	97	3	109	3	.	251	3	.	3	23	11	19	.
706	17	13	.	7	3	241	3	.	.	3	.	3	11	23	7	.	3	41	3	31
07	3	17	3	.	31	3	.	3	7	197	107	.	3	13	3	127	11	3	263	3
08	101	3	11	3	13	19	23	7	3	.	3	11	193	3	13	3	.	.	7	.
09	.	7	17	23	3	.	3	.	.	3	19	3	7	89	.	11	3	61	3	.
10	3	19	3	17	.	3	47	3	29	.	11	7	3	251	3	.	19	3	23	3
711	97	3	211	3	17	7	19	.	3	13	3	.	83	3	11	3	7	.	.	13
12	13	11	31	.	3	17	3	229	67	3	13	3	19	.	.	7	3	191	3	.
13	3	113	3	7	29	3	.	3	73	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
14	11	3	7	3	.	.	17	.	3	11	3	.	61	3	.	3	199	.	37	7
15	127	.	23	43	3	13	3	7	37	3	.	3	233	7	.	13	3	29	3	.
716	3	7	3	101	19	3	7	3	11	67	41	83	3	.	3	71	31	3	.	3
17	7	3	.	3	.	.	29	.	3	17	3	7	11	3	23	3	.	7	13	157
18	19	59	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	109	29	.	19	43	.	3	.
19	3	13	3	.	7	3	.	3	23	71	17	11	3	.	3	7	.	3	.	3
20	89	3	13	3	107	23	11	.	3	7	3	17	.	3	7	3	61	.	.	109
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
661	83	3	7	3	.	109	127	.	3	.	3	.	17	3	11	3	.	37	53	7
62	97	11	59	173	3	23	3	7	.	3	191	3	79	7	13	151	3	.	3	167
63	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	.	41	3	.	3	197	13	3	67	3
64	7	3	.	3	41	.	.	13	3	11	3	7	19	3	17	3	.	7	29	.
65	61	.	19	101	3	7	3	.	.	3	7	3	139	11	.	17	3	.	3	13
666	3	.	3	191	7	3	163	3	11	61	13	131	3	.	3	7	17	3	.	3
67	.	3	241	3	101	.	179	23	3	7	3	43	11	3	7	3	.	17	.	67
68	.	.	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3	47	.	211	.	3	151	3	7
69	3	23	3	.	29	3	167	3	193	.	.	11	3	7	3	13	31	3	7	3
70	19	3	.	3	.	199	7	47	3	.	3	.	7	3	73	3	23	13	229	17
671	7	.	.	239	3	47	3	.	13	3	11	3	.	23	.	.	3	7	3	11
72	3	109	3	103	.	3	137	3	.	.	7	19	3	61	3	.	7	3	173	3
73	47	3	193	3	7	31	23	.	3	89	3	13	43	3	79	3	.	19	11	.
74	37	.	13	7	3	11	3	19	109	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	.
75	3	43	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	.	257	3	23	3
676	.	3	29	3	11	71	157	7	3	31	3	.	53	3	113	3	13	139	7	.
77	.	7	.	.	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	53	.	3	11	3	151
78	3	.	3	11	79	3	.	3	67	13	103	7	3	.	3	29	.	3	43	3
79	13	3	.	3	.	7	.	11	3	101	3	.	157	3	.	3	7	.	97	53
80	17	.	11	.	3	29	3	43	.	3	19	3	13	103	.	7	3	149	3	.
681	3	17	3	7	.	3	11	3	.	7	79	29	3	41	3	11	19	3	47	3
82	131	3	7	3	.	13	19	233	3	67	3	.	.	3	23	3	47	31	163	7
83	.	29	17	197	3	137	3	7	.	3	101	3	19	7	11	.	3	13	3	.
84	3	7	3	17	223	3	7	3	13	.	.	31	3	.	3	.	.	3	11	3
85	7	3	179	3	17	11	.	191	3	47	3	7	.	3	107	3	113	7	.	181
686	11	13	71	.	3	7	3	.	43	3	7	3	173	.	.	149	3	73	3	.
87	3	197	3	29	7	3	.	3	.	97	.	109	3	11	3	7	.	3	89	3
88	31	3	37	3	13	.	17	61	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.
89	19	53	7	11	3	.	3	17	7	3	23	3	11	101	149	19	3	.	3	7
90	3	199	3	53	.	3	.	3	17	.	67	37	3	7	3	59	11	3	7	3
691	.	3	11	3	23	.	7	263	3	13	3	11	7	3	43	3	.	.	.	13
92	7	23	.	.	3	.	3	113	53	3	13	3	29	79	193	11	3	7	3	23
93	3	223	3	43	139	3	71	3	.	173	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3
94	199	3	.	3	7	.	.	127	3	.	3	17	.	3	11	3	.	.	.	.
95	157	11	.	7	3	13	3	73	29	3	41	3	17	149	7	13	3	.	3	79
696	3	.	3	41	.	3	13	3	7	19	.	59	3	17	3	227	.	3	.	3
97	11	3	79	3	.	.	.	7	3	11	3	.	31	3	19	3	101	71	7	223
98	23	7	.	.	3	19	3	109	107	3	.	3	7	11	17	47	3	37	3	.
99	3	13	3	.	43	3	31	3	11	167	19	7	3	47	3	17	.	3	.	3
700	.	3	13	3	.	7	.	41	3	79	3	.	11	3	109	3	7	29	191	.
701	29	31	.	17	3	.	3	11	47	3	.	3	.	.	13	7	3	17	3	.
02	3	163	3	7	17	3	29	3	.	7	31	11	3	67	3	.	13	3	.	3
03	.	3	7	3	71	17	11	13	3	.	3	.	.	3	59	3	43	.	17	7
04	.	47	.	.	3	31	3	7	19	3	11	3	.	7	.	.	3	157	3	11
05	3	7	3	37	41	3	7	3	.	.	13	163	3	.	3	.	73	3	227	3
706	7	3	.	3	19	.	.	17	3	29	3	7	13	3	.	3	223	7	11	19
07	139	.	173	13	3	7	3	.	17	3	7	3	37	.	71	29	3	.	3	83
08	3	.	3	59	7	3	.	3	131	11	.	.	3	73	3	7	.	3	31	3
09	.	3	.	3	11	29	13	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	.	.
10	227	41	7	.	3	179	3	.	7	3	17	3	.	31	67	.	3	11	3	7
711	3	.	3	11	.	3	.	3	.	103	109	17	3	7	3	257	.	3	7	3
12	43	3	.	3	.	.	7	11	3	263	3	13	7	3	.	3	11	.	83	37
13	7	.	11	.	3	.	3	23	149	3	137	3	41	13	.	.	3	7	3	.
14	3	.	3	19	13	3	11	3	.	.	7	.	3	.	3	11	7	3	19	3
15	.	3	163	3	7	.	59	.	3	19	3	31	47	3	17	3	13	.	.	11
716	137	79	131	7	3	.	3	13	.	3	229	3	43	97	7	17	3	.	3	.
17	3	11	3	73	.	3	43	3	7	13	.	179	3	23	3	.	17	3	11	3
18	13	3	181	3	.	11	.	7	3	41	3	.	.	3	.	3	29	17	7	.
19	11	7	47	227	3	.	3	79	.	3	167	3	7	.	.	193	3	.	3	.
20	3	.	3	13	11	3	19	3	97	.	.	7	3	11	3	.	.	3	17	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
721	•	•	7	•	3	37	3	41	7	3	11	3	17	53	13	•	3	19	3	7
22	3	103	3	163	•	3	257	3	•	•	•	•	3	7	3	29	13	3	7	3
23	17	3	•	3	167	•	7	13	3	31	3	151	7	3	•	3	•	73	11	71
24	7	17	61	19	3	11	3	139	•	3	23	3	•	113	17	107	3	7	3	13
25	3	•	3	31	59	3	127	3	47	11	7	29	3	•	3	17	7	3	•	3
726	79	3	17	3	7	•	•	101	3	•	3	59	13	3	19	3	17	•	•	•
27	•	23	•	7	3	19	3	•	11	3	•	3	257	•	7	•	3	11	3	23
28	3	47	3	11	17	3	•	3	7	•	19	67	3	173	3	13	23	3	97	3
29	•	3	•	3	•	17	13	7	3	•	3	233	•	3	•	3	11	13	7	•
30	37	7	11	•	3	•	3	•	13	3	103	3	7	199	•	•	3	•	3	17
731	3	41	3	29	113	3	11	3	•	83	•	7	3	•	3	11	•	3	193	3
32	71	3	19	3	179	7	211	17	3	37	3	13	67	3	•	3	7	•	89	11
33	23	•	13	•	3	167	3	157	17	3	•	3	•	13	11	7	3	71	3	41
34	3	11	3	7	13	3	•	3	•	7	101	97	3	•	3	23	271	3	11	3
35	31	3	7	3	19	11	•	37	3	•	3	•	23	3	151	3	13	251	•	7
736	11	89	•	•	3	•	3	7	83	3	17	3	29	7	•	211	3	•	3	47
37	3	7	3	•	11	3	7	3	•	13	•	17	3	11	3	19	37	3	29	3
38	7	3	23	3	31	223	97	•	3	•	3	7	17	3	47	3	41	7	•	•
39	67	263	•	11	3	7	3	193	29	3	7	3	11	17	107	•	3	•	3	73
40	3	43	3	13	7	3	•	3	•	79	•	181	3	101	3	7	11	3	•	3
741	•	3	11	3	37	13	137	19	3	7	3	11	•	3	7	3	151	•	53	•
42	•	•	7	•	3	47	3	•	7	3	199	3	•	19	61	11	3	13	3	7
43	3	67	3	19	•	3	•	3	13	•	11	239	3	7	3	79	17	3	7	3
44	47	3	37	3	•	•	7	•	3	19	3	263	7	3	11	3	•	17	109	•
45	7	11	•	•	3	269	3	43	•	3	•	3	•	73	19	131	3	7	3	127
746	3	61	3	•	•	3	29	3	71	•	7	37	3	13	3	101	7	3	17	3
47	11	3	•	3	7	•	•	•	3	11	3	•	•	3	13	3	31	41	•	17
48	131	19	239	7	3	79	3	23	•	3	•	3	•	11	7	67	3	•	3	29
49	3	•	3	173	23	3	19	3	7	•	31	•	3	•	3	137	•	3	149	3
50	179	3	107	3	•	•	•	7	3	13	3	•	11	3	•	3	•	101	7	13
751	13	7	19	•	3	31	3	11	43	3	13	3	7	•	227	29	3	163	3	•
52	3	157	3	•	•	3	•	3	19	•	•	7	3	23	3	•	67	3	47	3
53	257	3	•	3	127	7	11	109	3	•	3	•	71	3	•	3	7	59	•	151
54	•	•	•	73	3	13	3	53	199	3	11	3	•	241	•	7	3	37	3	11
55	3	•	3	7	•	3	13	3	•	7	•	47	3	•	3	•	•	3	31	3
756	19	3	7	3	•	83	•	•	3	47	3	•	53	3	43	3	•	67	11	7
57	17	•	•	•	3	11	3	7	•	3	41	3	•	7	53	23	3	•	3	211
58	3	7	3	41	47	3	7	3	•	11	191	13	3	•	3	181	149	3	73	3
59	7	3	13	3	11	•	89	31	3	23	3	7	•	3	•	3	•	7	173	53
60	•	•	17	29	3	7	3	19	11	3	7	3	•	139	13	•	3	11	3	113
761	3	•	3	11	7	3	103	3	163	•	269	•	3	19	3	7	13	3	•	3
62	181	3	•	3	17	•	199	11	3	7	3	31	•	3	7	3	11	•	19	•
63	41	•	7	137	3	17	3	167	7	3	127	3	37	•	23	97	3	•	3	7
64	3	•	3	109	43	3	11	3	•	•	13	23	3	7	3	11	•	3	7	3
65	113	3	•	3	•	19	7	•	3	59	3	103	7	3	•	3	•	•	41	11
766	7	•	•	13	3	23	3	17	193	3	19	3	•	197	11	173	3	7	3	•
67	3	11	3	79	41	3	•	3	17	73	7	277	3	•	3	13	7	3	11	3
68	•	3	89	3	7	11	13	•	3	17	3	•	•	3	•	3	43	13	•	31
69	11	53	•	7	3	•	3	•	13	3	43	3	19	107	7	47	3	•	3	•
70	3	•	3	53	11	3	•	3	7	•	17	•	3	11	3	41	•	3	•	3
771	•	3	83	3	29	59	67	7	3	233	3	13	137	3	•	3	•	11	7	179
72	•	7	43	11	3	•	3	37	31	3	29	3	7	13	•	•	3	•	3	•
73	3	23	3	97	13	3	•	3	167	•	53	7	3	17	3	•	11	3	•	3
74	17	3	11	3	199	7	•	•	3	139	3	11	•	3	211	3	7	43	•	41
75	19	17	179	•	3	•	3	13	•	3	•	3	31	23	17	7	3	•	3	•
776	3	71	3	7	•	3	•	3	•	7	11	149	3	29	3	17	•	3	•	3
77	13	3	7	3	•	•	23	•	3	•	3	19	•	3	11	3	17	•	•	7
78	•	11	29	17	3	•	3	7	59	3	223	3	13	7	277	•	3	17	3	•
79	3	7	3	13	17	3	7	3	67	29	149	•	3	•	3	59	41	3	23	3
80	7	3	•	3	181	13	•	61	3	11	3	7	•	3	73	3	•	7	17	•
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
721	23	3	59	3	·	7	·	·	3	·	3	89	19	3	37	3	7	11	23	17
22	·	·	9	11	3	127	3	·	·	3	·	3	11	41	·	7	3	13	3	197
23	3	·	3	7	269	3	·	3	13	7	157	·	3	·	3	191	11	3	13	3
24	53	3	7	3	·	233	·	·	3	23	3	11	·	3	173	3	71	·	·	7
25	·	13	37	·	3	149	3	7	3	3	·	3	181	7	29	11	3	229	3	19
726	3	7	3	113	·	3	7	3	·	·	11	·	3	13	3	·	157	3	139	3
27	7	3	31	3	13	·	·	53	3	61	3	7	73	3	11	3	83	7	·	43
28	263	11	41	·	3	7	3	·	·	3	7	3	31	·	23	·	3	·	3	269
29	3	·	3	·	7	3	131	3	43	·	·	19	3	59	3	7	47	3	·	3
30	11	3	43	3	·	·	31	89	3	7	3	·	107	3	7	3	·	19	67	13
731	13	191	7	149	3	23	3	19	7	3	13	3	·	11	163	·	3	53	3	7
32	3	17	3	·	61	3	41	3	11	47	·	127	3	7	3	83	·	3	7	3
33	·	3	109	3	·	·	7	·	3	239	3	·	7	3	·	3	79	23	19	29
34	7	·	17	·	3	13	3	11	·	3	·	3	197	·	43	13	3	7	3	67
35	3	·	3	17	·	3	13	3	·	29	7	11	3	·	3	·	7	3	·	3
736	·	3	73	3	7	19	11	23	3	·	3	·	·	3	31	3	59	·	13	·
37	·	131	·	7	3	17	3	71	·	3	11	3	89	·	7	113	3	109	3	11
38	3	13	3	·	233	3	·	3	7	31	·	13	3	·	3	37	19	3	·	3
39	·	3	13	3	·	37	17	7	3	·	3	29	167	3	241	3	23	61	7	·
40	·	7	103	31	3	11	3	17	·	3	·	3	7	23	13	43	3	·	3	·
741	3	29	3	·	·	3	·	3	17	11	·	7	3	31	3	·	13	3	·	3
42	41	3	·	3	11	7	23	13	3	17	3	·	59	3	·	3	7	·	·	191
43	149	·	·	23	3	·	3	31	11	3	·	3	·	·	73	7	3	11	3	13
44	3	·	3	7	19	3	113	3	·	7	13	71	3	211	3	·	163	3	23	3
45	·	3	7	3	·	173	·	11	3	·	3	17	13	3	·	3	11	97	·	7
746	19	·	11	13	3	197	3	7	89	3	53	3	17	7	·	19	3	113	3	·
47	3	7	3	·	·	3	7	3	·	23	37	·	3	17	3	11	29	3	·	3
48	7	3	·	3	·	43	13	·	3	·	3	7	103	3	·	3	·	7	·	11
49	241	17	23	·	3	7	3	61	13	3	7	3	97	167	11	31	3	19	3	37
50	3	11	3	47	7	3	271	3	41	37	193	·	3	·	3	7	61	3	11	3
751	223	3	17	3	·	11	·	·	3	7	3	13	·	3	7	3	17	·	29	139
52	11	·	7	17	3	73	3	·	7	3	·	3	83	13	79	·	3	17	3	7
53	3	·	3	179	11	3	·	3	23	19	·	43	3	7	3	·	·	3	7	3
54	197	3	61	3	59	17	7	163	3	71	3	·	7	3	19	3	13	11	17	103
55	7	·	·	11	3	19	3	13	·	3	·	3	11	·	131	269	3	7	3	17
756	3	·	3	·	29	3	17	3	31	13	7	·	3	·	3	·	7	3	59	3
57	13	3	11	3	7	239	·	17	5	·	3	11	·	3	·	3	19	·	·	229
58	101	·	31	7	3	107	3	·	17	3	23	3	13	·	7	11	3	29	3	71
59	3	151	3	13	37	3	·	3	7	17	11	·	3	·	3	·	·	3	·	3
60	59	3	19	3	23	13	29	7	3	127	3	·	·	3	11	3	·	47	7	·
761	271	7	·	·	3	·	3	59	19	3	17	3	7	29	47	61	3	13	3	23
62	3	·	3	·	·	3	53	3	13	89	83	7	3	·	3	·	23	3	13	3
63	11	3	29	3	19	7	·	·	3	11	3	·	17	3	·	3	7	79	241	19
64	89	13	101	157	3	·	3	47	·	3	31	3	·	11	·	7	3	·	3	227
65	3	37	3	7	·	3	23	3	11	7	73	·	3	13	3	19	191	3	·	3
766	·	3	7	3	13	31	·	43	3	·	3	·	11	3	13	3	53	271	·	7
67	23	·	·	59	3	29	3	7	·	3	·	3	·	7	31	17	3	41	3	61
68	3	7	3	151	101	3	7	3	·	·	59	11	3	·	3	23	17	3	131	3
69	7	3	4	3	·	·	11	19	3	13	3	7	23	3	167	3	·	7	37	13
70	13	29	25	263	3	7	3	·	37	3	7	3	·	19	157	127	3	·	3	11
771	3	·	3	19	7	3	·	3	·	229	71	113	3	79	3	7	·	3	17	3
72	67	3	23	3	·	·	·	·	3	7	3	·	109	3	7	3	·	37	11	17
73	·	103	7	·	3	11	3	·	7	3	·	3	223	·	19	13	3	193	3	7
74	3	73	3	29	71	3	13	3	·	11	·	·	3	7	3	·	·	3	7	3
75	·	3	·	3	11	·	7	·	3	·	3	23	7	3	·	3	·	31	13	73
776	7	19	79	·	3	37	3	101	11	3	173	3	·	131	·	·	3	7	3	·
77	3	13	3	11	·	3	19	3	83	·	7	13	3	·	3	107	7	3	·	3
78	127	3	13	3	7	·	·	11	3	43	3	47	19	3	71	3	11	·	61	·
79	·	137	11	7	3	53	3	·	103	3	·	3	29	·	7	167	3	23	3	·
80	3	89	3	·	251	3	11	3	7	101	163	·	3	113	3	11	13	3	29	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
781	.	83	37	19	3	7	3	191	.	3	7	3	23	11	.	.	3	13	3	17
82	3	.	3	197	7	3	17	3	11	19	137	.	3	.	3	7	.	3	13	3
83	.	3	.	3	.	71	.	17	3	7	3	29	11	3	7	3	.	157	.	47
84	.	13	7	89	3	19	3	11	7	3	.	3	107	41	.	.	3	47	3	7
85	3	29	3	.	.	3	.	3	233	17	19	11	3	7	3	.	.	3	7	3
786	83	3	.	3	13	127	7	29	3	.	3	61	7	3	13	3	19	.	31	.
87	7	211	.	31	3	.	3	223	.	3	11	3	131	43	.	71	3	7	3	11
88	3	.	3	.	53	3	269	3	23	.	7	17	3	31	3	.	7	3	37	3
89		3	19	3	7	23	53	.	3	13	3	.	17	3	193	3	.	89	11	13
90	13	199	41	7	3	11	3	31	19	3	13	3	.	17	7	.	3	.	3	137
791	3	.	3	239	.	3	61	3	7	11	67	53	3	.	3	.	29	3	.	3
92	.	3	103	3	11	113	37	7	3	227	3	.	.	3	17	3	.	109	7	19
93	.	7	71	.	3	13	3	.	11	3	23	3	7	.	.	13	3	11	3	.
94	3	271	3	11	.	3	13	3	43	.	.	7	3	.	3	19	17	3	53	3
95	107	3	43	3	23	7	131	11	3	281	3	67	.	3	.	3	7	17	13	.
796	.	23	11	.	3	.	3	103	.	3	.	3	.	.	97	7	3	73	3	23
97	3	13	3	7	79	3	11	3	29	7	61	13	3	71	3	11	23	3	17	3
98	.	3	7	3	.	.	.	19	3	.	3	.	97	3	29	3	.	.	.	7
99	.	.	.	41	3	157	3	7	229	3	257	3	67	7	11	.	3	.	3	31
800	3	7	3	19	29	3	7	3	.	43	79	191	3	163	3	.	13	3	11	3
801	7	3	.	3	.	11	113	13	3	19	3	7	227	3	127	3	.	7	.	.
02	11	139	.	.	3	7	3	97	.	3	7	3	.	.	19	.	3	29	3	13
03	3	131	3	.	7	3	.	3	31	47	13	.	3	11	3	7	.	3	.	3
04	37	3	.	3	191	97	29	137	3	7	3	.	13	3	7	3	257	11	.	.
05	79	19	7	11	3	.	3	73	7	3	.	3	11	29	.	41	3	239	3	7
806	3	.	3	149	.	3	19	3	.	37	.	.	3	7	3	13	11	3	7	3
07	.	3	11	3	43	.	7	53	3	89	3	11	7	3	.	3	263	13	.	.
08	7	.	19	.	3	211	3	.	13	3	131	3	.	.	229	11	3	7	3	.
09	3	17	3	.	.	3	.	3	19	.	7	.	3	.	3	29	7	3	61	3
10	.	3	59	3	7	.	.	.	3	.	3	13	.	3	11	3	.	.	.	.
811	.	11	13	7	3	29	3	.	23	3	31	3	.	13	7	41	3	53	3	19
12	3	.	3	17	13	3	241	3	7	.	43	29	3	.	3	.	157	3	113	3
13	11	3	.	3	17	3	233	7	3	11	3	167	.	3	163	3	13	.	7	.
14	.	7	127	.	3	17	3	13	.	3	107	3	7	11	31	.	3	23	3	79
15	3	149	3	.	37	3	.	3	11	13	.	7	3	.	3	67	73	3	.	3
816	13	3	79	3	.	7	17	.	3	31	3	.	11	3	.	3	7	19	.	.
17	.	.	.	101	3	41	3	11	71	3	.	3	13	37	.	7	3	43	3	.
18	3	179	3	7	23	3	.	3	17	7	47	11	3	19	3	.	223	3	.	3
19	.	3	7	3	101	13	11	.	3	17	3	.	.	3	.	3	67	.	19	7
20	43	.	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7		.	3	13	3	11
821	3	7	3	47	157	3	7	3	13	41	17	.	3	23	3	.	.	3	13	3
22	7	3	.	3	229	19	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	11	233
23	.	13	.	53	3	7	3	263	191	3	7	3	17	281	137	.	3	67	3	.
24	3	19	3	23	7	3	73	3	.	11	139	31	3	13	3	7	19	3	29	3
25	17	3	.	3	11	109	19	179	3	7	3	.	.	3	7	3	59	197	23	.
826	.	17	7	.	3	.	3	.	7	3	53	3	19	.	17	23	3	11	3	7
27	3	191	3	11	107	3	181	3	.		.	.	3	7	3	17	97	3	7	3
28	31	3	17	3	.	.	7	11	3	13	3	113	7	3	.	3	11	37	.	13
29	7	.	11	17	3	.	3	283	101	3	13	3	127	239	197	.	3	7	3	109
30	3	.	3	.	17	3	11	3	61	.	7	79	3	43	3	11	7	3	.	3
831	.	3	41	3	7	17	.	43	3	101	3	97	59	3	.	3	71	29	17	11
32	19	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	.	7	13	3	.	3	17
33	3	11	3	227	.	3	13	3	7	97	103	23	3	167	3		.	3	11	3
34	.	3	.	3	239	11	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	181	.	7	.
35	11	7	113	37	3	23	3	47	17	3	101	3	7	103	.	139	3	19	3	29
836	3	13	3	.	11	3	.	3	.	17	241	7	3	11	3	.	.	3	233	3
37	.	3	13	3	97	7	.	.	3	29	3	101	31	3	.	3	7	11	83	89
38	47	181	43	11	3	.	3	79	109	3	17	3	11	.	13	7	3	.	3	191
39	3	.	3	7	.	3	31	3	.	7	23	17	3	.	3	.	11	3	127	3
40	167	3	7	3	.	29	.	13	3	73	3	11	17	3	19	3	31	229	.	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
781	31	3	.	3	47	.	.	7	3	.	3	.	37	3	41	3	.	.	7	11
82	17	7	139	.	3	61	3	23	29	3	.	3	7	.	11	79	3	59	3	13
83	3	11	3	127	23	3	.	3	109	181	13	7	3	103	3	43	277	3	11	3
84	19	3	67	3	31	7	.	131	3	97	3	.	13	3	.	3	7	53	.	23
85	11	.	17	13	3	251	3	.	.	3	.	3	179	.	89	7	3	.	3	53
786	3	.	3	7	11	3	97	3	151	7	29	19	3	11	3	13	.	3	.	3
87	61	3	7	3	17	79	13	227	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	.	7
88	29	.	.	11	3	17	3	7	13	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	257
89	3	7	3	23	281	3	7	3	157	151	.	.	3	19	3	.	11	3	197	3
90	7	3	11	3	173	.	17	37	.	107	3	7	31	3	.	3	139	7	19	83
791	.	.	13	.	3	7	3	17	41	3	7	3	.	13	.	11	3	.	3	29
92	3	41	3	.	7	3	31	3	17	.	11	.	3	.	3	7	37	3	179	3
93	73	3	.	3	61	19	.	139	3	7	3	.	163	3	7	3	13	.	.	.
94	.	11	7	181	3	229	3	13	7	3	19	3	.	61	101	29	3	.	3	7
95	3	19	3	.	.	3	251	3	47	13	17	.	3	7	3	.	19	3	7	3
796	11	3	.	3	37	29	7	.	3	11	3	17	7	3	.	3	.	.	.	.
97	7	173	.	47	3	31	3	.	241	3	.	3	13	11	23	73	3	7	3	199
98	3	47	3	13	.	3	.	3	11	.	7	23	3	17	3	.	7	3	109	3
99	17	3	37	3	7	13	.	211	3	.	3	.	11	3	.	3	41	167	.	.
800	.	17	223	7	3	23	3	11	.	3	.	3	73	53	7	283	3	13	3	173
801	3	.	3	71	19	3	.	3	7	.	.	11	3	181	3	17	.	3	13	3
02	.	3	17	3	83	.	11	7	3	.	3	.	43	3	.	3	17	23	7	59
03	19	7	7	17	3	.	3	.	179	3	11	3	7	31	.	19	3	17	3	11
04	3	43	3	61	17	3	67	3	.	.	23	7	3	13	3	.	.	3	101	3
05	109	3	.	3	13	7	.	23	3	197	3	19	61	3	13	3	7	83	11	.
806	.	59	.	79	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	17
07	3	23	3	7	.	3	17	3	37	7	.	.	3	.	3	.	173	3	43	3
08	233	3	7	3	11	.	193	17	3	13	3	31	29	3	47	3	23	41	.	7
09	13	.	73	19	3	.	3	7	11	3	13	3	47	7	109	.	3	11	3	107
10	3	7	3	11	103	3	7	3	.	17	.	89	3	.	3	131	83	3	.	3
811	7	3	.	3	277	.	23	11	3	.	3	7	.	3	19	3	11	7	.	.
12	31	193	11	23	3	7	3	181	67	3	7	3	.	.	29	13	3	.	3	.
13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	19	17	3	97	3	7	199	3	23	3
14	47	3	.	3	29	.	41	257	3	7	3	59	17	3	7	3	19	227	13	11
15	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3	23	17	11	83	3	139	3	7
816	3	11	3	37	127	3	.	3	.	23	.	13	3	7	3	.	151	3	7	3
17	29	3	13	3	.	11	7	.	3	.	3	53	7	3	17	3	89	263	157	.
18	7	.	23	109	3	71	3	.	19	3	41	3	37	.	13	17	3	7	3	.
19	3	.	3	41	11	3	.	3	.	.	7	73	3	11	3	163	7	3	167	3
20	.	3	31	3	7	137	.	13	3	.	3	211	79	3	23	3	103	11	53	19
821	113	.	29	7	3	.	3	127	.	3	37	3	11	.	7	.	3	.	3	13
22	3	83	3	43	.	3	.	3	7	29	13	.	3	107	3	19	11	3	17	3
23	.	3	11	3	.	23	31	7	3	.	3	11	13	3	.	3	47	.	7	17
24	41	7	.	13	3	.	3	.	.	3	67	3	7	.	.	11	3	.	3	.
25	3	31	3	.	.	3	.	3	.	71	11	7	3	269	3	13	.	3	151	3
826	.	3	.	3	131	7	13	19	3	47	3	29	89	3	11	3	7	13	41	.
27	83	11	.	.	3	.	3	37	13	3	23	3	.	19	.	7	3	.	3	.
28	3	29	3	7	41	3	173	3	79	7	179	67	3	.	3	.	.	3	19	3
29	11	3	7	3	23	.	163	29	3	11	3	13	.	3	31	3	37	149	.	7
30	53	23	13	.	3	.	3	7	.	3	.	3	251	7	19	.	3	.	3	23
831	3	7	3	137	13	3	7	3	11	31	.	223	3	193	3	41	23	3	271	3
32	7	3	.	3	139	53	.	.	3	.	3	7	11	3	37	3	13	7	31	.
33	17	19	.	31	3	7	3	11	263	3	7	3	199	.	61	.	3	89	3	.
34	3	17	3	.	7	3	19	3	.	13	.	11	3	31	3	7	29	3	.	3
35	13	3	.	3	.	.	11	193	3	7	3	.	19	3	7	3	.	179	.	41
836	23	.	7	269	3	.	3	31	7	3	11	3	13	67	53	.	3	127	3	7
37	3	61	3	13	.	3	211	3	19	.	.	199	3	7	3	23	.	3	7	3
38	71	3	.	3	17	13	7	.	3	.	3	37	7	3	149	3	.	43	11	53
39	7	37	59	113	3	11	3	.	131	3	79	3	137	.	.	47	3	7	3	19
40	3	.	3	.	.	3	.	3	13	11	.	83	3	41	3	.	7	3	13	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
841	37	31	151	241	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	13
42	3	7	3	107	.	3	7	3	.	.	11	.	3	131	3	.	61	3	.	3
43	7	3	.	3	59	.	.	.	3	37	3	7	13	3	11	3	19	7	.	.
44	.	11	.	13	3	7	3	29	.	3	7	3	.	23	.	17	3	.	3	.
45	3	.	3	.	7	3	223	3	.		181	137	3	.	3	7	17	3	59	3
846	11	3	19	3	211	191	13	37	3	7	3	.	.	3	7	3	53	13	47	.
47	.	71	7	23	3	.	3	.	7	3	193	3	.	11	.	101	3	83	3	7
48	3	137	3	.	.	3	89	3	11	271	.	41	3	7	3	43	37	3	7	3
49	59	3	197	3	19	.	7	.	3	163	3	13	7	3	157	3	29	173	.	17
50	7	167	13	.	3	151	3	11	.	3	.	3	23	13	.	277	3	7	3	.
851	3	.	3	.	13	3	47	3	.	23	7	11	3	.	3	19	7	3	.	3
52	.	3	139	3	7	.	11	3	3	.	3	.	29	3	.	3	13	.	.	163
53	197	.	23	7	3	.	3	13	41	3	11	3	.	.	7	61	3	31	3	11
54	3	41	3	223	.	3	229	3	7	13	.	.	3	37	3	.	43	3	.	3
55	13	3	37	3	233	.	.	7	3	.	3	31	.	3	23	3	113	131	7	.
856	.	7	.	59	3	11	3	.	.	3	.	3	7	19	29	.	3	.	3	41
57	3	.	3	13	.	3	.	3	23	11	59	7	3	.	3	83	179	3	19	3
58	239	3	53	3	11	7	.	.	3	19	3	.	.	3	.	3	7	.	.	293
59	17	.	271	.	3	53	3	151	11	3	29	3	.	.	19	7	3	11	3	61
60	3	17	3	7	.	3	.	3	13	7	.	.	3	227	3	97	139	3	13	3
861	29	3	7	3	.	.	.	11	3	71	3	43	.	3	.	3	11	.	277	7
62	.	13	11	.	3	73	3	7	151	3	23	3	53	7	83	.	3	.	3	.
63	3	7	3	17	.	3	7	3	37	.	173	131	3	13	3	11	.	3	79	3
64	7	3	71	3	13	.	103	89	3	.	3	7	19	3	13	3	.	7	137	11
65	.	23	19	.	3	7	3	241	31	3	7	3	.	.	11	.	3	37	3	23
866	3	11	3	257	7	3	37	3	19	29	.	.	3	41	3	7	23	3	11	3
67	277	3	31	3	.	11	17	.	3	7	3		43	3	7	3	127	.	223	13
68	11	61	7	47	3	.	3	17	7	3	13	3	31	71	.	37	3	.	3	.
69	3	43	3	233	11	3	23	3	17	.	.	.	3	7	3	.	227	3	7	3
70	19	3	167	3	.	.	7	173	3	17	3	29	7	3	.	3	.	11	61	.
871	7	.	.	11	3	13	3	.		3	151	3	11	.	79	13	3	7	3	.
72	3	29	3	37	.	3	13	3	.	.	7	19	3	83	3	23	7	3	43	3
73	67	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	23	3	.	3	167	19	13	113
74	71	.	.	7	3	61	3	19	.	3	.	3	17	.	7	11	3	.	3	157
75	3	13	3	.	.	3	.	3	7	.	11	13	3	17	3	.	.	3	.	3
876	17	3	13	3	79	.	41	7	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.
77	.	7	229	139	3	139	3	.	.	3	37	3	7	59	13	.	3	.	3	47
78	3	.	3	277	.	3	137	3	53	31	71	7	3	.	3	17	13	3	107	3
79	11	3	17	3	.	7	.	13	3	11	3	23	.	3	47	3	7	.	31	37
80	.	.	.	17	3	283	3	.	23	3	19	3	47	11	.	7	3	17	3	13
881	3	19	3	7	17	3	.	3	11	7	13	.	3	31	3	53	19	3	181	3
82	193	3	7	3	.	17	19	47	3	.	3	83	11	3	.	3	.	79	17	7
83	.	227	233	13	3	47	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	23	3	17
84	3	7	3	211	.	3	7	3	29	.	.	11	3	191	3	13	59	3	241	3
85	7	3	67	3	61	.	11	17	3	.	3	7	223	3	29	3	37	7	.	73
886	41	251	.	.	3	7	3	23	13	3	7	3	263	.	151	137	3	.	3	11
87	3	107	3	43	7	3	79	3	.	17	83	.	3	89	3	7	.	3	.	3
88	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	13	211	3	7	3	73	.	11	23
89	19	.	7	67	3	11	3	.	7	3	17	3	113	13	.	19	3	29	3	7
90	3	.	3	.	43	3	.	3	.	11	127	17	3	7	3	269	.	3	7	3
891	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	13	97	239	59
92	7	.	37	.	3	.	3	13	11	3	.	3	.	17	.	233	3	7	3	31
93	3	.	3	11	31	3	.	3	179	13	7	.	3	157	3	41	7	3	47	3
94	13	3	29	3	7	.	.	11	3	223	3	37	.	3	17	3	11	.	23	.
95	.	37	11	7	3	.	3	.	.	3	.	3	13	.	7	17	3	151	3	149
896	3	.	3	13	.	3	11	3	7	19	.	47	3	.	3	11	17	3	157	3
97	271	3	109	3	283	13	73	7	3	23	3	53	61	3	19	3	43	17	7	11
98	83	7	31	.	3	19	3	.	.	3	43	3	7	.	11	.	3	13	3	.
99	3	11	3	.	47	3	.	3	13	.	19	7	3	139	3	.	53	3	11	3
900	.	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	197	.	3	179	3	7	127	53	17
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
841	19	3	23	3	7	.	17	73	3	41	3	.	.	3	29	3	.	59	209	.
42	173	13	109	7	3	.	3	17	11	3	71	3	271	89	7	31	3	11	3	.
43	3	67	3	11	29	3	239	3	7	139	.	19	3	13	3	.	.	3	37	3
44	79	3	.	3	13	.	.	7	3	17	3	23	.	3	13	3	11	19	7	.
45	.	7	11	.	3	103	3	19	23	3	83	3	7	41	251	.	3	29	3	31
846	3	.	3	.	31	3	11	3	227	.	17	7	3	19	3	11	.	3	.	3
47	.	3	131	3	.	7	29	103	3	13	3	17	149	3	.	3	7	.	19	11
48	13	53	.	.	3	113	3	.	.	3	13	3	17	29	11	7	3	23	3	73
49	3	11	3	7	.	3	.	3	31	7	.	.	3	17	3	37	.	3	11	3
50	17	3	7	3	.	11	257	97	3	241	3	149	.	3	.	3	.	.	43	7
851	11	17	31	.	3	13	3	7	53	3	19	3	103	7	17	13	3	.	3	.
52	3	7	3	.	11	3	7	3	71	269	53	107	3	11	3	17	19	3	.	3
53	7	3	17	3	.	.	19	.	3	59	3	7	.	3	103	3	17	7	13	23
54	.	.	97	11	3	7	3	.	127	3	7	3	11	73	.	53	3	17	3	193
55	3	13	3	67	7	3	41	3	.	83	.	13	3	23	3	7	11	3	.	3
856	97	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	47	3	7	3	.	67	17	43
57	.	29	7	191	3	139	3	199	7	3	31	3	.	109	13	11	3	.	3	7
58	3	.	3	23	19	3	17	3	43	79	11	157	3	7	3	.	13	3	7	3
59	23	3	43	3	67	31	7	13	3	149	3	127	7	3	11	3	.	113	23	.
60	7	11	47	41	3	89	3	.	17	3	.	3	59	.	31	19	3	7	3	13
861	3	101	3	29	.	3	199	3	.	17	7	.	3	.	3	79	7	3	.	3
62	11	3	.	3	7	.	281	.	3	11	3	19	13	3	.	3	.	.	.	211
63	.	.	.	7	3	67	3	.	.	3	17	3	.	11	7	.	3	19	3	.
64	3	.	3	31	.	3	.	3	7	43	.	17	3	197	3	13	.	3	67	3
65	41	3	101	3	.	107	13	7	3	.	3	.	11	3	.	3	131	13	7	.
866	73	7	193	19	3	79	3	11	13	3	.	3	7	17	23	.	3	.	3	181
67	3	.	3	101	53	3	.	3	.	19	107	7	3	.	3	59	229	3	29	3
68	.	3	.	3	.	7	11	.	3	109	3	13	283	3	17	3	7	31	113	67
69	.	89	13	.	3	19	3	.	29	3	11	3	.	13	37	7	3	.	3	11
70	3	263	3	7	13	3	83	3	.	7	19	31	3	.	3	73	17	3	251	3
871	.	3	7	3	43	101	67	61	3	179	3	.	.	3	.	3	13	17	11	7
72	.	.	.	71	3	11	3	7	197	3	.	3	.	7	191	41	3	.	3	.
73	3	7	3	.	199	3	7	3	41	11	23	59	3	.	3	31	281	3	17	3
74	7	3	19	3	11	149	47	23	3	.	3	7	.	3	89	3	.	7	59	17
75	29	.	.	.	3	7	3	67	11	3	7	3	13	.	.	.	3	11	3	251
876	3	23	3	11	7	3	29	3	.	73	43	.	3	.	3	7	.	3	.	3
77	.	3	127	3	19	13	.	11	3	7	3	61	41	3	7	3	11	.	.	19
78	59	.	7	103	3	41	3	.	7	3	.	3	.	23	.	179	3	13	3	7
79	3	281	3	.	.	3	11	3	13	.	.	97	3	7	3	11	.	3	7	3
80	191	3	173	3	107	83	7	.	3	29	3	.	7	3	59	3	137	.	37	11
881	7	13	199	23	3	131	3	.	37	3	.	3	109	163	11	29	3	7	3	89
82	3	11	3	.	.	3	61	3	103	41	7	43	3	13	3	.	7	3	11	3
83	53	3	149	3	7	11	97	19	3	67	3	.	31	3	13	3	157	37	.	109
84	11	197	53	7	3	.	3	.	.	3	103	3	23	19	7	107	3	.	3	.
85	3	47	3	19	11	3	31	3	7	23	101	283	3	11	3	.	.	3	19	3
886	.	3	.	3	.	.	.	7	3	13	3	71	.	3	131	3	31	11	7	13
87	13	7	17	11	3	37	3	29	.	3	13	3	7	47	19	.	3	.	3	.
88	3	.	3	17	.	3	.	3	181	.	31	7	3	.	3	103	11	3	.	3
89	.	3	11	3	17	7	43	.	3	193	3	11	101	3	23	3	7	.	.	61
90	.	19	.	29	3	13	3	.	.	3	281	3	229	.	.	7	3	41	3	139
891	3	.	3	7	163	3	13	3	23	7	11	257	3	101	3	.	79	3	191	3
92	149	3	7	3	.	23	17	.	3	.	3	73	19	3	11	3	29	.	13	7
93	199	11	19	193	3	.	3	7	.	3	139	3	.	7	.	71	3	.	3	.
94	3	7	3	.	137	3	7	3	17	131	.	13	3	43	3	109	.	3	31	3
95	7	3	13	3	.	.	.	43	3	11	3	7	29	3	101	3	.	7	.	.
896	37	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	13	.	3	257	3	19
97	3	.	3	.	7	3	.	3	11	107	17	.	3	.	3	7	13	3	.	3
98	19	3	59	3	23	73	.	13	3	7	3	17	11	3	7	3	.	241	.	.
99	293	23	7	.	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	29	.	3	31	3	7
900	3	.	3	.	113	3	.	3	.	.	13	11	3	7	3	.	23	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
901	11	13	·	251	3	97	3	227	·	3	·	3	193	173	23	7	3	109	3	·
02	3	·	3	7	11	3	·	3	83	7	·	23	3	11	3	·	31	3	·	3
03	73	3	7	3	13	·	37	181	3	41	3	59	103	3	13	3	61	11	167	7
04	·	·	·	11	3	23	3	7	19	3	31	3	11	7	·	·	3	149	3	151
05	3	7	3	29	·	3	7	3	131	·	·	·	3	·	3	37	11	3	·	3
906	7	3	11	3	19	31	·	·	3	13	3	7	·	3	233	3	·	7	·	13
07	13	·	61	·	3	7	3	83	257	3	7	3	·	41	31	11	3	103	3	·
08	3	·	3	71	7	3	197	3	·	·	11	61	3	·	3	7	·	3	·	3
09	·	3	·	3	·	229	·	23	3	7	3	79	·	3	7	3	211	199	·	103
10	17	11	7	·	3	13	3	·	7	3	227	3	29	·	59	13	3	181	3	7
911	3	17	3	31	179	3	13	3	·	293	·	·	3	7	3	·	·	3	7	3
12	11	3	223	3	197	53	7	19	3	11	3	·	7	3	·	3	23	·	13	·
13	7	·	17	·	3	127	3	53	29	3	271	3	·	11	149	241	3	7	3	167
14	3	13	3	17	·	3	113	3	11	·	7	13	3	·	3	61	7	3	19	3
15	37	3	13	3	7	·	23	71	3	19	3	·	11	3	239	3	·	31	43	83
916	139	47	101	7	3	17	3	11	·	3	59	3	·	43	7	·	3	113	3	37
17	3	·	3	293	·	3	41	3	7	37	29	11	3	·	3	199	13	3	23	3
18	·	3	·	3	·	·	11	7	3	·	3	229	131	3	·	3	·	29	7	53
19	29	7	73	·	3	107	3	17	·	3	11	3	7	149	89	·	3	·	3	11
20	3	·	3	·	101	3	19	3	17	23	13	7	3	·	3	31	·	3	83	3
921	31	3	·	3	·	7	251	·	3	17	3	181	13	3	199	3	7	·	11	43
22	137	·	19	13	3	11	3	·	·	3	·	3	149	·	·	7	3	·	3	29
23	3	241	3	7	·	3	·	3	19	7	17	127	3	·	3	13	107	3	·	3
24	·	3	7	3	11	·	13	·	3	29	3	17	·	3	23	3	97	13	193	7
25	233	·	·	79	3	71	3	7	11	3	67	3	17	7	37	29	3	11	3	19
926	3	7	3	11	37	3	7	3	23	·	·	211	3	17	3	·	·	3	·	3
27	7	3	·	3	83	23	·	11	3	·	3	7	47	3	·	3	11	7	163	137
28	·	17	11	·	3	7	3	101	·	3	7	3	·	13	17	263	3	227	3	·
29	3	61	3	53	7	3	11	3	·	43	·	19	3	199	3	7	·	3	41	3
30	·	3	17	3	281	47	191	167	3	7	3	41	31	3	7	3	13	19	·	11
931	157	·	7	17	3	·	3	13	7	3	23	3	·	·	11	·	3	17	3	7
32	3	11	3	83	17	3	31	3	73	13	53	·	3	7	3	·	·	3	7	3
33	13	3	·	3	23	11	7	·	3	·	3	·	7	3	·	3	31	269	17	277
34	7	23	·	29	3	109	3	·	103	3	·	3	13	233	223	41	3	7	3	17
35	3	·	3	13	11	3	17	3	41	·	7	·	3	11	3	89	7	3	139	3
936	·	3	·	3	7	13	179	17	3	251	3	·	109	3	·	3	29	11	37	71
37	·	·	83	7	3	31	3	·	17	3	19	3	11	67	7	·	3	13	3	241
38	3	19	3	·	·	3	23	3	7	17	·	101	3	103	3	107	11	3	13	3
39	·	3	11	3	·	·	19	7	3	·	3	11	29	3	·	3	·	37	7	·
40	23	7	·	·	3	41	3	149	167	3	17	3	7	·	271	11	3	157	3	·
941	3	139	3	·	·	3	·	3	·	61	11	7	3	13	3	23	47	3	31	3
42	·	3	·	3	13	7	71	·	3	59	3	·	17	3	11	3	7	73	79	307
43	181	11	·	·	3	37	3	257	·	3	·	3	·	17	29	7	3	·	3	·
44	3	67	3	7	19	3	263	3	·	7	·	89	3	·	3	·	·	3	·	3
45	11	3	7	3	29	·	47	31	3	11	3	·	·	3	17	3	·	·	·	7
946	13	·	89	37	3	·	3	7	·	3	13	3	173	7	101	17	3	31	3	·
47	3	7	3	·	53	3	7	3	11	·	·	43	3	61	3	211	17	3	·	3
48	7	3	113	3	·	59	53	·	3	·	3	7	11	3	·	3	·	7	·	·
49	43	·	·	107	3	7	3	11	23	3	7	3	59	·	139	13	3	19	3	·
50	3	·	3	·	7	3	13	3	·	167	·	11	3	29	3	7	101	3	17	3
951	·	3	·	3	·	227	11	73	3	7	3	251	·	3	7	3	89	·	13	17
52	31	·	7	19	3	·	3	·	7	3	11	3	·	·	131	·	3	23	3	7
53	3	13	3	191	·	3	·	3	199	19	·	13	3	7	3	·	67	3	7	3
54	·	3	13	3	73	·	7	·	3	37	3	·	7	3	19	3	·	·	11	31
55	7	43	·	149	3	11	3	23	59	3	·	3	·	83	13	·	3	7	3	·
956	3	·	3	67	23	3	·	3	·	11	7	·	3	·	3	59	7	3	101	3
57	·	3	·	3	7	·	·	13	3	·	3	29	·	3	·	3	19	67	·	23
58	·	·	149	7	3	·	3	·	11	3	79	3	61	47	7	239	3	11	3	13
59	3	29	3	11	·	3	·	3	7	·	13	·	3	23	3	197	37	3	·	3
60	·	3	19	3	67	·	·	7	3	131	3	109	13	3	137	3	11	·	7	139
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
901	1	3	89	3	29	.	7	37	3	.	3	31	7	3	.	3	.	19	.	.
02	7	17	43	13	3	.	3	19	.	3	11	3	.	137	17	.	3	7	3	11
03	3	.	3	.	109	3	23	3	.	.	7	.	3	19	3	13	7	3	.	3
04	29	3	17	3	7	61	13	.	3	.	3	173	.	3	41	3	17	13	11	.
05	23	83	137	7	3	11	3	41	13	3	53	3	239	.	7	157	3	17	3	.
906	3	269	3	.	17	3	71	3	7	11	.	.	3	29	3	23	89	3	.	3
07	151	3	47	3	11	17	139	7	3	43	3	13	23	3	.	3	163	.	7	29
08	47	7	13	43	3	.	3	89	11	3	19	3	7	13	.	97	3	11	3	17
09	3	19	3	11	13	3	17	3	.	29	.	7	3	37	3	.	19	3	.	3
10	83	3	23	3	41	7	19	11	3	61	3	.	.	3	79	3	7	71	.	.
911	.	.	11	.	3	.	3	13	17	3	73	3	19	.	67	7	3	.	3	.
12	3	.	3	7	263	3	11	3	107	7	97	37	3	.	3	11	.	3	.	3
13	13	3	7	3	103	211	.	.	3	.	3	23	.	3		3	59	.	.	7
14	109	.	.	.	3	.	3	7	23	3	17	3	13	7	11	191	3	.	3	.
15	3	7	3	13	19	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	67	.	3	11	3
916	7	3	151	3	71	11	31	29	3	.	3	7	17	3	277	3	.	7	47	107
17	11	.	.	89	3	7	3	163	.	3	7	3	.	17	263	19	3	13	3	41
18	3	31	3	97	7	3	.	3	13	.	79	139	3	11	3	7	43	3	13	3
19	.	3	.	3	.	41	.	.	3	7	3	19	59	3	7	3	67	11	.	197
20	.	13	7	11	3	43	3	23	7	3	.	3	11	.	71	17	3	19	3	7
921	3	.	3	157	23	3	37	3	61	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3
22	.	3	11	3	13	257	7	.	3	53	3	11	7	3	13	3	41	17	.	23
23	7	.	.	19	3	.	3	.	71	3	.	3	.	.	.	11	3	7	3	.
24	3	59	3	.	.	3	.	3	89	19	7	.	3	23	3	.	7	3	17	3
25	.	3	.	3	7	151	.	.	3	13	3	43	.	3	11	3	53	.	29	13
926	13	11	.	7	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	7	59	3	.	3	.
27	3	.	3	23	.	3	.	3	7	113	19	.	3	31	3	.	.	3	71	3
28	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	131	293	3	29	3	19	.	7	.
29	.	7	.	.	3	13	3	31	239	3	109	3	7	11	.	13	3	.	3	113
30	3	.	3	.	29	3	13	3	11	163	.	7	3	.	3	.	127	3	.	3
931	.	3	19	3	59	7	151	.	3	23	3	.	11	3	.	3	7	41	13	.
32	.	.	.	179	3	.	3	11	19	3	37	3	.	.	.	7	3	29	3	79
33	3	13	3	7	89	3	73	3	.	7	.	11	3	.	3	47	61	3	59	3
34	113	3	7	3	19	.	11	151	3	211	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
35	17	.	.	.	3	.	3	7	137	3	11	3	.	7	13	31	3	173	3	11
936	3	7	3	73	229	3	7	3	47	283	113	23	3	.	3	19	13	3	43	3
37	7	3	29	3	.	.	41	13	3	79	3	7	191	3	.	3	71	7	11	97
38	.	127	17	47	3	7	3	37	.	3	7	3	269	223	.	.	3	.	3	13
39	3	47	3	17	7	3	.	3	.	11	13	.	3	.	3	7	193	3	.	3
40	163	3	.	3	11	.	109	19	3	7	3	.	13	3	7	3	37	23	73	.
941	.	.	7	13	3	17	3	.	7	3	41	3	53	19	97	131	3	11	3	7
42	3	.	3	11	.	3	107	3	31	.	23	29	3	7	3	13	.	3	7	3
43	.	3	157	3	127	197	7	11	3	19	3	.	7	3	37	3	11	13	.	.
44	7	29	11	59	3	.	3	17	13	3	.	3	107	.	19	61	3	7	3	53
45	3	23	3	.	.	3	11	3	17	.	7	271	3	.	3	11	7	3	.	3
946	.	3	103	3	7	181	137	41	3	17	3	13	73	3	.	3	23	.	281	11
47	41	19	13	7	3	193	3	97	.	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	47
48	3	11	3	29	13	3	19	3	7	.	17	79	3	239	3	.	31	3	11	3
49	.	3	269	3	.	11	23	7	3	73	3	17	19	3	43	3	13	.	7	.
50	11	7	19	23	3	.	3	13	.	3	31	3	7	.	.	.	3	.	3	61
951	3	.	3	43	11	3	59	3	19	13	.	7	3	11	3	.	.	3	23	3
52	13	3	.	3	.	7	.	47	3	.	3	.	151	3	.	3	7	11	233	157
53	97	17	167	11	3	47	3	.	283	3	127	3	11	.	17	7	3	.	3	19
54	3	53	3	7	.	3	.	3	.	7	307	.	3	.	3	17	11	3	29	3
55	19	3	7	3	.	13	227	.	3	31	3	11	.	3	61	3	17	109	.	7
956	.	41	23	17	3	271	3	7	29	3	241	3	163	7	103	11	3	13	3	83
57	3	7	3	31	17	3	7	3	13	.	11	19	3	.	3	.	.	3	13	3
58	7	3	.	3	257	17	37	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	17	41
59	229	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	41	53	.	.	3	59	3	17
60	3	.	3	.	7	3	17	3	23	191	29	.	3	13	3	7	307	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
961	17	7	11	·	3	223	3	277	19	3	97	3	7	251	·	127	3	79	3	·
62	3	17	3	23	·	3	11	3	·	·	41	7	3	·	3	11	157	3	109	3
63	23	3	193	3	19	7	13	61	3	·	3	·	·	3	·	3	7	13	23	11
64	·	149	17	229	3	67	3	·	13	3	211	3	·	73	11	7	3	·	3	43
65	3	11	3	7	103	3	·	3	263	7	·	83	3	37	3	19	29	3	11	3
966	·	3	7	3	17	11	79	53	3	23	3	13	71	3	41	3	241	·	127	7
67	11	·	13	97	3	17	3	7	311	3	197	3	·	7	·	·	3	89	3	·
68	3	7	3	131	11	3	7	3	·	·	·	37	3	11	3	179	113	3	·	3
69	7	3	·	3	·	199	17	19	3	103	3	7	·	3	31	3	13	7	29	67
70	·	·	·	11	3	7	3	13	·	3	7	3	11	19	23	·	3	53	3	107
971	3	·	3	19	7	3	·	3	17	13	·	23	3	137	3	7	11	3	19	3
72	13	3	11	3	41	·	67	191	3	7	3	11	·	3	7	3	·	47	31	79
73	·	·	7	31	3	23	3	307	7	3	·	3	13	131	19	11	3	311	3	7
74	3	257	3	13	29	3	61	3	37	·	11	·	3	7	3	139	·	3	7	3
75	·	3	281	3	·	13	7	113	3	·	3	17	7	3	11	3	103	23	·	·
976	7	11	·	·	3	·	3	31	41	3	233	3	17	89	163	251	3	7	3	·
77	3	41	3	199	·	3	19	3	13	79	7	·	3	17	3	43	7	3	13	3
78	11	3	47	3	7	·	29	23	3	11	3	·	19	3	227	3	·	·	·	·
79	47	13	19	7	3	179	3	·	181	3	·	3	·	11	7	37	3	·	3	41
80	3	23	3	·	·	3	·	3	7	83	61	167	3	13	3	17	·	3	·	3
981	·	3	17	3	13	41	59	7	3	·	3	·	11	3	13	3	17	·	7	61
82	283	7	·	17	3	·	3	11	·	3	·	3	7	23	193	31	3	17	3	19
83	3	197	3	37	17	3	·	3	·	·	·	7	3	107	3	29	43	3	·	3
84	19	3	·	3	·	7	11	·	3	13	3	·	257	3	173	3	7	·	17	13
85	13	137	·	23	3	29	3	·	83	3	11	3	37	·	211	7	3	·	3	11
986	3	151	3	7	31	3	17	3	·	7	·	19	3	53	3	·	·	3	23	3
87	89	3	7	3	·	·	·	17	3	269	3	·	·	3	·	3	293	19	11	7
88	·	29	·	·	3	11	3	7	17	3	37	3	23	7	·	13	3	97	3	·
89	3	7	3	·	·	3	7	3	31	11	·	·	3	19	3	·	163	3	·	3
90	7	3	181	3	11	·	·	83	3	·	3	7	167	3	97	3	·	7	13	37
991	113	·	23	·	3	7	3	·	11	3	7	3	·	·	·	·	3	11	3	·
92	3	13	3	11	7	3	47	3	313	·	67	13	3	·	3	7	·	3	61	3
93	199	3	13	3	47	19	·	11	3	7	3	71	17	3	7	3	11	41	·	·
94	·	107	7	·	3	89	3	37	7	3	19	3	·	17	13	·	3	277	3	7
95	3	19	3	151	191	3	11	3	23	·	·	·	3	7	3	11	13	3	7	3
996	103	3	·	3	·	23	7	13	3	·	3	67	7	3	17	3	37	·	251	11
97	7	179	·	·	3	·	3	·	·	3	31	3	19	·	11	17	3	7	3	13
98	3	11	3	·	151	3	·	3	173	·	7	·	3	·	3	·	7	3	11	3
99	·	3	·	3	7	11	41	163	3	·	3	·	13	3	37	3	139	17	89	127
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
961	11	3	.	3	13	23	.	17	3	7	3	.	.	3	7	3	43	29	19	.
62	29	101	7	.	3	.	3	.	7	3	43	3	.	11	73	.	3	.	3	7
63	3	.	3	167	173	3	29	3	11	17	.	31	3	7	3	113	41	3	7	3
64	.	3	.	3	.	19	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	47	.	.	13
65	7	.	.	223	3	61	3	11	269	3	13	3	.	59	.	.	3	7	3	29
966	3	19	3	163	.	3	.	3	.	277	7	11	3	109	3	31	7	3	.	3
67	31	3	.	3	7	.	11	.	3	29	3	.	17	3	.	3	151	43	.	.
68	.	23	.	7	3	13	3	157	73	3	11	3	19	17	7	13	3	.	3	11
69	3	.	3	.	47	3	13	3	7	.	37	.	3	293	3	.	23	3	.	3
70	37	3	71	3	31	29	113	7	3	.	3	193	.	3	17	3	79	151	7	89
971	.	7	.	.	3	11	3	.	.	3	.	3	7	157	.	17	3	83	3	37
72	3	13	3	.	19	3	23	3	211	11	89	7	3	.	3	271	17	3	149	3
73	67	3	13	3	11	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	173
74	19	.	41	.	3	.	3	29	11	3	107	3	43	71	13	7	3	11	3	.
75	3	.	3	7	.	3	43	3	.	7	.	.	3	.	3	23	13	3	17	3
976	.	3	7	3	61	127	101	11	3	.	3	19	23	3	.	3	11	211	151	7
77	239	67	11	29	3	59	3	7	.	3	.	3	277	7	.	.	3	19	3	13
78	3	7	3	.	.	3	7	3	.	97	13	.	3	.	3	11	53	3	223	3
79	7	3	23	3	.	163	.	313	3	.	3	7	13	3	.	3	29	7	43	11
80	71	31	.	13	3	7	3	281	101	3	7	3	.	43	11	47	3	233	3	263
981	3	11	3	103	7	3	89	3	127	19	31	.	3	47	3	7	149	3	11	3
82	.	3	.	3	97	11	13	.	3	7	3	23	29	3	7	3	227	13	.	.
83	11	59	7	41	3	19	3	.	7	3	.	3	131	37	.	.	3	61	3	7
84	3	.	3	.	11	3	.	3	59	.	19	.	3	7	3	149	.	3	7	3
85	139	3	67	3	.	.	7	241	3	.	3	13	7	3	311	3	19	11	.	43
986	7	47	13	11	3	.	3	.	79	3	101	3	11	13	29	.	3	7	3	229
87	3	17	3	61	13	3	283	3	43	.	7	.	3	173	3	223	7	3	31	3
88	41	3	11	3	7	109	.	.	3	.	3	11	61	3	.	3	13	.	.	.
89	53	.	17	7	3	.	3	13	19	3	29	3	.	31	7	11	3	.	3	.
90	3	.	3	17	23	3	157	3	7	13	11	.	3	.	3	.	197	3	41	3
991	13	3	229	3	17	53	131	7	3	.	3	41	.	3	11	3	.	281	7	19
92	.	7	.	.	3	17	3	53	37	3	.	3	7	101	43	.	3	31	3	109
93	3	73	3	13	67	3	.	3	.	43	.	7	3	23	3	19	.	3	.	3
94	11	3	271	3	79	7	17	.	3	11	3	31	53	3	.	3	7	37	.	29
95	.	113	29	.	3	.	3	17	.	3	.	3	.	11	53	7	3	13	3	137
996	3	227	3	7	.	3	.	3	11	7	263	.	3	83	3	.	131	3	13	3
97	23	3	7	3	.	67	.	19	3	17	3	113	11	3	.	3	73	.	23	7
98	31	13	61	.	3	37	3	7	.	3	.	3	.	7	59	23	3	191	3	283
99	3	7	3	19	..	3	7	3	.	257	17	11	3	13	3	.	.	3	19	3
N	51	35	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

TAVOLA DEGLI ARCHI CIRCOLARI RIDOTTI IN PARTI DEL RAGGIO = 1.

1° =	0,01745	32925	19943	29577	46° =	0,80285	14559	17391	60538
2	0,03490	65850	39886	59154	47	0,82030	47484	37334	90115
3	0,05235	98775	59829	88731	48	0,83775	80409	57278	19692
4	0,06981	31700	79773	18308	49	0,85521	13334	77221	49269
5	0,08726	64625	99716	47885	50	0,87266	46259	97164	78846
6	0,10471	97551	19659	77462	51	0,89011	79185	17108	08423
7	0,12217	30476	39603	07038	52	0,90757	12110	37051	38000
8	0,13962	63401	59546	36615	53	0,92502	45035	56994	67577
9	0,15707	96326	79489	66192	54	0,94247	77960	76937	97154
10	0,17453	29251	99432	95769	55	0,95993	10885	96881	26731
11	0,19198	62177	19376	25346	56	0,97738	43811	16824	56308
12	0,20943	95102	39319	54923	57	0,99483	76736	36767	85885
13	0,22689	28027	59262	84500	58	1,01229	09661	56711	15462
14	0,24434	60952	79206	14077	59	1,02974	42586	76654	45038
15	0,26179	93877	99149	43654	60	1,04719	75511	96597	74615
16	0,27925	26803	19092	73231	61	1,06465	08437	16541	04192
17	0,29670	59728	39036	02808	62	1,08210	41362	36484	33769
18	0,31415	92653	58979	32385	63	1,09955	74287	56427	63346
19	0,33161	25578	78922	61962	64	1,11701	07212	76370	92923
20	0,34906	58503	98865	91538	65	1,13446	40137	96314	22500
21	0,36651	91429	18809	21115	66	1,15191	73063	16257	52077
22	0,38397	24354	38752	50692	67	1,16937	05988	36200	81654
23	0,40142	57279	58695	80269	68	1,18682	38913	56144	11231
24	0,41887	90204	78639	09846	69	1,20427	71838	76087	40808
25	0,43633	23129	98582	39423	70	1,22173	04763	96030	70385
26	0,45378	56055	18525	69000	71	1,23918	37680	15973	99962
27	0,47123	88980	38468	98577	72	1,25663	70614	35917	29539
28	0,48869	21905	58412	28154	73	1,27409	03539	55860	59115
29	0,50614	54830	78355	57731	74	1,29154	36464	75803	88692
30	0,52359	87755	98298	87308	75	1,30899	69389	95747	18269
31	0,54105	20681	18242	16885	76	1,32645	02315	15690	47846
32	0,55850	53606	38185	46462	77	1,34390	35240	35633	77423
33	0,57595	86531	58128	76038	78	1,36135	68165	55577	07000
34	0,59341	19456	78072	05615	79	1,37881	01090	75520	36577
35	0,61086	52381	98015	35192	80	1,39626	34015	95463	66154
36	0,62831	85307	17958	64769	81	1,41371	66941	15406	95731
37	0,64577	18232	37901	94346	82	1,43116	99866	35350	25308
38	0,66322	51157	57845	23923	83	1,44862	32791	55293	54885
39	0,68067	84082	77788	53500	84	1,46607	65716	75236	84462
40	0,69813	17007	97731	83077	85	1,48352	98641	95180	14039
41	0,71558	49933	17675	12654	86	1,50098	31567	15123	43615
42	0,73303	82858	37618	42231	87	1,51843	64492	35066	73192
43	0,75049	15783	57561	71808	88	1,53588	97417	55010	02769
44	0,76794	48708	77505	01385	89	1,55334	30342	74953	32346
45	0,78539	81633	97448	30962	90	1,57079	63267	94896	61923

1′ =	0,00029	08882	08665	72160	1″ =	0,00000	48481	36811	09536
2	0,00058	17764	17331	44319	2	0,00000	96962	73622	19072
3	0,00087	26646	25997	16479	3	0,00001	45444	10433	28608
4	0,00116	35528	34662	88638	4	0,00001	93925	47244	38144
5	0,00145	44410	43328	60798	5	0,00002	42406	84055	47680
6	0,00174	53292	51994	32958	6	0,00002	90888	20866	57216
7	0,00203	62174	60660	05117	7	0,00003	39369	57677	66752
8	0,00232	71056	69325	77277	8	0,00003	87850	94488	76288
9	0,00261	79938	77991	49437	9	0,00004	36332	31299	85824
10	0,00290	88820	86657	21596	10	0,00004	84813	68110	95360
20	0,00581	77641	73314	43192	20	0,00009	69627	36221	90720
30	0,00872	66462	59971	64788	30	0,00014	54441	04332	86080
40	0,01163	55283	46628	86385	40	0,00019	39254	72443	81440
50	0,01454	44104	33286	07981	50	0,00024	24068	40554	76800
60	0,01745	32925	19943	29577	60	0,00029	08882	08665	72160

TAVOLA

DELLE POTENZE DEI NUMERI

che abbraccia
le prime tre fino a 2000
le prime sei fino a 300
e le prime dieci fino a 60

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969
10	100	1000	10000	[illegible]	1000000	10000000
[illegible]	[illegible]	[illegible]	14641	161051	1771561	19487171
[illegible]	[illegible]	1728	20736	248832	2985984	35831808
13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517
14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504
15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375
16	256	4096	65536	1048576	16777216	268435456
17	289	4913	83521	1419857	24137569	410338673
18	324	5832	104976	1889568	34012224	612220032
19	361	6859	130321	2476099	47045881	893871739
20	400	8000	160000	3200000	64000000	1280000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121	1801088541
22	484	10648	234256	5153632	113379904	2494357888
23	529	12167	279841	6436343	148035889	3404825447
24	576	13824	331776	7962624	191102976	4586471424
25	625	15625	390625	9765625	244140625	6103515625
26	676	17576	456976	11881376	308915776	8031810176
27	729	19683	531441	14348907	387420489	10460353203
28	784	21952	614656	17210368	481890304	13492928512
29	841	24389	707281	20511149	594823321	17249876309
30	900	27000	810000	24300000	729000000	21870000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681	27512614111
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824	34359738368
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969	42618442977
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416	52523350144
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625	64339296875
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336	78364164096
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409	94931877133
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384	114415582592
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761	137231006679
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000	163840000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241	194754273881
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744	230539333248
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049	271818611107
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856	319277809664
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625	373669453125
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896	435817657216
47	2209	103823	4879681	229345007	10779215329	506623120463
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464	587068342272
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201	678223072849
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000	781250000000
51	2601	132651	6765201	345025251	17596287801	897410677851
52	2704	140608	7311616	380204032	19770609664	1028071702528
53	2809	148877	7890481	418195493	22164361129	1174711139837
54	2916	157464	8503056	459165024	24794911296	1338925209984
55	3025	166375	9150625	503284375	27680640625	1522435234375
56	3136	175616	9834496	550731776	30840979456	1727094849536
57	3249	185193	10556001	601692057	34296447249	1954897493193
58	3364	195112	11316496	656356768	38068692544	2207984167552
59	3481	205379	12117361	714924299	42180533641	2488651484819
60	3600	216000	12960000	777600000	46656000000	2799360000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷

N	N⁸	N⁹	N¹⁰
1	1	1	1
2	256	512	1024
3	6561	19683	59049
4	65536	262144	1048576
5	390625	1953125	9765625
6	1679616	10077696	60466176
7	5764801	40353607	282475249
8	16777216	134217728	1073741824
9	43046721	387420489	3486784401
10	100000000	1000000000	10000000000
11	214358881	2357947691	25937424601
12	429981696	5159780352	61917374224
13	815730721	10604499373	137858491849
14	1475789056	20661046784	289254654976
15	2562890625	38443359375	576650390625
16	4294967296	68719476736	1099511627776
17	6975757441	118587876497	2015993900449
18	11019960576	198359290368	3570467226624
19	16983563041	322687697779	6131066257801
20	25600000000	512000000000	10240000000000
21	37822859361	794280046581	16679880978201
22	54875873536	1207269217792	26559922791424
23	78310985281	1801152661463	41426511213649
24	110075314176	2641807540224	63403380965376
25	152587890625	3814697265625	95367431640625
26	208827064576	5429503678976	141167095653376
27	282429536481	7625597484987	205891132094649
28	377801998336	10578455953408	296196766695424
29	500246412961	14507145975869	420707233300201
30	656100000000	19683000000000	590490000000000
31	852891037441	26439622160671	819628286980801
32	1099511627776	35184372088832	1125899906842624
33	1406408618241	46411484401953	1531578985264449
34	1785793904896	60716992766464	2064377754059776
35	2251875390625	78815638671875	2758547353515625
36	2821109907456	101559956668416	3656158440062976
37	3512479453921	129961739793077	4808584372417849
38	4347792138496	165216101262848	6278211847988224
39	5352009260481	208728361158759	8140406085191601
40	6553600000000	262144000000000	10485760000000000
41	7984925229121	327381934393961	13422659310152401
42	9682651996416	406671383849472	17080198121677824
43	11688200277601	502592611936843	21611482313284249
44	14048223625216	618121839509504	27197360938418176
45	16815125390625	756680642578125	34050628916015625
46	20047612231936	922190162669056	42420747482776576
47	23811286661761	1119130473102767	52599132235830049
48	28179280429056	1352605460594688	64925062108545024
49	33232930569601	1628413597910449	79792266267612001
50	39062500000000	1953125000000000	97656250000000000
51	45767944570401	2334165173090451	119042423827613001
52	53459728531456	2779905883635712	144555105949057024
53	62259690411361	3299763591802133	174887470365513049
54	72301961339136	3904305912313344	210832519264920576
55	83733937890625	4605366583984375	253295162119140625
56	96717311574016	5416169448144896	303305489096114176
57	111429157112001	6351461955384057	362033331456891249
58	128063081718016	7427658739644928	430804206899405824
59	146830437604321	8662995818654949	511116753300641401
60	167961600000000	10077696000000000	604661760000000000
N	N⁸	N⁹	N¹⁰

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
61	3721	226981	13845841	844596301	51520374361
62	3844	238328	14776336	916132832	56800235584
63	3969	250047	15752961	992436543	62523502209
64	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736
65	4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
66	4356	287496	18974736	1252332576	82653950016
67	4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
68	4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
69	4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
70	4900	343000	24010000	1680700000	117649000000
71	5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
72	5184	373248	26873856	1934917632	139314069504
73	5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
74	5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
75	5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
76	5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
77	5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
78	6084	474552	37015056	2887174368	225199600704
79	6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
80	6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
81	6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
82	6724	551308	45212176	3707398432	304006671424
83	6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
84	7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
85	7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
86	7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
87	7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
88	7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
89	7921	704969	62742241	5584059449	496981290961
90	8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
91	8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
92	8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
93	8649	804357	74805201	6956883693	646990183449
94	8836	830584	78074896	7339040224	689869781056
95	9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
96	9216	884736	84934656	8153726976	782757789696
97	9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
98	9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
99	9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000
101	10201	1030301	104060401	10510100501	1061520150601
02	10404	1061208	108243216	11040808032	1126162419264
03	10609	1092727	112550881	11592740743	1194052296529
04	10816	1124864	116985856	12166529024	1265319018496
05	11025	1157625	121550625	12762815625	1340095640625
106	11236	1191016	126247696	13382255776	1418519112256
07	11449	1225043	131079601	14025517307	1500730351849
08	11664	1259712	136048896	14693280768	1586874322944
09	11881	1295029	141158161	15386239549	1677100110841
10	12100	1331000	146410000	16105100000	1771561000000
111	12321	1367631	151807041	16850581551	1870414552161
12	12544	1404928	157351936	17623416832	1973822685184
13	12769	1442897	163047361	18424351793	2081951752609
14	12996	1481544	168896016	19254145824	2194972623936
15	13225	1520875	174900625	20113571875	2313060765625
116	13456	1560896	181063936	21003416576	2436396322816
17	13689	1601613	187388721	21924480357	2565164201769
18	13924	1643032	193877776	22877577568	2699554153024
19	14161	1685159	200533921	23863536599	2839760855281
20	14400	1728000	207360000	24883200000	2985984000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
121	14641	1771561	214358881	25937424601	3138428376721
22	14884	1815848	221533456	27027081632	3297303959104
23	15129	1860867	228886641	28153056843	3462825991689
24	15376	1906624	236421376	29316250624	3635215077376
25	15625	1953125	244140625	30517578125	3814697265625
126	15876	2000376	252047376	31757969376	4001504141376
27	16129	2048383	260144641	33038369407	4195872914689
28	16384	2097152	268435456	34359738368	4398046511104
29	16641	2146689	276922881	35723051649	4608273662721
30	16900	2197000	285610000	37129300000	4826809000000
131	17161	2248091	294499921	38579489651	5053913144281
32	17424	2299968	303595776	40074642432	5289852801024
33	17689	2352637	312900721	41615795893	5534900853769
34	17956	2406104	322417936	43204003424	5789336458816
35	18225	2460375	332150625	44840334375	6053445140625
136	18496	2515456	342102016	46525874176	6327518887936
37	18769	2571353	352275361	48261724457	6611856250609
38	19044	2628072	362673936	50049003168	6906762437184
39	19321	2685619	373301041	51888844699	7212549413161
40	19600	274 000	384160000	53782400000	7529536000000
141	19881	2803221	395254161	55730830701	7858047974841
42	20164	2863288	406586896	57735339232	8198418170944
43	20449	2924207	418161601	59797108943	8550986578849
44	20736	2985984	429981696	61917364224	8916100448256
45	21025	3048625	442050625	64097340625	9294114390625
146	21316	3112136	454371856	66338290976	9685390482496
47	21609	3176523	466948881	68641485507	10090298369529
48	21904	3241792	479785216	71008211968	10509215371264
49	22201	3307949	492884401	73439775749	10942526586601
50	22500	3375000	506250000	75937500000	11390625000000
151	22801	3442951	519885601	78502725751	11853911588401
52	23104	3511808	533794816	81136812032	12332795428864
53	23409	3581577	547981281	83841135993	12827693806929
54	23716	3652264	562448656	86617093024	13339032325696
55	24025	3723875	577200625	89466096875	13867245015625
156	24336	3796416	592240896	92389579776	14412774445056
57	24649	3869893	607573201	95388992557	14976071831449
58	24964	3944312	623201296	98465804768	15557597153344
59	25281	4019679	639128961	101621504799	16157819263041
60	25600	4096000	655360000	104857600000	16777216000000
161	25921	4173281	671898241	108175616801	17416274304961
62	26244	4251528	688747536	111577100832	18075490334784
63	26569	4330747	705911761	115063617043	18755369578009
64	26896	4410944	723394816	118636749824	19456426971136
65	27225	4492125	741200625	122298103125	20179187015625
166	27556	4574296	759333136	126049300576	20924183895616
67	27889	4657463	777796321	129891985607	21691961596369
68	28224	4741632	796594176	133827821568	22483074023424
69	28561	4826809	815730721	137858491849	23298085122481
70	28900	4913000	835210000	141985700000	24137569000000
171	29241	5000211	855036081	146211169851	25002110044521
72	29584	5088448	875213056	150536645632	25892303048704
73	29929	5177717	895745041	154963892093	26808753332089
74	30276	5268024	916636176	159494694624	27752076864576
75	30625	5359375	937890625	164130859375	28722900390625
176	30976	5451776	959512576	168874213376	29721861554176
77	31329	5545233	981506241	173726604657	30749609024289
78	31684	5639752	1003875856	178689902368	31806802621504
79	32041	5735339	1026625681	183765996899	32894113444921
80	32400	5832000	1049760000	188956800000	34012224000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
181	32761	5929741	1073283121	194264244901	35161828327081
82	33124	6028568	1097199376	199690286432	36343632130624
83	33489	6128487	1121513121	205236901143	37558352909169
84	33856	6229504	1146228736	210906087424	38806720086016
85	34225	6331625	1171350625	216699865625	40089475140625
186	34596	6434856	1196883216	222620278176	41407371740736
87	34969	6539203	1222830961	228669389707	42761175875209
88	35344	6644672	1249198336	234849287168	44151665987584
89	35721	6751269	1275989841	241162079949	45579633110361
90	36100	6859000	1303210000	247609900000	47045881000000
191	36481	6967871	1330863361	254194901951	48551226272641
92	36864	7077888	1358954496	260919263232	50096498540544
93	37249	7189057	1387488001	267785184193	51682540549249
94	37636	7301384	1416468496	274794888224	53310208315456
95	38025	7414875	1445900625	281950621875	54980371265625
196	38416	7529536	1475789056	289254654976	56693912375296
97	38809	7645373	1506138481	296709280757	58451728309129
98	39204	7762392	1536953616	304316815968	60254729561664
99	39601	7880599	1568239201	312079600999	62103840598801
200	40000	8000000	1600000000	320000000000	64000000000000
201	40401	8120601	1632240801	328080401001	65944160601201
02	40804	8242408	1664966416	336323216032	67937289638464
03	41209	8365427	1698181681	344730881243	69980368892329
04	41616	8489664	1731891456	353305857024	72074394832896
05	42025	8615125	1766100625	362050628125	74220378765625
206	42436	8741816	1800814096	370967703776	76419346977856
07	42849	8869743	1836036801	380059617807	78672340886049
08	43264	8998912	1871773696	389328928768	80980417183744
09	43681	9129329	1908029761	398778220049	83344647990241
10	44100	9261000	1944810000	408410100000	85766121000000
211	44521	9393931	1982119441	418227202051	88245939632761
12	44944	9528128	2019963136	428232184832	90785223184384
13	45369	9663597	2058346161	438427732293	93385106978409
14	45796	9800344	2097273616	448816553824	96046742518336
15	46225	9938375	2136750625	459401384375	98771296410625
216	46656	10077696	2176782336	470184984576	101559956668416
17	47089	218313	2217373921	481170140857	4413920565969
18	47524	360232	2258530576	492359665568	7334407093824
19	47961	503459	2300257521	503756397099	110322650964681
20	48400	648000	2342560000	515363200000	3379904000000
221	48841	10793861	2385443281	527182965101	116507435287321
22	49284	941048	2428912656	539218609632	9706531338304
23	49729	11089567	2472973441	551473077343	122978496247489
24	50176	239424	2517630976	563949338624	6324651851776
25	50625	390625	2562890625	576650390625	9746337890625
226	51076	11543176	2608757776	589579257376	133244912166976
27	51529	697083	2655237841	602738989907	6821750708889
28	51984	852352	2702336256	616132666368	140478247931904
29	52441	12008989	2750058481	629763392149	4215816802121
30	52900	167000	2798410000	643634300000	8035889000000
231	53361	12326391	2847396321	657748550151	151939915084881
32	53824	487168	2897022976	672109330432	5929364660224
33	54289	649337	2947295521	686719856393	160005726539569
34	54756	812904	2998219536	701583371424	4170508913216
35	55225	977875	3049800625	716703146875	8425239515625
236	55696	13144256	3102044416	732082482176	172771465793536
37	56169	312053	3154956561	747724704957	7210755074809
38	56644	481272	3208542736	763633171168	181744694737984
39	57121	651919	3262808641	779811265199	6374892382561
40	57600	824000	3317760000	796262400000	191102976000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶
241	58081	13997521	3373402561	812990017201	195930594145441
42	58564	14172488	3429742096	829997587232	200859416110144
43	59049	348907	3486784401	847288609443	205891132094649
44	59536	526784	3544535296	864866612224	211027453382656
45	60025	706125	3603000625	882735153125	216270112515625
246	60516	14886936	3662186256	900897818976	221620863468096
47	61009	15069223	3722098081	919358226007	227081481823729
48	61504	252992	3782742016	938120019968	232653764952064
49	62001	438249	3844124001	957186876249	238339532186001
50	62500	625000	3906250000	976562500000	244140625000000
251	63001	15813251	3969126001	996250626251	250058907189001
52	63504	16003008	4032758016	1016255020032	256096265048064
53	64009	194277	4097152081	36579476493	262254607552729
54	64516	387064	4162314256	57227821024	268535866540096
55	65025	581375	4228250625	78203909375	274941996890625
256	65536	16777216	4294967296	1099511627776	281474976710656
57	66049	974593	4362470401	1121154893057	288136807515649
58	66564	17173512	4430766096	43137652768	294929514414144
59	67081	373979	4499860561	65463885299	301855146292441
60	67600	576000	4569760000	88137600000	308915776000000
261	68121	17779581	4640470641	1211162837301	316113500535561
62	68644	984728	4711998736	34543608832	323450441233984
63	69169	18191447	4784350561	58284197543	330928743953809
64	69696	399744	4857532416	82388557824	338550579265536
65	70225	609625	4931550625	1306860915625	346318142640625
266	70756	18821096	5006411536	1331705468576	354233654641216
67	71289	19034163	5082121521	56926446107	362299361110569
68	71824	248832	5158686976	82528109568	370517533364224
69	72361	465109	5236114321	1408514752349	378890468381881
70	72900	683000	5314410000	34890700000	387420489000000
271	73441	19902511	5393580481	1461660310351	396109944105121
72	73984	20123648	5473632256	88827973632	404961208827904
73	74529	346417	5554571841	1516398112593	413976684737889
74	75076	570824	5636405776	44375182624	423158800038976
75	75625	796875	5719140625	72763671875	432510009765625
276	76176	21024576	5802782976	1601568101376	442032795979776
77	76729	253933	5887339441	30793025157	451729667968489
78	77284	484952	5972816656	60443030368	461603162442304
79	77841	717639	6059221281	90522737399	471655843734321
80	78400	952000	6146560000	1721036800000	481890304000000
281	78961	22188041	6234839521	1751989905401	492309163417681
82	79524	425768	6324066576	83386774432	502915070389824
83	80089	665187	6414247921	1815232161643	513710701744969
84	80656	906304	6505390336	47530855424	524698762940416
85	81225	23149125	6597500625	80287678125	535881988265625
286	81796	23393656	6690585616	1913507486176	547263141046336
87	82369	639903	6784652161	47195170207	558845013849409
88	82944	887872	6879707136	81355655168	570630428688384
89	83521	24137569	6975757441	2015993900449	582622237229761
90	84100	389000	7072810000	5114900000	594823321000000
291	84681	24642171	7170871761	2086737682451	607236591593241
92	85264	897088	7269949696	2122825311232	619864990879744
93	85849	25153757	7370050801	59424884693	632711491215049
94	86436	412184	7471182096	96527536224	645779095649856
95	87025	672375	7573350625	2234138434375	659070828140625
296	87616	25934336	7676563456	2272262782976	672589783760896
97	88209	26198073	7780827681	2310905821257	686339028913329
98	88804	463592	7886150416	50072823968	700321701542464
99	89401	730899	7992538801	89769101499	714540961348201
300	90000	27000000	8100000000	243000000000	729000000000000
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶

N	N²	N³
301	90601	27270901
02	91204	543608
03	91809	818127
04	92416	28094464
05	93025	372625
306	93636	28652616
07	94249	934443
08	94864	29218112
09	95481	503629
10	96100	791000
311	96721	30080231
12	97344	371328
13	97969	664297
14	98596	959144
15	99225	31255875
316	99856	31554496
17	100489	855013
18	1124	32157432
19	1761	461759
20	2400	768000
321	103041	33076161
22	3684	386248
23	4329	698267
24	4976	34012224
25	5625	328125
326	106276	34645976
27	6929	965783
28	7584	35287552
29	8241	611289
30	8900	937000
331	109561	36264691
32	110224	594368
33	0889	926037
34	1556	37259704
35	2225	595375
336	112896	37933056
37	3569	38272753
38	4244	614472
39	4921	958219
40	5600	39304000
341	116281	39651821
42	6964	40001688
43	7649	353607
44	8336	707584
45	9025	41063625
346	119716	41421736
47	120409	781923
48	1104	42144192
49	1801	508549
50	2500	875000
351	123201	43243551
52	3904	614208
53	4609	986977
54	5316	44361864
55	6025	738874
356	126736	45118016
57	7449	499293
58	8164	882712
59	8881	46268279
60	9600	656000
N	N²	N³

N	N²	N³
361	130321	47045881
62	1044	437928
63	1769	832147
64	2496	48228544
65	3225	627125
366	133956	49027896
67	4689	430863
68	5424	836032
69	6161	50243409
70	6900	653000
371	137641	51064811
72	8384	478848
73	9129	895117
74	9876	52313624
75	140625	734375
376	141376	53157376
77	2129	582633
78	2884	54010152
79	3641	439939
80	4400	872000
381	145161	55306341
82	5924	742968
83	6689	56181887
84	7456	623104
85	8225	57066625
386	148996	57512456
87	9769	960603
88	150544	58411072
89	1321	863869
90	2100	59319000
391	152881	59776471
92	3664	60236288
93	4449	698457
94	5236	61162984
95	6025	629875
396	156816	62099136
97	7609	570773
98	8404	63044792
99	9201	521199
400	160000	64000000
401	160801	64481201
02	1604	964808
03	2409	65450827
04	3216	939264
05	4025	66430125
406	164836	66923416
07	5649	67419143
08	6464	917312
09	7281	68417929
10	8100	921000
411	168921	69426531
12	9744	934528
13	170569	70444997
14	1396	957944
15	2225	71473375
416	173056	71991296
17	3889	72511713
18	4724	73034632
19	5561	560059
20	6400	74088000
N	N²	N³

N	N²	N³
421	177241	74618461
22	8084	75151448
23	8929	75686967
24	9776	76225024
25	180625	76765625
426	181476	77308776
27	2329	77854483
28	3184	78402752
29	4041	78953589
30	4900	79507000
431	185761	80062991
32	6624	80621508
33	7489	81182737
34	8356	81746504
35	9225	82312875
436	190096	82881856
37	0969	83453453
38	1844	84027672
39	2721	84604519
40	3600	85184000
441	194481	85766121
42	5364	86350888
43	6249	86938307
44	7136	87528384
45	8025	88121125
446	198916	88710536
47	9809	89314623
48	200704	89915392
49	1601	90518849
50	2500	91125000
451	203401	91733851
52	4304	92345408
53	5209	92959677
54	6116	93576664
55	7025	94196375
456	207936	94818816
57	8849	95443993
58	9764	96071912
59	210681	96702579
60	1600	97336000
461	212521	97972181
62	3444	98611128
63	4369	99252847
64	5296	99897344
65	6225	100544625
466	217156	101194696
67	8089	1847563
68	9024	2503232
69	9961	3161709
70	220900	3823000
471	221841	104487111
72	2784	5154048
73	3729	5823817
74	46 6	6496424
75	5625	7171875
476	226576	107850176
77	7529	8531333
78	8484	9215352
79	9441	9902239
80	230400	110592000
N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
481	231361	111284641	541	292681	158340421	601	361201	217081801
82	2324	1980168	42	3764	9220088	02	2404	8167208
83	3289	2678587	43	4849	160103007	03	3609	9256227
84	4256	3379904	44	5936	0989184	04	4816	220348864
85	5225	4084125	45	7025	1878625	05	6025	1445125
486	236196	114791256	546	298116	162771336	606	367236	222545016
87	7169	5501303	47	9209	3667323	07	8449	3648543
88	8144	6214272	48	300304	4566592	08	9664	4755712
89	9121	6930169	49	1401	5469149	09	370881	5866529
90	240100	7649000	50	2500	6375000	10	2100	6981000
491	241081	118370771	551	303601	167284151	611	373321	228099131
92	2064	9095488	52	4704	8196608	12	4544	9220928
93	3049	9823157	53	5809	9112377	13	5769	230346397
94	4036	120553784	54	6916	170031464	14	6996	1475544
95	5025	1287375	55	8025	0953875	15	8225	2608375
496	246016	122023936	556	309136	171879616	616	379456	233744896
97	7009	2763473	57	310249	2808693	17	380689	4885213
98	8004	3505992	58	1364	3741112	18	1924	6029032
99	9001	4251499	59	2481	4676879	19	3161	7176659
500	250000	5000000	60	3600	5616000	20	4400	8328000
501	251001	125751501	561	314721	176558481	621	385641	239483061
02	2004	6506008	62	5844	7504328	22	6884	240641848
03	3009	7263527	63	6969	8453547	23	8129	1804367
04	4016	8024064	64	8096	9406144	24	9376	2970624
05	5025	8787625	65	9225	180362125	25	390625	4140625
506	256036	129554216	566	320356	181321496	626	391876	245314376
07	7049	130323843	67	1489	2284263	27	3129	6491883
08	8064	1096512	68	2624	3250432	28	4384	7673152
09	9081	1872229	69	3761	4220009	29	5641	8858189
10	260100	2651000	70	4900	5193000	30	6900	250047000
511	261121	133432831	571	326041	186169411	631	398161	251239591
12	2144	4217728	72	7184	7149248	32	9424	2435968
13	3169	5005697	73	8329	8132517	33	400689	3636137
14	4196	5796744	74	9476	9119224	34	1956	4840104
15	5225	6590875	75	330625	190109375	35	3225	6047875
516	266256	137388096	576	331776	191102976	636	404496	257259456
17	7289	8188413	77	2929	2100033	37	5769	8474853
18	8324	8991832	78	4084	3100552	38	7044	9694072
19	9361	9798359	79	5241	4104539	39	8321	260917119
20	270400	140608000	80	6400	5112000	40	9600	2144000
521	271441	141420761	581	337561	196122941	641	410881	263374721
22	2484	2236648	82	8724	7137368	42	2164	4609288
23	3529	3055667	83	9889	8155287	43	3449	5847707
24	4576	3877824	84	341056	9176704	44	4736	7089984
25	5625	4703125	85	2225	200201625	45	6025	8336125
526	276676	145531576	586	343396	201230056	646	417316	269586136
27	7729	6363183	87	4569	2262003	47	8609	270840023
28	8784	7197952	88	5744	3297472	48	9904	2097792
29	9841	8035889	89	6921	4336469	49	421201	3359449
30	280900	8877000	90	8100	5379000	50	2500	4625000
531	281961	149721291	591	349281	206425071	651	423801	275894451
32	3024	150568768	92	350464	7474688	52	5104	7167808
33	4089	1419437	93	1649	8527857	53	6409	8445077
34	5156	2273304	94	2836	9584584	54	7716	9726264
35	6225	3130375	95	4025	210644875	55	9025	281011375
536	287296	153990656	596	355216	211708736	656	430336	282300416
37	8369	4854153	97	6409	2776173	57	1649	3593393
38	9444	5720872	98	7604	3847192	58	2964	4890312
39	290521	6590819	99	8801	4921799	59	4281	6191179
40	1600	7464000	600	360000	6000000	60	5600	7496 00
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N^2	N^3
661	436921	2888[illegible]81
62	8244	290117528
63	9569	1434247
64	440896	2754944
65	2225	4079625
666	443556	295408296
67	4889	6740963
68	6224	8077632
69	7561	9418309
70	8900	300763000
671	450241	302111711
72	1584	3464448
73	2929	4821217
74	4276	6182024
75	5625	7546875
676	456976	308915776
77	8329	310288733
78	9684	1665752
79	461041	3046839
80	2400	4432000
681	463761	315821241
82	5124	7214568
83	6489	8611987
84	7856	320013504
85	9225	1419125
686	470596	322828856
87	1969	4242703
88	3344	5660672
89	4721	7082769
90	6100	8509000
691	477481	329939371
92	886	331373888
93	480249	2812557
94	1636	4255384
95	3025	5702375
696	484416	337153536
97	5809	8608873
98	7204	340068392
99	8601	1532099
700	490000	3000000
701	491401	344472101
02	2804	5948408
03	4209	7428927
04	5616	8913664
05	7025	350402625
706	498436	351895816
07	9849	3393243
08	501264	4894912
09	2681	6400829
10	4100	7911000
711	505521	359425431
12	6944	360944128
13	8369	2467097
14	9796	3994344
15	511225	5525875
716	512656	367061696
17	4089	8601813
18	5524	370146232
19	6961	1694959
20	8400	3248000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
721	519841	374805361
22	521284	6367048
23	2729	7933067
24	4176	9503424
25	5625	381078125
726	527076	382657176
27	8529	4240583
28	9984	5828352
29	531441	7420489
30	2900	9017000
731	534361	390617891
32	5824	2223168
33	7289	3832837
34	8756	5446904
35	540225	7065375
736	541696	398688256
37	3169	400315553
38	4644	1947272
39	6121	3583419
40	7600	5224000
741	549081	406869021
42	550564	8518488
43	2049	410172407
44	3536	1830784
45	5025	3493625
746	556516	415160936
47	8009	6832723
48	9504	8508992
49	561001	420189749
50	2500	1875000
751	564001	423564751
52	5504	5259008
53	7009	6957777
54	8516	8661064
55	570025	430368875
756	571536	432081216
57	3049	3798093
58	4564	5519512
59	6081	7225479
60	7600	8976000
761	579121	440711081
62	580644	2450728
63	2169	4194947
64	3696	5943744
65	5225	7697125
766	586756	449455096
67	8289	451217663
68	9824	2984832
69	591361	4756609
70	2900	6533000
771	594441	458314011
72	5984	460099648
73	7529	1889917
74	9076	3684824
75	600625	5484375
776	602176	467288576
77	3729	9097433
78	5284	470910952
79	6841	2729139
80	8400	4552000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
781	609961	476379541
82	611524	8211768
83	3089	480048687
84	4656	1890304
85	6225	3736625
786	617796	485587656
87	9369	7443403
88	620944	9303872
89	2521	491169069
90	4100	3039000
791	625681	494913671
92	7264	6793088
93	8849	8677257
94	630436	500566184
95	2025	2459875
796	633616	504358336
97	5209	6261573
98	6804	8169592
99	8401	510082399
800	640000	2000000
801	641601	513922401
02	3204	5849608
03	4809	7781627
04	6416	9718464
05	8025	521660125
806	649636	523606616
07	651249	5557943
08	2864	7514112
09	4481	9475129
10	6100	531441000
811	657721	533411731
12	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	7367797
14	2596	9353144
15	4225	541343375
816	665856	543338496
17	7489	5338513
18	9124	7343432
19	670761	9353259
20	2400	551368000
821	674041	553387661
22	5684	5412248
23	7329	7441767
24	8976	9476224
25	680625	561515625
826	682276	563559976
27	3929	5609283
28	5584	7663552
29	7241	9722789
30	8900	571787000
831	690561	573856191
32	2224	5930368
33	3889	8009537
34	5556	580093704
35	7225	2182875
836	698896	584277056
37	700569	6376253
38	2244	8480472
39	3921	590589719
40	5600	2704000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
841	707281	594823321
42	8964	6947088
43	710649	9077107
44	2336	601211584
45	4025	3351125
840	715716	605495736
47	7409	7645423
48	9104	9800192
49	720801	611960049
5	2500	4125000
851	724201	616295051
52	5904	8470208
53	7609	620650477
54	9316	2835864
55	731025	5026375
850	732736	627222010
57	4449	9422793
58	6164	631628712
59	7381	3839779
60	9600	6056000
861	741321	638277381
62	3044	640503928
63	4769	2735647
64	6496	4972548
65	8225	7214625
800	749956	649461896
67	751689	651714363
68	3424	3972032
69	5161	6234909
70	6900	8503000
871	758641	660776311
72	760384	3054848
73	2129	5338617
74	3876	7627624
75	5625	9921875
876	767376	672221370
77	9129	4526133
78	770884	6836152
79	2641	9151439
8	4400	681472000
881	776161	683797841
82	7924	6128968
83	9689	8465387
8	781456	690807104
85	3225	3155125
886	784996	695506456
87	6769	7864103
88	8544	700227072
89	790321	2595369
9	2100	4969020
891	793881	707347971
92	5664	9732288
93	7449	712121957
9	9236	4516984
95	801025	6917375
896	802816	719323136
97	4609	721734273
98	6404	4155792
99	8201	6572699
900	810000	9000000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
901	811801	731432701
02	3604	3870808
03	5409	6314327
04	7216	8763264
05	9025	741217625
906	820836	743677416
07	2649	6142643
08	4464	8613312
09	6281	751089429
10	8100	3571000
911	829921	756058031
12	831744	8550528
13	3569	761048497
14	5396	3551944
15	7225	6060875
916	839056	768575296
17	840889	771095213
18	2724	3620632
19	4561	6151559
20	6400	8688000
921	848241	781229961
22	850084	3777448
23	1929	6330467
24	3776	8889024
25	5625	791453125
926	857476	794022776
27	9329	6597983
28	861184	9178752
29	3041	801765089
30	4900	4357000
931	866761	806954491
32	8624	9557568
33	870489	812166237
34	2356	4780504
35	4225	7400375
936	876096	820025856
37	7969	2656953
38	9844	5293672
39	881721	7936019
40	3600	830584000
941	885481	833237621
42	7364	5896888
43	9249	8561807
44	891136	841232384
45	3025	3908625
946	894916	846590536
47	6809	9278123
48	8704	851971392
49	900601	4670349
50	2500	7375000
951	904401	860085351
52	6304	2801408
53	8209	5523177
54	910116	8250664
55	2025	870983875
956	913936	873722816
57	5849	6467493
58	7764	9217912
59	9681	881974079
60	921600	4736000
N	N^2	N^3

N	N^2	N^3
961	923521	887503681
62	5444	890277128
63	7369	3056347
64	9296	5841344
65	931225	8632125
966	933156	901428696
67	5089	4231063
68	7024	7039232
69	8961	9853209
70	940900	912673000
971	942841	915498611
72	4784	8330048
73	6729	921167317
74	8676	4010424
75	950625	6859375
976	952570	929714170
77	4529	932574833
78	6484	5441352
79	8441	8313739
80	960400	941192000
981	962361	944076141
82	4324	6966168
83	6289	9862087
84	8256	952763904
85	970225	5671625
986	972196	958585256
87	4169	961504803
88	6144	4430272
89	8121	7361669
90	980100	970299000
991	982081	973242271
92	4064	6191488
93	6049	9146657
94	8036	982107784
95	990025	5074875
996	992016	988047936
97	4009	991026973
98	6004	4011992
99	8001	7002999
1000	1000000	1000000000
1001	1002001	1003003001
02	04004	06012008
03	06009	09027027
04	08016	12048064
05	10025	15075125
1006	1012036	1018108216
07	14049	21147343
08	16064	24192512
09	18081	27243729
10	20100	30301000
1011	1022121	1033364331
12	24144	36433728
13	26169	39509197
14	28196	42590744
15	30225	45678375
1016	1032256	1048772096
17	34289	51871913
18	36324	54977832
19	38361	58089859
20	40400	61208000
N	N^2	N^3

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1021	1042441	1064332261	1081	1168561	1263214441	1141	1301881	1485446221
22	44484	67462648	82	70724	66723368	42	04164	89355288
23	46529	70599167	83	72889	70238787	43	06449	93271207
24	48576	73741824	84	75056	73760704	44	08736	97193984
25	50625	76890625	85	77225	77289125	45	11025	1501123625
1026	1052676	1080045576	1086	1179396	1280824056	1146	1313316	1505060136
27	54729	83206683	87	81509	84365503	47	15609	09003523
28	56784	86373952	88	83744	87913472	48	17904	12953792
29	58841	89547389	89	85921	91467969	49	20201	16910949
30	60900	92727000	90	88100	95029000	50	22500	20875000
1031	1062961	1095912791	1091	1190281	1298596571	1151	1324801	1524845951
32	65024	99104768	92	92464	1302170688	52	27104	28823808
33	67089	1102302937	93	94649	05751357	53	29409	32808577
34	69156	05507304	94	96836	04338584	54	31716	36800264
35	71225	08717875	95	99025	12932375	55	34025	40798875
1036	1073296	1111934656	1096	1201216	1316532736	1156	1336336	1544804416
37	75369	15157653	97	03409	20139673	57	38649	48816893
38	77444	18386872	98	05604	23753192	58	40964	52836312
39	79521	21622319	99	07801	27373299	59	43281	56862679
40	81600	24864000	1100	10000	31000000	60	45600	60896000
1041	1083681	1128111921	1101	1212201	1334633301	1161	1347921	1564936281
42	85764	31366088	02	14404	38273208	62	50244	68983528
43	87849	34626507	03	16609	41919727	63	52569	73037747
44	89936	37893184	04	18816	45572864	64	54896	77098944
45	92025	41166125	05	21025	49232625	65	57225	81167125
1046	1094116	1144445336	1106	1223236	1352899016	1166	1359556	1585242296
47	96209	47730823	07	25449	56572043	67	61889	89324463
48	98304	51022592	08	27664	60251712	68	64224	93413632
49	1100401	54320649	09	29881	63938029	69	66561	97509809
50	02500	57625000	10	32100	67631000	70	68900	1601613000
1051	1104601	1160935651	1111	1234321	1371330031	1171	1371241	1605723211
52	06704	64252608	12	36544	75036928	72	73584	09840448
53	08809	67575877	13	38769	78749897	73	75929	13964717
54	10916	70905464	14	40996	82469544	74	78276	18096024
55	13025	74241375	15	43225	86195875	75	80625	22234375
1056	1115136	1177583616	1116	1245456	1389928896	1176	1382976	1626379776
57	17249	80932193	17	47689	93668613	77	85329	30532233
58	19364	84287112	18	49924	97415032	78	87684	34691752
59	21481	87648379	19	52161	1401168159	79	90041	38858339
60	23600	91016000	20	54400	04928000	80	92400	43032000
1061	1125721	1194389981	1121	1256641	1408694561	1181	1394761	1647212741
62	27844	97770328	22	58884	12467848	82	97124	51400568
63	29969	1201157047	23	61129	16247867	83	99489	55595487
64	32096	04550144	24	63376	20034624	84	1401856	59797504
65	34225	07949625	25	65625	23828125	85	04225	64006625
1066	1136356	1211355496	1126	1267876	1427628376	1186	1406596	1668222856
67	38489	14767763	27	70129	31435383	87	08969	72446203
68	40624	18186432	28	72384	35249152	88	11344	76676672
69	42761	21611509	29	74641	39069689	89	13721	80914269
70	44900	25043000	30	76900	42897000	90	16100	85159000
1071	1147041	1228480911	1131	1279161	1446731091	1191	1418481	1689410871
72	49184	31925248	32	81424	50571968	92	20864	93669888
73	51329	35376017	33	83689	54419637	93	23249	97936057
74	53476	38833224	34	85956	58274104	94	25636	1702209384
75	55625	42296875	35	88225	62135375	95	28025	06489875
1076	1157776	1245766976	1136	1290496	1466003456	1196	1430416	1710777536
77	59929	49243533	37	92769	69878353	97	32809	15072373
78	62084	52726552	38	95044	73760072	98	35204	19374392
79	64241	56216039	39	97321	77648619	99	37601	23683599
80	66400	59712000	40	99600	81544000	1200	40000	28000000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1201	1442401	1732323601	1261	1590121	2005142581	1321	1745041	2305199161
02	44804	36654408	62	92644	09916728	22	47684	10438248
03	47209	40992427	63	95169	14698447	23	50329	15685267
04	49616	45337664	64	97696	19487744	24	52976	20940224
05	52025	49690125	65	1600225	24284625	25	55625	26203125
1206	1454436	1754049816	1266	1602756	2029089096	1326	1758276	2331473976
07	56849	58416743	67	05289	33901163	27	60929	36752783
08	59264	62790912	68	07824	38720832	28	63584	42039552
09	61681	67172329	69	10361	43548109	29	66241	47334289
10	64100	71561000	70	12900	48383000	30	68900	52637000
1211	1466521	1775956931	1271	1615441	2053225511	1331	1771561	2357947691
12	68944	80360128	72	17984	58075648	32	74224	63266368
13	71369	84770597	73	20529	62933417	33	76889	68593037
14	73796	89188344	74	23076	67798824	34	79556	73927704
15	76225	93613375	75	25625	72671875	35	82225	79270375
1216	1478656	1798045696	1276	1628176	2077552576	1336	1784896	2384621056
17	81089	1802485313	77	30729	82440933	37	87569	89979753
18	83524	06932232	78	33284	87336952	38	90244	95346472
19	85961	11386459	79	35841	92240639	39	92921	2400721219
20	88400	15848000	80	38400	97152000	40	95600	06104000
1221	1490841	1820316861	1281	1640961	2102071041	1341	1798281	2411494821
22	93284	24793048	82	43524	06997768	42	1800964	16893688
23	95729	29276567	83	46089	11932187	43	03649	22300607
24	98176	33767424	84	48656	16874304	44	06336	27715584
25	1500625	38265625	85	51225	21824125	45	10025	33138625
1226	1503076	1842771176	1286	1653796	2126781656	1346	1811716	2438569736
27	05529	47284083	87	56369	31746903	47	14409	44008923
28	07984	51804352	88	58944	36719872	48	17104	49456192
29	10441	56331989	89	61521	41700569	49	19801	54911549
30	12900	60867000	90	64100	46689000	50	22500	60375000
1231	1515361	1865409391	1291	1666681	2151685171	1351	1825201	2465846551
32	17824	69959168	92	69264	56689088	52	27904	71326208
33	20289	74516337	93	71849	61700757	53	30609	76813977
34	22756	79080904	94	74436	66720184	54	33316	82309864
35	25225	83652875	95	77025	71747375	55	36025	87813875
1236	1527696	1888232256	1296	1679616	2176782336	1356	1838736	2493326016
37	30169	92819053	97	82209	81825073	57	41449	98846293
38	32644	97413272	98	84804	86875592	58	44164	2504374712
39	35121	1902014919	99	87401	91933899	59	46881	09911279
40	37600	06624000	1300	90000	97000000	60	49600	15456000
1241	1540081	1911240521	1301	1692601	2202073901	1361	1852321	2521008881
42	42564	15864488	02	95204	07155608	62	55044	26569928
43	45049	20495907	03	97809	12245127	63	57769	32139147
44	47536	25134784	04	1700416	17342464	64	60496	37716544
45	50025	29781125	05	03025	22447625	65	63225	43302125
1246	1552516	1934434936	1306	1705636	2227560616	1366	1865956	2548895896
47	55009	39096223	07	08249	32681443	67	68689	54497863
48	57504	43764992	08	10864	37810112	68	71424	60108032
49	60001	48441249	09	13481	42946629	69	74161	65726409
50	62500	53125000	10	16100	48091000	70	76900	71353000
1251	1565001	1957816251	1311	1718721	2253243231	1371	1879641	2576987811
52	67504	62515008	12	21344	58403328	72	82384	82630848
53	70009	67221277	13	23969	63571297	73	85129	88282117
54	72516	71935064	14	26596	68747144	74	87876	93941624
55	75025	76656375	15	29225	73930875	75	90625	99609375
1256	1577536	1981385216	1316	1731856	2279122496	1376	1893376	2605285376
57	80049	86125593	17	34489	84322013	77	96129	10969633
58	82564	90865512	18	37124	89529432	78	98884	16662152
59	85081	95616979	19	39761	94744759	79	1901641	22362939
60	87600	2000376000	20	42400	99968000	80	04400	28072000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1381	1907161	2633789341	1441	2076481	2992209121	1501	2253001	3381754501
82	09924	39514968	42	79364	98442888	02	56004	88518008
83	12689	45248887	43	82249	3004685307	03	59009	95290527
84	15456	50991104	44	85136	10936384	04	62016	3402072004
85	18225	56741625	45	88025	17196125	05	65025	08802625
1386	1920996	2662500456	1446	2090916	3023464536	1506	2268036	3415662216
87	23769	68267603	47	93809	29741623	07	71049	22470843
88	26544	74043072	48	96704	36027392	08	74064	29288512
89	29321	79826869	49	99601	42321849	09	77081	36115229
90	32100	85619000	50	2102500	48025000	10	80100	42951000
1391	1934881	2691419471	1451	2105401	3054936851	1511	2283121	3449795831
92	37664	97228288	52	08304	61257408	12	86144	56649728
93	40449	2703045457	53	11209	67580677	13	89169	63512697
94	43236	08870984	54	14116	73924664	14	92196	70384744
95	46025	14704875	55	17025	80271375	15	95225	77265875
1396	1948816	2720547136	1456	2119936	3086626816	1516	2298256	3484156096
97	51609	26397773	57	22849	92990993	17	2301289	91055413
98	54404	32256792	58	25764	99363912	18	04324	97963832
99	57201	38124199	59	28681	3105745579	19	07361	3504881359
1400	60000	44000000	60	31600	12136000	20	10400	11808000
1401	1962801	2749884201	1461	2134521	3118535181	1521	2313441	3518743761
02	65604	55776808	62	37444	24943128	22	16484	25688648
03	68409	61677827	63	40369	31359847	23	19529	32642667
04	71216	6758726	64	43296	37785344	24	22576	39605824
05	74025	73505125	65	46225	44219625	25	25625	46578125
1406	1976836	2779431416	1466	2149156	3150662696	1526	2328676	3553559576
07	79649	85366143	67	52089	57114563	27	31729	60550183
08	82464	91309312	68	55024	63575232	28	34784	67549952
09	85281	97260929	69	57961	70044709	29	37841	74558889
10	88100	2803221000	70	60900	76523000	30	40900	81577000
1411	1990921	2809189531	1471	2163841	3183010111	1531	2343961	3588604291
12	93744	15166528	72	66784	89506048	32	47024	95640768
13	96569	21151997	73	69729	96010817	33	50089	3602686437
14	99396	27145944	74	72676	3202524424	34	53156	09741304
15	2002225	33148375	75	75625	09046875	35	56225	16805375
1416	2005056	2839159296	1476	2178576	3215578176	1536	2359296	3023878656
17	07889	45178713	77	81529	22118333	37	62369	30961153
18	10724	51206632	78	84484	28667352	38	65444	38052872
19	13561	57243059	79	87441	35225239	39	68521	45153819
20	16400	63288000	80	90400	41792000	40	71600	52264000
1421	2019241	2869341461	1481	2193361	3248367641	1541	2374681	3659383421
22	22084	75403448	82	96324	54952168	42	77764	66512088
23	24929	81473967	83	99289	61545587	43	80849	73650007
24	27776	87553024	84	2202256	68147904	44	83936	80797184
25	30625	93640625	85	05225	74759125	45	87025	87953625
1426	2033476	2899736776	1486	2208196	3281379256	1546	2390116	3695119336
27	36329	2905841483	87	11169	88008303	47	93209	3702294323
28	39184	11954752	88	14144	94646272	48	96304	09478592
29	42041	18076589	89	17121	3301293169	49	99401	16672149
30	44900	24207000	90	20100	07949000	50	2402500	23875000
1431	2047761	2930345991	1491	2223081	3314613771	1551	2405601	3731087151
32	50624	36493568	92	26064	21 87488	52	08704	38308608
33	53489	42649737	93	29049	27970157	53	11809	45539377
34	56356	48814504	94	32036	34661784	54	14916	52779464
35	59225	54987875	95	35025	41362375	55	18025	60028875
1436	2062096	2961169856	1496	2238016	3348071936	1556	2421136	3767287616
37	64969	67360453	97	41009	54790473	57	24249	74555693
38	67844	73559672	98	44004	61517992	58	27364	81833112
39	70721	79767519	99	47001	68254499	59	30481	89119879
40	73600	85984000	1500	50000	75000000	60	33600	96416000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1561	2436721	3803721481	1621	2627641	4259406061	1681	2825761	4750104241
62	39844	11036328	22	30884	67293848	82	29124	58586568
63	42969	18360547	23	34129	75191367	83	32489	67078987
64	46096	25694144	24	37376	83098624	84	35856	75581504
65	49225	33037125	25	40625	91015625	85	39225	84094125
1566	2452356	3840389496	1626	2643876	4298942376	1686	2842596	4792616856
67	55489	47751263	27	47129	4306878883	87	45969	4801149703
68	58624	55122432	28	50384	14825152	88	49344	09692672
69	61761	62503009	29	53641	22781189	89	52721	18245769
70	64900	69893000	30	56900	30747000	90	56100	26809000
1571	2468041	3877292411	1631	2660161	4338722591	1691	2859481	4835382371
72	71184	84701248	32	63424	46707968	92	62864	43965888
73	74329	92119517	33	66689	54703137	93	66249	52559557
74	77476	99547224	34	69956	62708104	94	69636	61163384
75	80625	3906984375	35	73225	70722875	95	73025	69777375
1576	2483776	3914430976	1636	2676496	4378747456	1696	2876416	4878401536
77	86929	21887033	37	79769	86781853	97	79809	87035873
78	90084	29352552	38	83044	94826072	98	83204	95680392
79	93241	36827539	39	86321	4402880119	99	86601	4904335099
80	96400	44312000	40	89600	10944000	1700	90000	13000000
1581	2499561	3951805941	1641	2692881	4419017721	1701	2893401	4921675101
82	2502724	59309368	42	96164	27101288	02	96804	30360408
83	05889	66822287	43	99449	35194707	03	2900209	39055927
84	09056	74344704	44	2702736	43297984	04	03616	47761664
85	12225	81876625	45	06025	51411125	05	07025	56477625
1586	2515396	3989418056	1646	2709316	4459534136	1706	2910436	4965203816
87	18569	96969003	47	12609	67667023	07	13849	73940243
88	21744	4004529472	48	15904	75809792	08	17264	82686912
89	24921	12099469	49	19201	83962449	09	20681	91443829
90	28100	19679000	50	22500	92125000	10	24100	5000211000
1591	2531281	4027268071	1651	2725801	4500297451	1711	2927521	5008988431
92	34464	34866688	52	29104	08479808	12	30944	17776128
93	37649	42474857	53	32409	16672077	13	34369	26574097
94	40836	50092584	54	35716	24874264	14	37796	35382344
95	44025	57719875	55	39025	33086375	15	41225	44200875
1596	2547216	4065356736	1656	2742336	4541308416	1716	2944656	5053029696
97	50409	73003173	57	45649	49540393	17	48089	61868813
98	53604	80659192	58	48964	57782312	18	51524	70718232
99	56801	88324799	59	52281	66034179	19	54961	79577959
1600	60000	96000000	60	55600	74296000	20	58400	88448000
1601	2563201	4103684801	1661	2758921	4582567781	1721	2961841	5097328361
02	66404	11379208	62	62244	90849528	22	65284	5106219048
03	69609	19083227	63	65569	99141247	23	68729	15120067
04	72816	26796864	64	68896	4607442944	24	72176	24031424
05	76025	34520125	65	72225	15754625	25	75625	32953125
1606	2579236	4142253016	1666	2775556	4624076296	1726	2979076	5141885176
07	82449	49995543	67	78889	32407963	27	82529	50827583
08	85664	57747712	68	82224	40749632	28	85984	59780352
09	88881	65509529	69	85561	49101309	29	89441	68743489
10	92100	73281000	70	88900	57463000	30	92900	77717000
1611	2595321	4181062131	1671	2792241	4665834711	1731	2996361	5186700891
12	98544	88852928	72	95584	74216448	32	99824	95695168
13	2601769	96653397	73	98929	82608217	33	3003289	5204699837
14	04996	4204463544	74	2802276	91010024	34	06756	13714904
15	08225	12282375	75	05625	99421875	35	10225	22740375
1616	2611456	4220112896	1676	2808976	4707843776	1736	3013696	5231776256
17	14689	27952113	77	12329	16275733	37	17169	40822553
18	17924	35801032	78	15684	24717752	38	20644	49879672
19	21161	43659659	79	19041	33169839	39	24121	58946419
20	24400	51528000	80	22400	41632000	40	27600	68024000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1741	3031081	5277112021	1801	3243601	5841725401	1861	3463321	6445240381
42	34564	86210488	02	47204	51461608	62	67044	55635928
43	38049	95319407	03	50809	61208627	63	70769	66042647
44	41536	5304438784	04	54416	70966464	64	74496	76460544
45	45025	13568625	05	58025	80735125	65	78225	86889625
1746	3048516	5322708936	1806	3261636	5890514616	1866	3481956	6497329896
47	52009	31859723	07	65249	5900304943	67	85689	6507781363
48	55504	41020992	08	68864	10106112	68	89424	18244032
49	59001	50192749	09	72481	19918129	69	93161	28717909
50	62500	59375000	10	76100	29741000	70	96900	39203000
1751	3066001	5368567751	1811	3279721	5939574731	1871	3500641	6549699311
52	69504	77771008	12	83344	49419328	72	04384	60206848
53	73009	86984777	13	86969	59274797	73	08129	70725617
54	76516	96209064	14	90596	69141144	74	11876	81255624
55	80025	5405443875	15	94225	79018375	75	15625	91796875
1756	3083536	5414689216	1816	3297856	5988906496	1876	3519376	6602349376
57	87049	23945093	17	3301489	98805513	77	23129	12913133
58	90564	33211512	18	05124	6008715432	78	26884	23488152
59	94081	42488479	19	08761	18636259	79	30641	34074439
60	97600	51775000	20	12400	28568000	80	34400	44672000
1761	3101121	5461074081	1821	3316041	6038510661	1881	3538161	6655280841
62	04644	70382728	22	19684	48464248	82	41924	65900968
63	08169	79701947	23	23329	58428767	83	45689	76532387
64	11696	89031744	24	26976	68404224	84	49456	87175104
65	15225	98372125	25	30625	78390625	85	53225	97829125
1766	3118756	5507723096	1826	3334276	6088387976	1886	3556996	6708494456
67	22289	17084663	27	37929	98396283	87	60769	19171103
68	25824	26456832	28	41584	6108415552	88	64544	29859072
69	29361	35839609	29	45241	18445789	89	68321	40558369
70	32900	45233000	30	48900	28487000	90	72100	51269000
1771	3136441	5554637011	1831	3352561	6138539191	1891	3575881	6761990971
72	39984	64051648	32	56224	48602368	92	79664	72724288
73	43529	73476917	33	59889	58676537	93	83449	83468957
74	47076	82912824	34	63556	68761704	94	87236	94224984
75	50625	92359375	35	67225	78857875	95	91025	6804992375
1776	3154176	5601816576	1836	3370896	6188965056	1896	3594816	6815771136
77	57729	11284433	37	74569	99083253	97	98609	26561273
78	61284	20762952	38	78244	6209212472	98	3602404	37362792
79	64841	30252139	39	81921	19352719	99	06201	48175699
80	68400	39752000	40	85600	29504000	1900	10000	59000000
1781	3171961	5649262541	1841	3389281	6239666321	1901	3613801	6869835701
82	75524	58783768	42	92964	49839688	02	17604	80682808
83	79089	68315687	43	96649	60024107	03	21409	91541327
84	82656	77858304	44	3400336	70219584	04	25216	6902411264
85	86225	87411625	45	04025	80426125	05	29025	13292625
1786	3189796	5696975656	1846	3407716	6290643736	1906	3632836	6924185416
87	93369	5706550403	47	11409	6300872423	07	36649	35089643
88	96944	16135872	48	15104	11112192	08	40464	46005312
89	3200521	25732069	49	18801	21363049	09	44281	56932429
90	04100	35339000	50	22500	31625000	10	48100	67871000
1791	3207681	5744956671	1851	3426201	6341898051	1911	3651921	6978821031
92	11264	54585088	52	29904	52182208	12	55744	89782528
93	14849	64224257	53	33609	62477477	13	59569	7000755497
94	18436	73874184	54	37316	72783864	14	63396	11739944
95	22025	83534875	55	41025	83101375	15	67225	22735875
1796	3225616	5793206336	1856	3444736	6393430016	1916	3671056	7033743296
97	29209	5802888573	57	48449	6403769793	17	74889	44762213
98	32804	12581592	58	52164	14120712	18	78724	55792632
99	36401	22285399	59	55881	24482779	19	82561	66834559
1800	40000	32000000	60	59600	34856000	20	86400	77888000
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³
1921	3690241	7088952961	1948	3794704	7392083392	1975	3900625	7703734375
22	94084	7100029448	49	98601	7403473349	76	04576	15442176
23	97929	11117467	50	3802500	14875000	77	08529	27161833
24	3701776	22217024	51	06401	26288351	78	12484	38893352
25	05625	33328125	52	10304	37713408	79	16441	50636739
1926	3709476	7144450776	1953	3814209	7449150177	1980	3920400	7762392000
27	13329	55584983	54	18116	60598664	81	24361	74159141
28	17184	66730752	55	22025	72058875	82	28324	85938168
29	21041	77888089	56	25936	83530816	83	32289	97729087
30	24900	89057000	57	29849	95014493	84	36256	7809531904
1931	3728761	7200237491	1958	3833764	7506509912	1985	3940225	7821346625
32	32624	11429568	59	37681	18017079	86	44196	33173256
33	36489	22633237	60	41600	29536000	87	48169	45011803
34	40356	33848504	61	45521	41066681	88	52144	56862272
35	44225	45075375	62	49444	52609128	89	56121	68724669
1936	3748096	7256313856	1963	3853369	7564163347	1990	3960100	7880599000
37	51969	67563953	64	57296	75729344	91	64081	92485271
38	55844	78825672	65	61225	87307125	92	68064	7904383488
39	59721	90099019	66	65156	98896696	93	72049	16293657
40	63600	7301384000	67	69089	7610498063	94	76036	28215784
1941	3767481	7312680621	1968	3873024	7622111232	1995	3980025	7940149875
42	71364	23988888	69	76961	33736209	96	84016	52095936
43	75249	35308807	70	80900	45373000	97	88009	64053973
44	79136	46640384	71	84841	57021611	98	92004	76023992
45	83025	57983625	72	88784	68682048	99	96001	88005999
1946	3786916	7369338536	1973	3892729	7680354317	2000	4000000	8000000000
47	90809	80705123	74	96676	92038424			
N	N²	N³	N	N²	N³	N	N²	N³

AVVISO SULLA TAVOLA SEGUENTE

La seguente Tavola esprime in decimali i rotti della serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ec. fino a $\frac{1}{700}$, cioè i rotti il cui Termine Generale è N^{-1}, fino ad $N = 700$.

TAVOLA DEI ROTTI 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} EC. IN DECIMALI

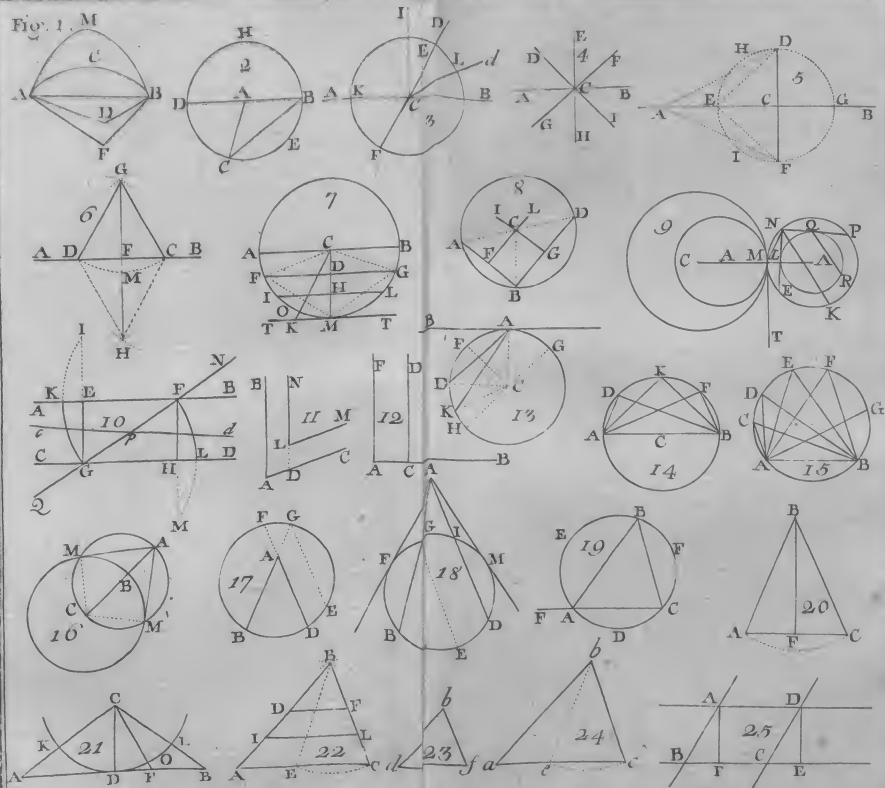
N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}
1	1	61	0,016393443	121	0,008264463	181	0,005524862
2	0,5.	62	129032	22	196721	82	0,005494505
3	333333333	63	0,015873016	23	130081	83	64481
4	25	64	625.	24	064516	84	34783
5	0,2.	65	384615	25	0,008.	85	05405
6	0,166666667	66	0,015151515	126	0,007936508	186	0,005376344
7	42857143	67	0,014925373	27	874016	87	47594
8	25.	68	705882	28	8125.	88	19149
9	11111111	69	492754	29	751938	89	0,005291005
10	0,1.	70	285714	30	692308	90	63158
11	0,090909091	71	0,014084507	131	0,007633588	191	0,005235602
12	83333333	72	0,013888889	32	575758	92	08333
13	76923077	73	698630	33	518797	93	0,005181347
14	71428571	74	513514	34	462687	94	54639
15	66666667	75	333333	35	407407	95	28205
16	0,0625.	76	0,013157895	136	0,007352941	196	0,005102041
17	0,058823529	77	0,012987013	37	299270	97	0,005076142
18	5555556	78	820513	38	246376	98	50505
19	2631579	79	658228	39	194245	99	25126
20	0,05.	80	0,0125.	40	142857	20	0,005.
21	0,047619048	81	0,012345679	141	0,007092199	201	0,004975124
22	5454545	82	195122	42	042254	02	50495
23	3478261	83	048193	43	0,006993007	03	26108
24	1666667	84	0,011904762	44	944444	04	01961
25	0,04.	85	764706	45	896552	05	0,004878049
26	0,038461538	86	0,011627907	146	0,006849315	206	0,004854369
27	7037037	87	494253	47	802721	07	30918
28	5714286	88	363636	48	756757	08	07692
29	4482759	89	235955	49	711409	09	0,004784689
30	3333333	90	111111	50	666667	10	61905
31	0,032258065	91	0,010989011	151	0,006622517	211	0,004739336
32	125.	92	869565	52	578947	12	16981
33	0303030	93	752688	53	535948	13	0,004694836
34	0,029411765	94	638298	54	493506	14	72897
35	8571429	95	526316	55	451613	15	51163
36	0,027777778	96	0,010416667	156	0,006410256	216	0,004629630
37	7027027	97	309278	57	369427	17	08295
38	6315789	98	204082	58	329114	18	0,004587156
39	5641026	99	101010	59	289308	19	66210
40	0,025.	100	0,01.	60	25.	20	45455
41	0,024390244	101	0,009900990	161	0,006211180	221	0,004524887
42	3809524	02	803922	62	172840	22	04505
43	3255814	03	708738	63	134969	23	0,004484305
44	2727273	04	615385	64	097561	24	64286
45	2222222	05	523810	65	060606	25	44444
46	0,021739130	106	0,009433962	166	0,006024096	226	0,084424779
47	1276596	07	345794	67	0,005988024	27	05286
48	0833333	08	259259	68	952381	28	0,004385965
49	0408163	09	174312	69	917160	29	66812
50	0,02.	10	090909	70	882353	30	47826
51	0,019607843	111	0,009009009	171	0,005847953	231	0,004329004
52	9230769	12	0,008928571	72	813953	32	10345
53	8867925	13	849557	73	780347	33	0,004291845
54	8518519	14	771930	74	747126	34	73504
55	8181818	15	695652	75	714286	35	55319
56	0,017857143	116	0,008620690	176	0,005681818	236	0,004237288
57	7543860	17	547009	77	649718	37	19409
58	7241379	18	474576	78	617978	38	01681
59	6949153	19	403361	79	586592	39	0,004184100
60	6666667	20	333333	80	555556	40	66667
N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}

N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}
241	0,004149377	301	0,003322259	361	0,002770083	421	0,002375297
42	32231	02	11258	62	62431	22	69668
43	15226	03	00330	63	54821	23	64067
44	0,004098361	04	0,003289474	64	47253	24	58491
45	81633	05	78689	65	39726	25	52941
246	0,004065041	306	0,003267974	366	0,002732240	426	0,002347418
47	48583	07	57329	67	24796	27	41920
48	32258	08	46753	68	17391	28	36449
49	16064	09	36246	69	10027	29	31002
50	0,004.	10	25806	70	02703	30	25581
251	0,003984064	311	0,003215434	371	0,002695418	431	0,002320186
52	68254	12	05128	72	88172	32	14815
53	52569	13	0,003194888	73	80965	33	09469
54	37008	14	84713	74	73797	34	04147
55	21569	15	74603	75	66667	35	0,002298851
256	0,00390625.	316	0,003164557	376	0,002659574	436	0,002293578
57	0,003891051	17	54574	77	52520	37	88330
58	75969	18	44654	78	45503	38	83105
59	61004	19	34796	79	38522	39	77904
60	46154	20	25.	80	31579	40	72727
261	0,003831418	321	0,003115265	381	0,002624672	441	0,002267574
62	16794	22	05590	82	17801	42	62443
63	02281	23	0,003095975	83	10966	43	57336
64	0,003787879	24	86420	84	04167	44	52252
65	73585	25	76923	85	0,002597403	45	47191
266	0,003759398	326	0,003067485	386	0,002590674	446	0,002242152
67	45318	27	58104	87	83979	47	37136
68	31343	28	48780	88	77320	48	32143
69	17472	29	39514	89	70694	49	27171
70	03704	30	30303	90	64103	50	22222
271	0,003690037	331	0,003021148	391	0,002557545	451	0,002217295
72	76471	32	12048	92	51020	52	12389
73	63004	33	03003	93	44529	53	07506
74	49635	34	0,002994012	94	38071	54	02643
75	36364	35	85075	95	31646	55	0,002197802
276	0,003623188	336	0,002976190	396	0,002525253	456	0,002192982
77	10108	37	67359	97	18892	57	88184
78	0,003597122	38	58580	98	12563	58	83406
79	84229	39	49852	99	06265	59	78649
80	71429	40	41176	400	0,0025.	60	73913
281	0,003558719	341	0,002932551	401	0,002493766	461	0,002169197
82	46099	42	23977	02	87562	62	64502
83	33569	43	15452	03	81390	63	59827
84	21127	44	06977	04	75248	64	55172
85	08772	45	0,002898551	05	69136	65	50538
286	0,003496503	346	0,002890173	406	0,002463054	466	0,002145923
87	84321	47	81844	07	57002	67	41328
88	72222	48	73563	08	50980	68	36752
89	60208	49	65330	09	44988	69	32196
90	48276	50	57143	10	39024,	70	27660
291	0,003436426	351	0,002849003	411	0,002433090	471	0,002123142
92	24658	52	40909	12	27184	72	18644
93	12969	53	32861	13	21308	73	14165
94	01361	54	24859	14	15459	74	09705
95	0,003389831	55	16901	15	09639	75	05263
296	0,003378378	356	0,002808989	416	0,002403846	476	0,002100840
97	67003	57	01120	17	0,002398082	77	0,002096436
98	55705	58	0,002793296	18	92345	78	92050
99	44482	59	85515	19	86035	79	87583
300	33333	60	77778	20	80952	80	83333
N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}	N	N^{-1}

N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹
481	0,002079002	536	0,001865672	591	0,001692047	646	0,001547988
82	74689	37	62197	92	89189	47	45595
83	70393	38	58736	93	86341	48	43210
84	66116	39	55288	94	83502	49	40832
85	61856	40	51852	95	80672	50	38462
486	0,002057613	541	0,001848429	596	0,001677852	651	0,001536093
87	53388	42	45018	97	75042	52	33742
88	49180	43	41621	98	72241	53	31394
89	44990	44	38235	99	69449	54	29052
90	40816	45	34862	600	66667	55	26718
491	0,002036660	546	0,001831502	601	0,001663894	656	0,001524390
92	32520	47	28154	02	61130	57	22070
93	28398	48	24818	03	58375	58	19757
94	24292	49	21494	04	55630	59	17451
95	20202	50	18182	05	52893	60	15152
496	0,002016129	551	0,001814882	606	0,001650165	661	0,001512859
97	12072	52	11594	07	47446	62	10574
98	08032	53	08318	08	44737	63	08296
99	04008	54	05054	09	42036	64	06024
500	0,002.	55	01802	10	39344	65	03759
501	0,001996008	556	0,001798561	611	0,001636661	666	0,001501501
02	92032	57	95332	12	33987	67	0,001499250
03	88072	58	92115	13	31321	68	97006
04	84127	59	88909	14	28664	69	94768
05	80198	60	85714	15	26016	70	92537
506	0,001976285	561	0,001782531	616	0,001623377	671	0,001490313
07	72387	62	79359	17	20746	72	88095
08	68504	63	76199	18	18123	73	85884
09	64637	64	73050	19	15509	74	83680
10	60784	65	69911	20	12903	75	81481
511	0,001956947	566	0,001766784	621	0,001610306	676	0,001479290
12	53125.	67	63668	22	07717	77	77105
13	49318	68	60563	23	05136	78	74926
14	45525	69	57469	24	02564	79	72754
15	41748	70	54386	25	0,0016.	80	70588
516	0,001937984	571	0,001751313	626	0,001597444	681	0,001468429
17	34236	72	48252	27	94896	82	66276
18	30502	73	45201	28	92357	83	64129
19	26782	74	42160	29	89825	84	61988
20	23077	75	39130	30	87302	85	59854
521	0,001919386	576	0,001736111	631	0,001584786	686	0,001457726
22	15709	77	33102	32	82278	87	55604
23	12046	78	30104	33	79779	88	53488
24	08397	79	27116	34	77287	89	51379
25	04762	80	24138	35	74803	90	49275
526	0,001901141	581	0,001721170	636	0,001572327	691	0,001447178
27	0,001897533	82	18213	37	69859	92	45087
28	93939	83	15266	38	67398	93	43001
29	90356	84	12329	39	64945	94	40922
30	86792	85	09402	40	625.	95	38849
531	0,001883239	586	0,001706485	641	0,001560062	696	0,001436782
32	79699	87	03578	42	57632	97	34720
33	76173	88	00680	43	55210	98	32665
34	72659	89	0,001697793	44	52795	99	30615
35	69159	90	94915	45	50388	700	28571
N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹	N	N⁻¹

FINE DELLE TAVOLE

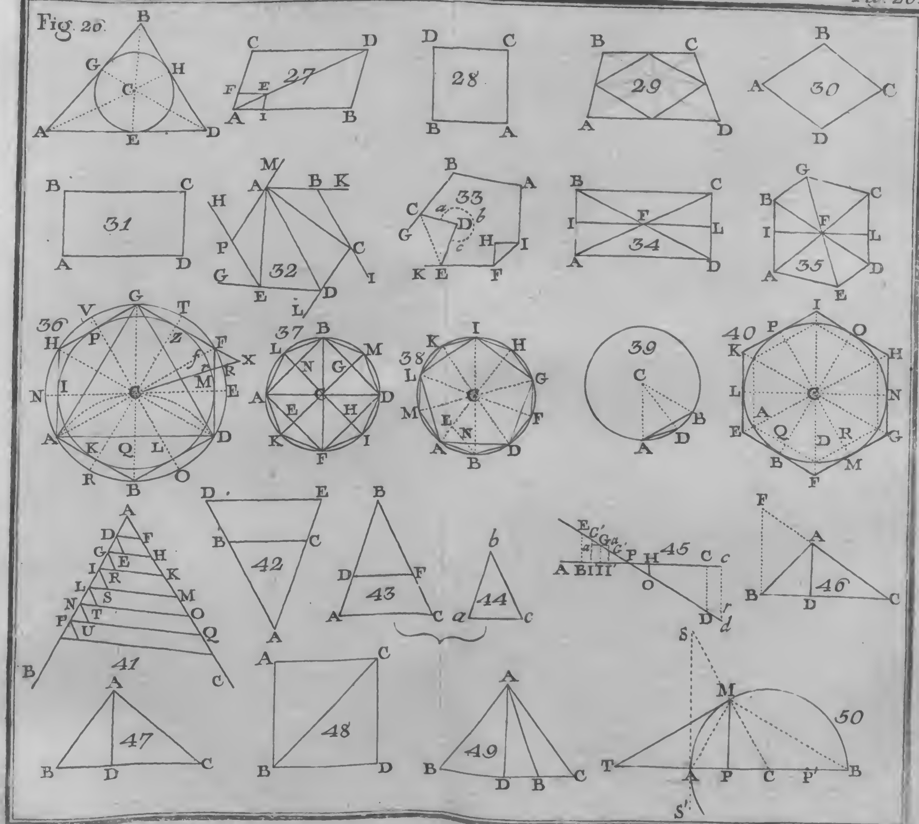
Tav. 1. Fig. 1.



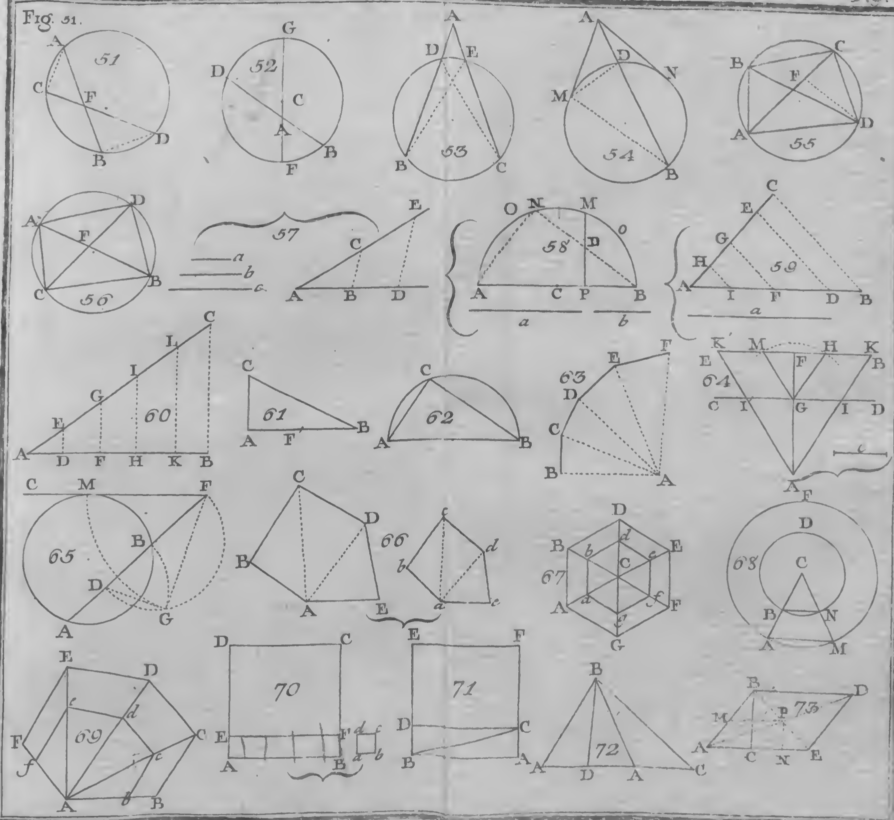
F. Allegrini scolpi.

Fig. 2

Tav. 2. *Fig. 26.*

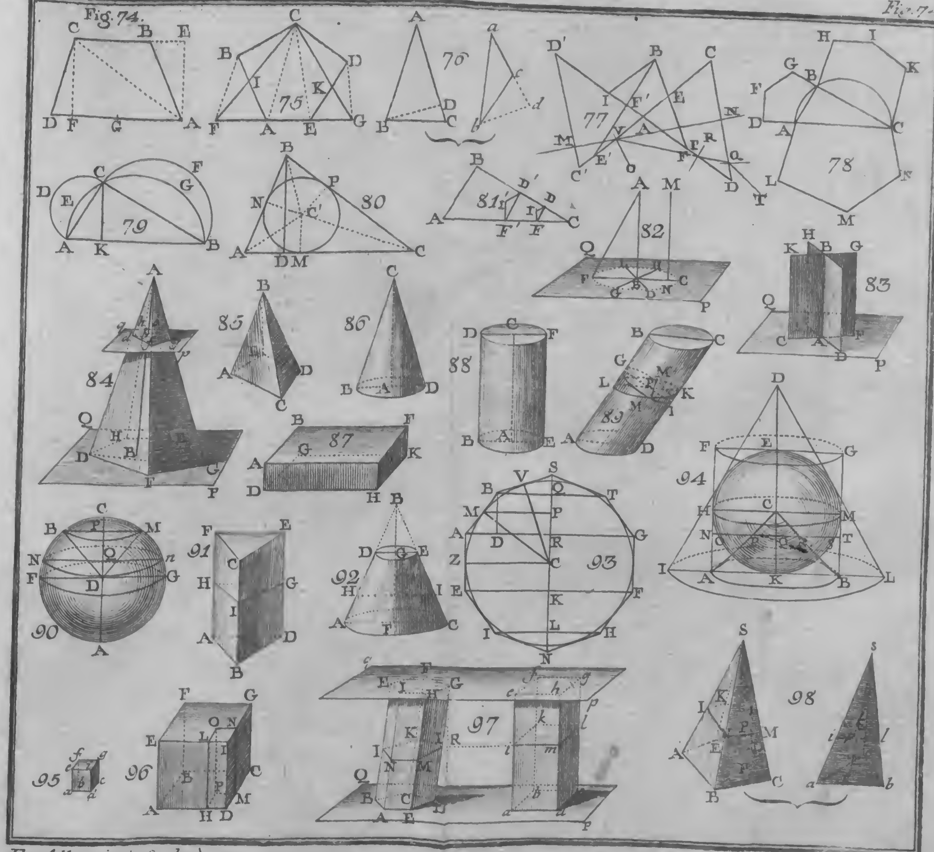


F. Allegrini Sculpsi. *Fig. 50.*

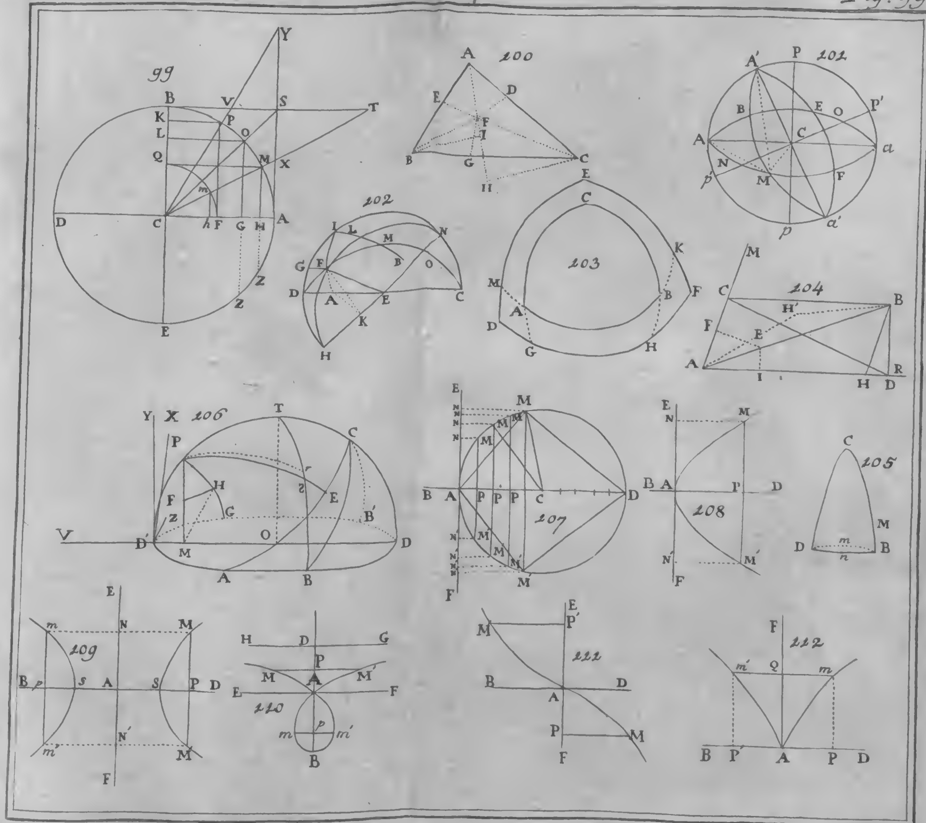


F. Allegrini scolpi.

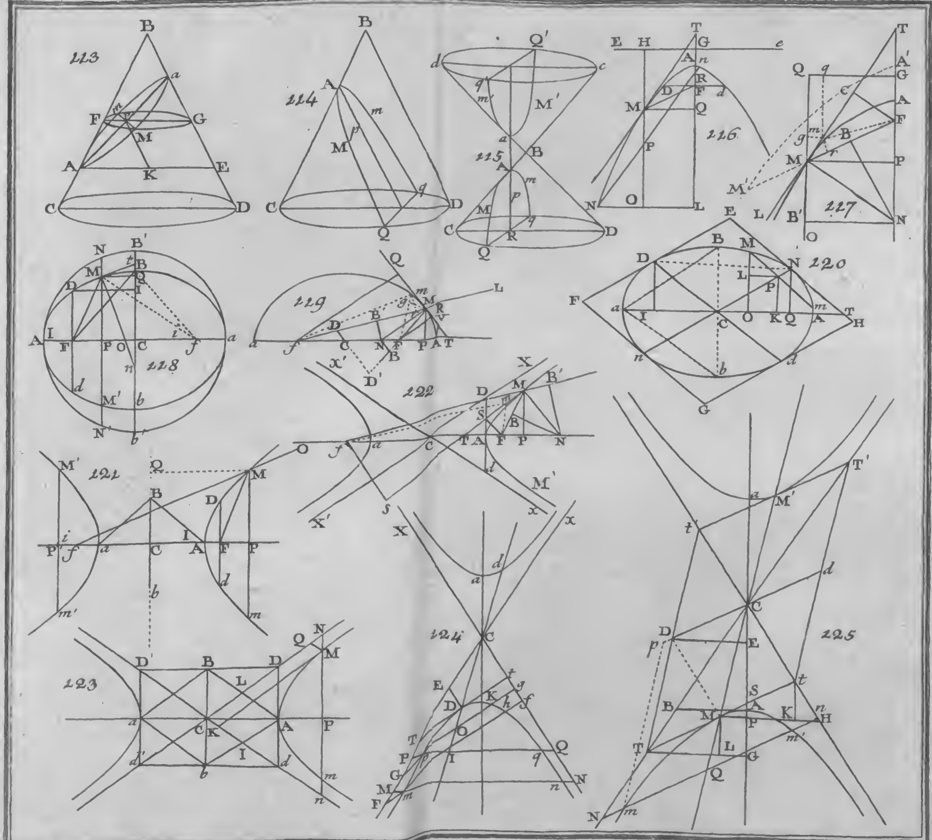
Tav. 4.



F. Allegrini scolpì.

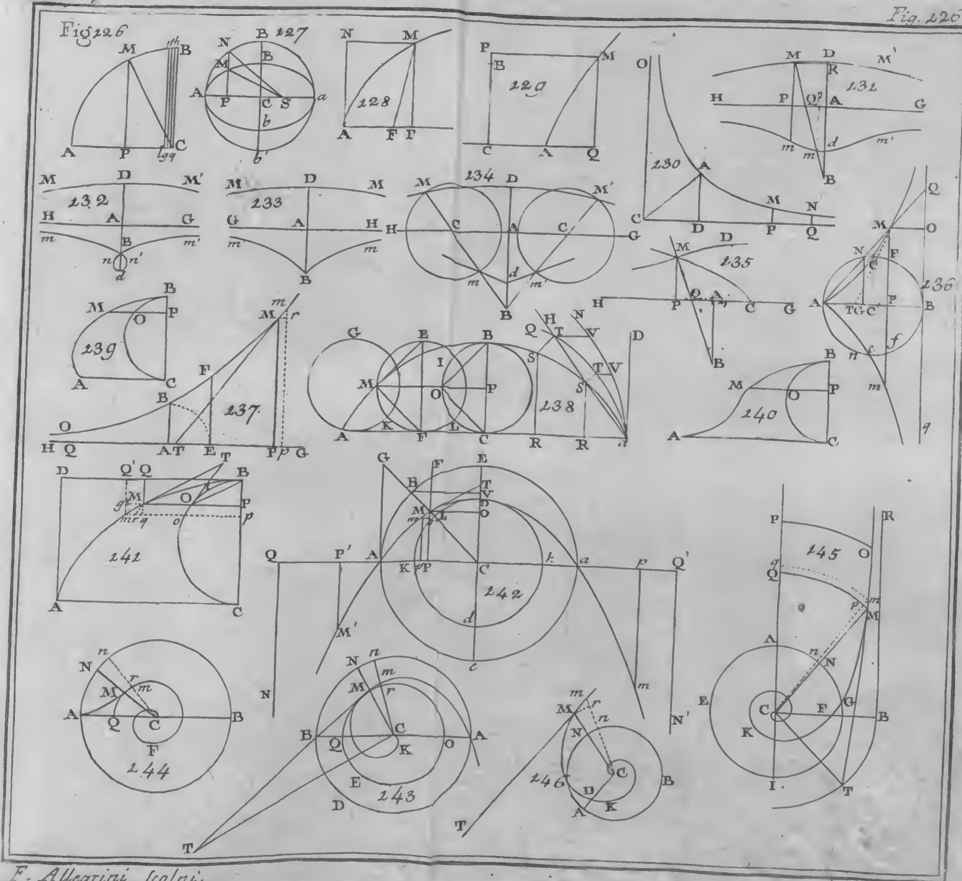

99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112

Tav. 6. *Fig. 113.*



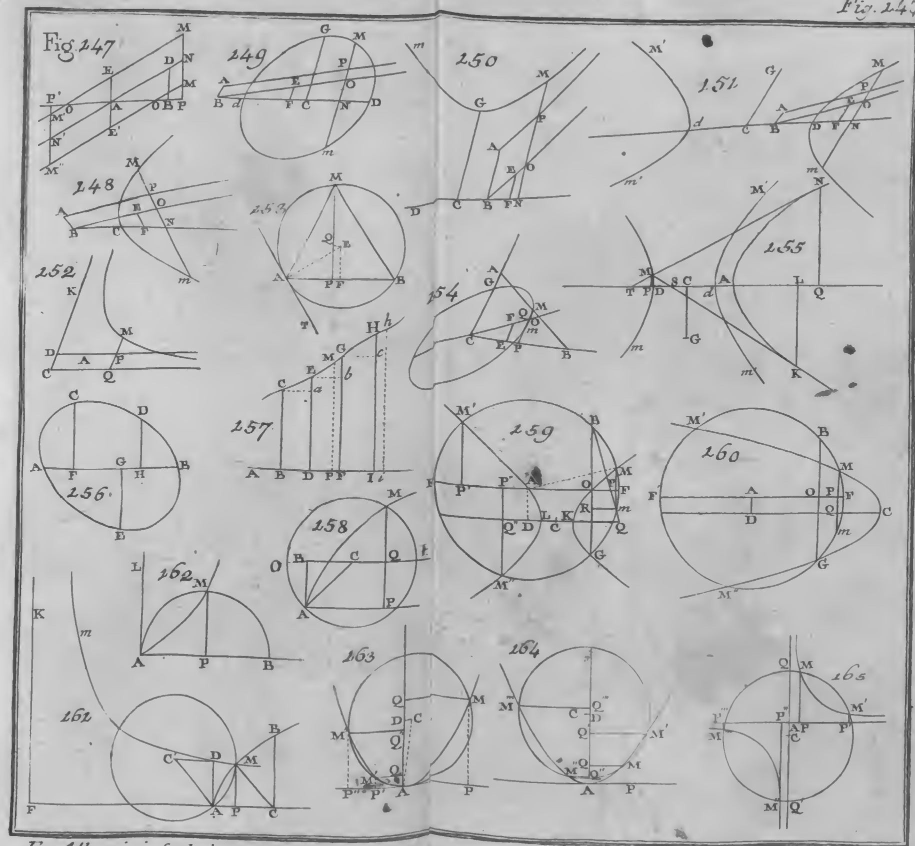
F. Allegrini Scolpi. *Fig. 125.*

Tav. 7.


Fig. 226
Fig126
127
128
129
130
131
132
233
234
135
136
237
238
239
240
241
242
243
244
145
246
F. Allegrini Scolpi.
Fig. 246

Tav 8

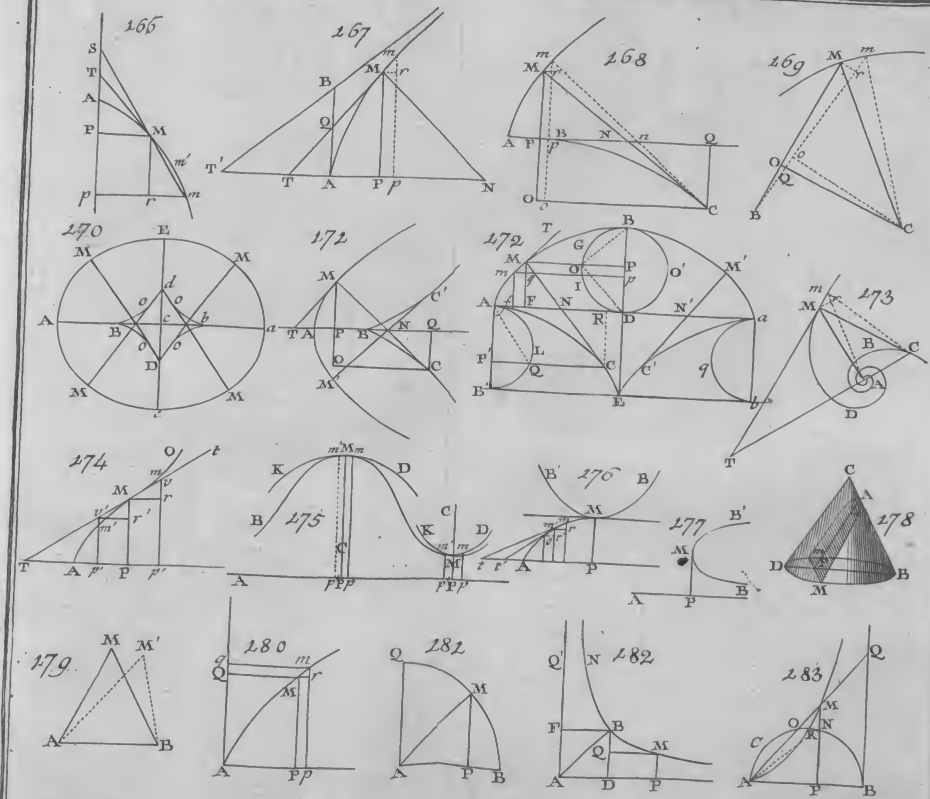
Fig. 247



F. Allegrini Scolpi.

Fig. 165

Tav. 9. Fig. 266.



F. Allegrini Sculpi.

Fig. 283

T. Allegrini Sculpsit.

